

Universidade Virtual Africana

INFORMÁTICA APLICADA: MAT 1304

MATEMÁTICA DISCRETA

Joao Horta

Prefácio

A Universidade Virtual Africana (AVU) orgulha-se de participar do aumento do acesso à educação nos países africanos através da produção de materiais de aprendizagem de qualidade. Também estamos orgulhosos de contribuir com o conhecimento global, pois nossos Recursos Educacionais Abertos são acessados principalmente de fora do continente africano.

Este módulo foi desenvolvido como parte de um diploma e programa de graduação em Ciências da Computação Aplicada, em colaboração com 18 instituições parceiras africanas de 16 países. Um total de 156 módulos foram desenvolvidos ou traduzidos para garantir disponibilidade em inglês, francês e português. Esses módulos também foram disponibilizados como recursos de educação aberta (OER) em oer.avu.org.

Em nome da Universidade Virtual Africana e nosso patrono, nossas instituições parceiras, o Banco Africano de Desenvolvimento, convido você a usar este módulo em sua instituição, para sua própria educação, compartilhá-lo o mais amplamente possível e participar ativamente da AVU Comunidades de prática de seu interesse. Estamos empenhados em estar na linha de frente do desenvolvimento e compartilhamento de recursos educacionais abertos.

A Universidade Virtual Africana (UVA) é uma Organização Pan-Africana Intergovernamental criada por carta com o mandato de aumentar significativamente o acesso a educação e treinamento superior de qualidade através do uso inovador de tecnologias de comunicação de informação. Uma Carta, que estabelece a UVA como Organização Intergovernamental, foi assinada até agora por dezenove (19) Governos Africanos - Quênia, Senegal, Mauritânia, Mali, Costa do Marfim, Tanzânia, Moçambique, República Democrática do Congo, Benin, Gana, República da Guiné, Burkina Faso, Níger, Sudão do Sul, Sudão, Gâmbia, Guiné-Bissau, Etiópia e Cabo Verde.

As seguintes instituições participaram do Programa de Informática Aplicada: (1) Université d'Abomey Calavi em Benin; (2) Université de Ougadougou em Burkina Faso; (3) Université Lumière de Bujumbura no Burundi; (4) Universidade de Douala nos Camarões; (5) Universidade de Nouakchott na Mauritânia; (6) Université Gaston Berger no Senegal; (7) Universidade das Ciências, Técnicas e Tecnologias de Bamako no Mali (8) Instituto de Administração e Administração Pública do Gana; (9) Universidade de Ciência e Tecnologia Kwame Nkrumah em Gana; (10) Universidade Kenyatta no Quênia; (11) Universidade Egerton no Quênia; (12) Universidade de Addis Abeba na Etiópia (13) Universidade do Ruanda; (14) Universidade de Dar es Salaam na Tanzânia; (15) Université Abdou Moumouni de Niamey no Níger; (16) Université Cheikh Anta Diop no Senegal; (17) Universidade Pedagógica em Moçambique; E (18) A Universidade da Gâmbia na Gâmbia.

Bakary Diallo

O Reitor

Universidade Virtual Africana

Créditos de Produção

Autor

Joao Horta

Par revisor(a)

Eloy Mendes

UVA - Coordenação Académica

Dr. Marilena Cabral

Coordenador Geral Programa de Informática Aplicada

Prof Tim Mwololo Waema

Coordenador do módulo

Florence Tushabe

Designers Instrucionais

Elizabeth Mbasu

Benta Ochola

Diana Tuel

Equipa Multimédia

Sidney McGregor

Michal Abigael Koyier

Barry Savala

Mercy Tabi Ojwang

Edwin Kiprono

Josiah Mutsogu

Kelvin Muriithi

Kefa Murimi

Victor Oluoch Otieno

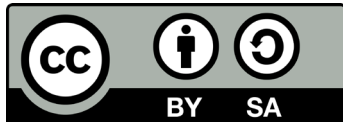
Gerisson Mulongo

Direitos de Autor

Este documento é publicado sob as condições do Creative Commons

http://en.wikipedia.org/wiki/Creative_Commons

Attribution <http://creativecommons.org/licenses/by/2.5/>



Modelo de módulo é licenciado Universidade Virtual Africana licenciada sob uma Licença Internacional Creative Commons Atribuição-Partilha 4.0 Internacional. CC-BY, SA

Apoiado por



Projecto Multinacional II da UVA financiado pelo Banco Africano de Desenvolvimento.

Índice

Prefácio	2
Créditos de Produção	3
Direitos de Autor	4
Apoiado por	4
Descrição Geral do Curso	7
Pré-requisitos	7
Materiais	7
Objetivos do Curso	8
Unidades	8
Avaliação	9
Calendarização	10
Leituras e outros Recursos	11
Unidade 0. Diagnóstico	14
Introdução à Unidade	14
Objetivos da Unidade	14
Termos-chave	14
Avaliação da Unidade	15
Avaliação	15
Leituras e Outros Recursos	16
Unidade 1. Lógica	17
Introdução à Unidade	17
Objetivos da Unidade	17
Termos-chave	17
.	18
Actividades de Aprendizagem	19
Actividade 1.1 - Proposição: representação simbólica e tabela de verdade	19
Introdução	19
Conclusão	23

Avaliação	24
Actividade 1.2 - Predicados, quantificadores e validades	25
Introdução	25
Conclusão	29
Avaliação	29
Actividade 1.3 - Lógica Booleana	31
Introdução	31
Avaliação	36
Conclusão	36
Avaliação da Unidade	37
Resumo da Unidade	37
Avaliação	38
Leituras e outros Recursos	39
Unidade 2. Conjunto e Cálculo Combinatório	40
Introdução à Unidade	40
Objetivos da Unidade	40
Actividades de Aprendizagem	41
Actividade 1.1 - Conjuntos: operações e igualdades	41
Introdução	41
Termos-chave	41
Conclusão	47
Avaliação	48
Actividade 1.2 - Contagem	49
Introdução	49
Conclusão	52
Avaliação	52
Actividade 1.3 - Factorial, Permutações e combinações	53
Introdução	53
Conclusão	57
Avaliação	57

Avaliação da Unidade	58
Resumo da Unidade	58
Avaliação	59
Leituras e outros Recursos	60
Unidade 3. Relações e Funções, Matrizes e Demonstração por Indução Matemática	61
Introdução à Unidade	61
Objetivos da Unidade	61
Termos-chave	62
Actividades de Aprendizagem	62
Actividade 1.1 - Questionário - Relações binárias	62
Introdução	62
Conclusão	71
Avaliação	72
Actividade 1.2 - Funções e Matrizes	74
Introdução	74
Avaliação	84
Conclusão	84
Actividade 1.3 - Demonstração por Indução Matemática	87
Introdução	87
Conclusão	89
Avaliação	89
Resumo da Unidade	90
Avaliação da Unidade	90
Leituras e outros Recursos	91
Avaliação	91
Unidade 4. Teoria de Grafos	92
Introdução à Unidade	92
Objetivos da Unidade	92
Termos-chave	92

Actividades de Aprendizagem	93
Actividade 1.1 - Grafo: definição e conceitos gerais.	93
Introdução	93
Classificação de caminhos.	96
Regras para construir um ciclo hamiltoniano:	100
Grafos isomorfos e homeomorfos.	102
Conclusão	106
Avaliação	107
Actividade 1.2 - Grafo planar e coloração de grafos e mapas	110
Introdução	110
Conclusão	114
Avaliação	114
Actividade 1.3 - Grafo dirigido	115
Introdução	115
Conclusão	122
Avaliação	122
Resumo da Unidade.	123
Avaliação da Unidade	124
Avaliação	124
Leituras e outros Recursos.	126

Descrição Geral do Curso

Bem-vindo(a) Matemática Discreta

Neste módulo você irá estudar a Matemática Discreta. é uma disciplina da área de Matemática que estuda os sistemas finitos. Por ser o computador uma estrutura finita, muitas das suas propriedades podem ser entendidas no âmbito dos sistemas matemáticos finitos.

Sendo assim, a Matemática Discreta é uma ferramenta muito importante para o Curso de Informática Aplicada, uma vez que através dela você poderá adquirir conhecimentos absolutamente necessários para compreensão e aplicação de conteúdos desta área de estudos.

Pré-requisitos

Para o estudo deste módulo você deve conhecer os conjuntos numéricos: O conjunto dos números naturais, o conjunto dos inteiros relativos - $\mathbb{Z}$, o conjunto dos números racionais - $\mathbb{Q}$ e o conjunto dos números reais - $\mathbb{R}$. Também deve efectuar as operações com números reais: adição, subtração, multiplicação, divisão, radiciação e potenciação.

Materiais

Os materiais necessários para completar este curso incluem:

- Bibliografia:
 1. Gersting, J. I. (2007). Mathematical Structures for Computer Science: A Modern Approach to Discrete Mathematics. (6. ed). New York: W. H. Freeman and Company.
 2. Gersting, J. I. (1995). Fundamentos Matemáticos para Ciência de Computação. (L. L. Fialho & M. M. Filhos, Trad.). (3ª ed). Rio de Janeiro: LTC - Livros Técnicos e Científicos Editora S.A. (Obra original publicada em 1993).
 3. Máquina Científica: TI-83 ou semelhante.
 4. Software: Mapple ou semelhante.

Objetivos do Curso

Após concluir este curso, você deve ser capaz de ler e construir argumentos matemáticos que surgem nas demonstrações de proposições lógicas. Também, deve ser capaz de resolver diversos tipos de problemas aplicando os conhecimentos sobre cálculo combinatório, teoria de grafos, funções recursivas, etc., principalmente os problemas que envolvem a construção de algoritmos.

Unidades

Unidade 0: Conjuntos numéricos ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$) e operações (soma, multiplicação, divisão, radiciação, potenciação)

Pretende-se que se adquira conhecimentos à nível dos elementos dos conjuntos dos números naturais, dos números inteiros relativos, dos números racionais e dos números reais.

Pretende-se que se efectue operações de adição, subtracção, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação no conjunto dos números reais.

Pretende-se também que se determine um conjunto a partir de uma condição.

Unidade 1: Lógica

Aborda-se sobre os símbolos formais que são utilizados na lógica proposicional e na lógica dos predicados bem como o valor-verdade de uma expressão nestas lógicas.

Estuda-se também a lógica booleana, as suas propriedades e o isomorfismo entre eles.

Unidade 2: Conjuntos . Cálculo Combinatório

Esta unidade aborda sobre as operações entre conjuntos: união, intersecção, diferença, complemento e produto cartesiano. Estuda-se também as operações binárias e unárias sobre conjuntos. Determinação do número de elementos de um conjunto finito, ganha especial interesse.

Faz-se também a resolução de problemas de contagem. Usa-se as fórmulas de permutação e combinação, com e sem repetições, de objectos num conjunto de objectos, .

Unidade 3: Relações, Matrizes e Demonstrações

Trata da relação binária e as suas propriedades, com destaque para relação de equivalência e ordenação parcial.

Estuda-se função, como caso particular de uma relação. O estudo de funções sobrejectivas e a determinação das respectivas inversas tem grande interesse. Define-se recursivamente certas sequências (muito importantes para a lógica de programação). Estuda-se também as matrizes e as suas operações.

A Técnica de demonstração por indução finita deve ser muito bem explorada.

Unidade 4: Teoria de grafos

Estuda-se as propriedades de grafos (e árvores, como casos particulares). Discute-se o conceito de planaridade e o problema de coloração de grafos.

Os algoritmos serão utilizados para resolução de problemas aplicando teoria de grafos.

Avaliação

Em cada unidade encontram-se incluídos instrumentos de avaliação formativa a fim de verificar o progresso do(a)s aluno(a)s.

No final de cada módulo são apresentados instrumentos de avaliação sumativa, tais como testes e trabalhos finais, que compreendem os conhecimentos e as competências estudadas no módulo.

A implementação dos instrumentos de avaliação sumativa fica ao critério da instituição que oferece o curso. A estratégia de avaliação sugerida é a seguinte:

1	Avaliação Formativa	30%
2	Avaliação Sumativa I	30%
3	Avaliação Sumativa II	40%

Calendarização

Unidade	Temas e Atividades	Estimativa do tempo
Unidade 1: Lógica	Proposição: representação simbólica e tabela de verdade Conectivos lógicos e valores-verdade; Quantificadores, predicados e validades; Lógica booleana	20 horas
Unidade 2: Conjuntos e Cálculo Combinatório	Conjuntos: 1.1. Subconjuntos e igualdade de conjuntos; 1.2. Elementos de um conjunto; definição de um conjunto (finito e infinito) 1.3. Relações entre conjuntos; 1.4. Conjuntos de conjuntos: partes de um conjunto; 1.6. Operações em conjuntos (união; intersecção; complemento; produto cartesiano) e propriedades; 1.7. Conjuntos contáveis 1.8. Número de elementos de um conjunto finito. Análise Combinatória: 2.1. Contagem 2.2. Arranjo, permutação e combinação (com e sem repetições) 2.3. O Polinómio binomial - O Triângulo de Pascal	40
Unidade 3 Relações, Matrizes e demonstração.	Relações - ária em um conjunto, 1.1. Relações binárias e suas propriedades: relação de equivalência e relação de ordem parcial; classes de equivalência; 1.2. Função: definição e terminologia; função bijectiva e inversa de uma função; composição de funções; 1.3. Conjuntos equivalentes e cardinalidade; 1.4. Permutação de um conjunto; 1.5. Recursão e relação de recorrência	30 horas

	Matrizes 2.1. Definição e terminologia; 2.2. Operações com matrizes e suas propriedades: Soma, multiplicação; 2.3. Matrizes booleanas. Demonstração 3.1. Técnicas da demonstração: indução finita;	
Unidade 4. Grafos e árvores	Teoria de grafos 1.1. Caminho euliano; 1.2. Ciclo hamiltoniano; 1.3. Caminho Mínimo e Árvore Geradora Mínima 1.3. Algoritmo de busca.	30 horas

Leituras e outros Recursos

As leituras e outros recursos deste curso são:

Unidade 0

Leituras e outros recursos obrigatórios:

- Manuais do 8º, 9º e 10º anos de escolaridade da autora Maria Augusta Ferreira Neves.

Unidade 1

Leituras e outros recursos obrigatórios:

- Gersting, J. I. (2007). Mathematical Structures for Computer Science: A Modern Approach to Discrete Mathematics. (6. ed). New York: W. H. Freeman and Company.
- Gersting, J. I. (1995). Fundamentos Matemáticos para Ciência de Computação. (L. L. Fialho & M. M. Filhos, Trad.). (3ª ed). Rio de Janeiro: LTC - Livros Técnicos e Científicos Editora S.A. (Obra original publicada em 1993).

Leituras e outros recursos opcionais:

- Lipschutz, S. & Lipson, M. (2004). Matemática Discreta. (H. B. Medeiros, Trad.). (2ª ed). Porto Alegre: Artmed Editora S. A. (Obra original publicada em 1997)
- Menezes, P. B. (2005). Matemática Discreta para Computação e Informática. (2ª ed). Porto Alegre: Editora Sagra Luzzatto S/A

Unidade 2

Leituras e outros recursos obrigatórios:

- Gersting, J. I. (2007). Mathematical Structures for Computer Science: A Modern Approach to Discrete Mathematics. (6. ed). New York: W. H. Freeman and Company.
- Gersting, J. I. (1995). Fundamentos Matemáticos para Ciência de Computação. (L. L. Fialho & M. M. Filhos, Trad.). (3ª ed). Rio de Janeiro: LTC - Livros Técnicos e Científicos Editora S.A. (Obra original publicada em 1993).
- Leituras e outros recursos opcionais:
- Lipschutz, S. & Lipson, M. (2004). Matemática Discreta. (H. B. Medeiros, Trad.). (2ª ed). Porto Alegre: Artmed Editora S. A. (Obra original publicada em 1997)
- Menezes, P. B. (2005). Matemática Discreta para Computação e Informática. (2ª ed). Porto Alegre: Editora Sagra Luzzatto S/A

Unidade 3

Leituras e outros recursos obrigatórios:

- Gersting, J. I. (2007). Mathematical Structures for Computer Science: A Modern Approach to Discrete Mathematics. (6. ed). New York: W. H. Freeman and Company.
- Gersting, J. I. (1995). Fundamentos Matemáticos para Ciência de Computação. (L. L. Fialho & M. M. Filhos, Trad.). (3ª ed). Rio de Janeiro: LTC - Livros Técnicos e Científicos Editora S.A. (Obra original publicada em 1993).
- Leituras e outros recursos opcionais:
- Lipschutz, S. & Lipson, M. (2004). Matemática Discreta. (H. B. Medeiros, Trad.). (2ª ed). Porto Alegre: Artmed Editora S. A. (Obra original publicada em 1997)
- Menezes, P. B. (2005). Matemática Discreta para Computação e Informática. (2ª ed). Porto Alegre: Editora Sagra Luzzatto S/A

Unidade 4

Leituras e outros recursos obrigatórios:

- Gersting, J. I. (2007). Mathematical Structures for Computer Science: A Modern Approach to Discrete Mathematics. (6. ed). New York: W. H. Freeman and Company.
- Gersting, J. I. (1995). Fundamentos Matemáticos para Ciência de Computação. (L. L. Fialho & M. M. Filhos, Trad.). (3ª ed). Rio de Janeiro: LTC - Livros Técnicos e Científicos Editora S.A. (Obra original publicada em 1993).
- Leituras e outros recursos opcionais:
- Lipschutz, S. & Lipson, M. (2004). Matemática Discreta. (H. B. Medeiros, Trad.). (2ª ed). Porto Alegre: Artmed Editora S. A. (Obra original publicada em 1997)
- Menezes, P. B. (2005). Matemática Discreta para Computação e Informática. (2ª ed). Porto Alegre: Editora Sagra Luzzatto S/A

Unidade 0. Diagnóstico

Introdução à Unidade

O propósito desta unidade é verificar a compreensão dos conhecimentos que você possui relacionados com este curso.

Objetivos da Unidade

Após a conclusão desta unidade, deverá ser capaz de:

- Identificar os elementos do conjunto $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$;
- Determinar os elementos de um conjunto, cujos elementos têm uma determinada propriedade.
- Determinar o valor de uma expressão numérica.

Termos-chave

Conjunto: é uma coleção de zero ou mais objectos distintos, chamados *elementos* do conjunto, os quais não possuem qualquer ordem associada (Menezes, 2005)..

Expressão numérica: é uma expressão matemática que envolve números e operadores.

Avaliação da Unidade

Verifique a sua compreensão!

Teste Diagnóstico sobre conjuntos numéricos e operações com seus elementos.

Instruções

Este é um teste diagnóstico, com carácter meramente informativo, que permite avaliar o seu perfil de entrada no curso de Matemática Discreta.

CrITÉRIOS de Avaliação

São dez questões e cada uma delas vale 20 pontos, totalizando 200 pontos.

Escala de avaliação:

Insuficiente: 0 a 100 (exclusivo);

Suficiente: 100 a 140 (exclusivo);

Bom: 140 a 170 (exclusivo);

Muito bom: 170 a 200.

Os alunos com Suficiente, Bom e Muito Bom considera-se com condições para iniciar o módulo.

Avaliação

1. Represente por extensão os seguintes conjuntos:

1.1. $A = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ par e } x \text{ menor que } 25\}$

1.2. $B = \{x \in \mathbb{Z} : [x^2 - x/2 + 1/2 = 0]\} \wedge$

1.3. $C = \{x \in \mathbb{Q} : [x^2 - x/2 + 1/2 = 0]\} \wedge$

1.4. $D = \{x \in \mathbb{R} : [x^2(2) + 1 = 0]\} \wedge$

1.5. $E = \{x \in \mathbb{N} : x > 0 \text{ e } x < 4\}$

2. Determine o valor das seguintes expressões numéricas:

2.1. $-5 - (-7) + 5 + 3 \times 5 =$

2.2. $(1/2 + 3 - 1/4) / (1/2 \div 1/3 \times 3) =$

2.3. $\sqrt{((-4)^2)} + \sqrt{((-3)^3)} - 5/2 =$

2.4. $(2^4 + 2 \times 2^{(-1)}) / 2^3 =$

2.5. Sabendo que a é par, que b é ímpar e que m é um real qualquer, determine

$\sqrt{(n \cdot a^n)} + \sqrt{(m \cdot a^m)}$

Leituras e Outros Recursos

As leituras e outros recursos desta unidade encontram-se na lista de "[Leituras e Outros Recursos do curso](#)".[h.1ksv4uv](#)

Unidade 1. Lógica

Introdução à Unidade

A lógica tem uma importância capital para qualquer ciência, e em particular para a Ciência de Computação. Através da Lógica, obtém-se uma linguagem rigorosa, uma forma muito útil de abstrair e um raciocínio muito rigoroso.

Pretende-se nesta unidade oferecer ferramentas da Lógica Matemática que permitam uma forma de pensar organizado e cuidadoso. Estuda-se a lógica booleana.

Objetivos da Unidade

Após a conclusão desta unidade, deverá ser capaz de:

- Determinar o valor lógico de uma proposição e de um predicado.
- Determinar o valor de verdade de alguma interpretação na lógica de predicados.
- Construir a tabela de verdade de uma proposição.
- Representar afirmações na língua portuguesa utilizando a lógica proposicional e de predicado.
- Demonstrar relações na álgebra booleana.

Termos-chave

Proposição, ou afirmação, ou sentença: é uma frase que pode ser verdadeira ou falsa, não as duas coisas.

Conectivo Lógico: É um símbolo (ou palavra) usado para conectar, ou unir, duas proposições de modo que o valor da verdade da proposição obtida dependa apenas dos valores lógicos das proposições conectadas.

Tabela da verdade: é uma forma resumida de apresentar os valores da verdade de uma proposição composta.

Fórmula bem formada: é uma expressão lógica que obedece a sintaxe de uma determinada linguagem lógica.

Função proposicional, ou predicado, ou condição: Seja um conjunto arbitrário. Uma função proposicional definida em A é uma expressão tal que, para todo $a \in A$, $P(a)$ é uma proposição. O conjunto A é dito domínio de P e o conjunto $\{a \in A \mid P(a) \text{ é verdadeira}\}$ é chamado conjunto verdade de P .

Interpretação: Uma interpretação para uma fórmula bem-formada de predicados consiste em um conjunto A , chamado domínio, ou universo, da interpretação juntamente com uma correspondência que associa os símbolos da fórmula bem-formada com os elementos de A , do seguinte modo: a cada símbolo de predicado corresponde a uma determinada relação entre os elementos de A ; um predicado sem argumentos é uma proposição e atribui-se-lhe um dos valores verdadeiro ou falso ; a cada variável livre faz-se corresponder um elemento de A ; a todas as ocorrências livres de uma mesma variável faz-se corresponder o mesmo elemento de A ; a cada constante faz-se corresponder um e um só elemento de A ; a todas as ocorrências de uma mesma constante faz-se corresponder o mesmo elemento de A .

Álgebra Booleana: Uma álgebra booleana é uma estrutura matemática composta por um conjunto, diga-se B , no qual são definidas duas operações binárias, denotadas por $+$ e $\cdot$, e uma operação unária, denotada por $'$, e no qual há dois elementos, representados por 0 e 1 , tais que para todo $x, y, z \in B$, pertencentes a B , valem as seguintes propriedades:

Propriedade comutativa:

$$x+y=y+x \quad \text{e} \quad x \cdot y=y \cdot x$$

Propriedade distributiva:

$$x \cdot (y+z)=(x \cdot y)+(x \cdot z) \quad \text{e} \quad x+(y \cdot z)=(x+y) \cdot (x+z)$$

Propriedades de identidades:

$$x+0=x \quad \text{e} \quad x \cdot 1=x$$

Propriedades complementativas:

$$x+x'=1 \quad \text{e} \quad x \cdot x'=0$$

Actividades de Aprendizagem

Actividade 1.1 - Proposição: representação simbólica e tabela de verdade

Introdução

Nesta unidade pretende-se que se conheça o conceito de proposição e de fórmula bem-formada. Pretende-se que se determine a tabela de verdade de uma fórmula bem-formada, e estabelecer correspondências entre as fórmulas bem-formadas. Traduzir uma proposição para a linguagem simbólica e determinar o seu valor lógico é uma meta a alcançar. As actividades propostas servem essencialmente para melhorar a capacidade de abstracção.

Detalhes da actividade

Proposição. É uma frase, ou uma expressão, da qual faz sentido dizer que é falsa ou que é verdadeira (valor de verdade, ou valor lógico, de uma proposição).

Exemplo.

1. "A cidade de Paris fica em Inglaterra" é uma proposição com valor lógico falsa.
2. " $2+2=4$ " é uma proposição pois é verdadeira.
3. "Azul é uma linda cor" não é proposição pois esta frase não é rigorosamente verdadeira , nem falsa.
4. "O livro é do João ou do Rui" é uma proposição, pois esta frase pode ser verdadeira (caso o livro seja de um deles) ou falsa (caso o livro não seja de nenhum deles).

Princípios. A lógica que se vai estudar baseia-se em dois princípios:

- Princípio do terceiro excluído - uma proposição é verdadeira ou falsa;
- Princípio da não contradição - uma proposição não pode ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo.

Conectivo lógico, ou operador lógico. É um símbolo (ou palavra) usado para conectar, ou unir, duas proposições de modo que o valor da verdade da proposição obtida dependa apenas dos valores lógicos das proposições conectadas e do conectivo utilizado.

Os conectivos lógicos mais comuns são:

1. Conjunção (e): “ $\wedge$ ” ou “&” ou “.”. Conjunção de duas proposições p e q , escreve-se normalmente $p \wedge q$ (p e q).
2. Disjunção (ou): “ $\vee$ ”. Disjunção de duas proposições p e q , escreve-se normalmente $p \vee q$ (p ou q).
3. Negação (não): “ $\neg$ ” ou “ $\sim$ ”. Negação de uma proposição p , escreve-se normalmente $\neg p$ (não p , ou não é verdade que p).
4. Implicação material (se ..., então): “ $\rightarrow$ ” ou “ $\Rightarrow$ ”. uma proposição p implica uma proposição q , escreve-se normalmente $p \rightarrow q$ (se p então q , p só se q , q é a condição necessária para p , p é a condição suficiente para q), neste caso diz-se que p é antecedente e que q é consequente. Associada a uma implicação $p \rightarrow q$ está associada mais duas proposições: $q \rightarrow p$, a sua recíproca; e $\neg q \rightarrow \neg p$, a sua contraposta.
5. Bicondicional, ou equivalência formal, (se e somente se): “ $\Leftrightarrow$ ” ou “ $\leftrightarrow$ ” ou “ $=$ ” ou “ $\equiv$ ”. Uma proposição p é equivalente q , escreve-se normalmente $p \leftrightarrow q$ (p equivalente a q).

Exemplo.

Tabela de verdade. Os valores lógicos de uma proposição são resumidos em uma tabela, denominada tabela da verdade.

Apresenta-se abaixo as tabelas da verdade da conjunção, disjunção, negação, implicação material, bicondicional e disjunção exclusiva:

p	q	$p \wedge q$	p	q	$p \vee q$	p	$\neg p$
V	V	V	V	V	V	V	F
V	F	F	V	F	V	F	V
F	V	F	F	V	V		
F	F	F	F	F	F		

p	q	$p \rightarrow q$	p	q	$p \leftrightarrow q$	p	q	$p \nabla q$
V	V	V	V	V	V	V	V	F
V	F	F	V	F	F	V	F	V
F	V	V	F	V	F	F	V	V
F	F	V	F	F	V	F	F	F

Observação. Nota-se que:

- A conjunção de duas proposição é verdadeira se essas duas proposições são simultaneamente verdadeiras, e falsas em outros casos.

Exemplo. A proposição “Praia é capital de Cabo Verde e Lisboa é capital de Portugal” é uma proposição verdadeira. Mas a proposição “Praia é capital de Cabo Verde e Lisboa é capital de Guiné Bissau” é falsa.

- A disjunção de duas proposições é falsa se essas duas proposições são simultaneamente falsas, e verdadeiras em outros casos.

Exemplo. As proposições “Praia é capital de Cabo Verde ou Lisboa é capital de Portugal” e “Praia é capital de Cabo Verde ou Lisboa é capital de Guiné Bissau” são verdadeiras. Mas a proposição “Praia é capital de Portugal ou Lisboa é capital de Guiné Bissau” é falsa.

- A implicação de duas proposições é falsa se o antecedente é verdadeiro e o consequente falso, e verdadeira em outros casos.

Exemplo. A proposição “se Praia é capital de Cabo Verde, então Lisboa é capital de Guiné Bissau” é falsa, mas “se Praia é capital de Guiné Bissau, então Lisboa é capital de Cabo Verde” é verdadeira. Também a proposição “se Praia é capital de Guiné Bissau, então Lisboa é capital de Portugal” é verdadeira. Mas “se Praia é capital de Cabo Verde, então Lisboa é capital de Cabo Verde” é falsa.

- A equivalência de duas proposições é verdadeira quando essas proposições têm os mesmos valores lógicos, isto é, ambos verdadeiros ou ambos falsos, e falsa noutros casos.
- A negação de uma proposição tem valor lógico contrário a essa proposição.

Fórmulas bem-formadas (fbf). Numa linguagem lógica estuda-se dois aspectos, a sintaxe e a semântica. A sintaxe diz respeito às regras de formação das expressões lógicas a utilizar, chamadas fórmulas bem-formadas, enquanto que a semântica diz respeito aos significados dessas expressões.

Na linguagem do cálculo proposicional considera-se a sintaxe e semântica que se seguem:

Sintaxe. Uma variável proposicional é um símbolo p, q, r , etc., ao qual pode-se atribuir valor lógico V ou F. Uma proposição atômica é uma variável proposicional ou uma constante, V ou F. Uma fórmula bem-formada que não seja uma proposição atômica diz-se uma proposição composta. Uma fórmula bem-formada fica definida da seguinte forma:

- V e F são fórmulas bem-formadas e toda variável proposicional é uma forma bem-formada;
- Se P e Q são fórmulas bem-formadas e c_i é um conectivo lógico, então $P c_i Q$ é uma fórmula bem-formada.
- Toda fórmula bem-formada é formada por estas regras

Observação. Os parênteses funcionam como símbolos auxiliares que indicam como a fórmula bem-formada é formada. Para evitar o uso excessivo de parênteses, convencionou-se que as seguintes operações lógicas são consideradas pela seguinte ordem de prioridade:

Ordem de prioridade	Conectivo lógico
1º	$\neg$
2º	$\wedge$
3º	$\vee$
4º	$\rightarrow$
5º	$\leftrightarrow$

Exemplo. A afirmação “fogo é uma condição necessária para a fumaça” é equivalente à afirmação “Se há fumaça, então há fogo”. Logo, se p representa a afirmação “há fumaça” e q representa a afirmação “há fogo”, então a proposição $p \rightarrow q$ é a representação da afirmação “fogo é uma condição necessária para a fumaça” na lógica proposicional.

Dada uma fórmula bem-formada, interpretando cada uma das suas variáveis proposicionais, ou , obtém-se uma interpretação para essa fórmula bem-formada:

- Uma fórmula bem-formada diz-se uma Tautologia se ela é verdadeiro para todos os possíveis valores lógicos das proposições atômicas que a compõem.
- Uma fórmula bem-formada diz-se uma contradição se ela é falsa para todos os possíveis valores lógicos das proposições atômicas que a compõem.
- Uma fórmula bem-formada diz-se uma contingência se não é nem tautologia nem contradição.

A proposição $p \vee \neg p$ é uma tautologia, pois:

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$
V	F	V
F	V	V

Exemplo. A proposição $p \wedge \neg p$ é uma contradição, pois:

p	$\neg p$	$p \wedge \neg p$
V	F	F
F	V	F

Equivalência lógica. Duas fórmulas bem-formadas são equivalentes, ou iguais, se elas têm tabelas de verdade idênticas, ou seja, para os mesmos valores lógicos das proposições atômicas que as compõem, essas fórmulas bem-formadas assumem os mesmos valores lógicos. Para indicar que duas fórmulas bem-formadas P e Q são equivalentes, escreve-se $P \equiv Q$, ou $P \Leftrightarrow Q$.

Exemplo. As fórmulas bem formadas $p \rightarrow q$ e $\neg p \vee q$ são equivalentes. Com efeito:

p	q	$p \rightarrow q$	p	$\neg p$	q	$\neg p \vee q$
V	V	V	V	F	V	V
V	F	F	V	F	F	F
F	V	V	F	V	V	V
F	F	V	F	V	V	V

De seguida, passa-se a indicar algumas equivalências entre algumas fórmulas bem-formadas:

Lei do terceiro excluído: $p \vee \neg p \equiv V$.

Lei da contradição: $p \wedge \neg p \equiv F$.

Leis da identidade: $p \vee V \equiv p$; $p \vee F \equiv p$.

Leis da absorção: $p \vee V \equiv V$; $p \wedge F \equiv F$.

Leis da idempotência: $p \vee p \equiv p$; $p \wedge p \equiv p$.

Lei da dupla negação: $\neg(\neg p) \equiv p$.

Leis da comutatividade: $p \vee q \equiv q \vee p$; $p \wedge q \equiv q \wedge p$.

Leis da associatividade: $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$; $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$.

Leis da distributividade: $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$; $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$.

Leis de De Morgan: $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$; $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$.

Conclusão

Os conectivos lógicos unem duas proposições formando uma fórmula bem-formada. Uma fórmula bem-formada pode ser uma tautologia, uma contradição ou uma contingência. A construção da tabela da verdade de uma fórmula bem-formada é muito importante para avaliar a natureza semântica de uma fórmula bem-formada. Na construção de uma fórmula bem-formada, deve-se respeitar as regras de sintaxe. As propriedades de equivalências entre as fórmulas bem formadas podem ser utilizadas para deduzir outras equivalências entre as fórmulas bem-formada.

Avaliação

1. Quais das seguintes frases são proposições:
 - a. 14 é um número ímpar.
 - b. Lisboa é a cidade capital de Portugal.
 - c. Amarelo é uma cor linda.
2. Indique o valor lógico das seguintes proposições:
 - a. é um número composto.
 - b. Canadá é uma cidade.
 - c. O número 2 é primo ou 4 é par.
 - d. Se 2 não for primo, então 4 é ímpar.
 - e. Se 2 não for primo e 4 for par, então $4 < 2$.
3. Identifique todas as proposições atômicas nas frases seguintes e represente-as por símbolos p , q , r , etc. Em seguida escreva as frases sob a forma simbólica:
 - a. Se os impostos forem aumentados ou os gastos governamentais forem diminuídos, não haverá inflação.
 - b. Se a Maria está no ginásio, então a Marta está no ginásio.
 - c. Ele virá se tu avisares.
 - d. Amanhã vou de autocarro se ele parar no Rossio, ou vou de táxi se tiver dinheiro.
 - e. Se acabar o meu trabalho vou à praia se fizer bom tempo.
 - f. Uma condição necessária para x ser primo é que x seja ímpar ou $x=2$.
 - g. Uma condição suficiente para que uma função f seja contínua é que f seja diferenciável.
 - h. Ela morre hoje a menos que consiga auxílio médico.
4. Construa as tabelas de verdade para as seguintes proposições:
 - a. $p \vee (q \wedge r)$
 - b. $(p \rightarrow \neg q) \wedge (q \rightarrow p)$
 - c. $(p \vee \neg q) \leftrightarrow (r \wedge p)$
5. Mostre que $p \rightarrow q$ é equivalente à sua contraposta, mas não é equivalente à sua recíproca.

Actividade 1.2 - Predicados, quantificadores e validades

Introdução

Pretende-se nesta actividade que você identifique um predicado e que determine o seu valor lógico. A tradução de uma afirmação da linguagem corrente para linguagem da lógica proposicional é um exercício muito importante, e deve ser muito bem explorado, pois permitirá de uma certa forma analisar a veracidade de uma afirmação qualquer que se possa fazer no dia-a-dia. Também você deve determinar se uma determinada fórmula bem-formada é ou não válida, e em caso negativo identificar uma dada interpretação onde a fórmula bem formada é falsa.

Detalhes da actividade

Função proposicional, ou condição, ou predicado. Seja A um conjunto arbitrário. Uma função proposicional definida em A é uma expressão $p(x)$ tal que, para todo $a \in A$, $p(a)$ é uma proposição. O conjunto A é dito domínio de $p(x)$ e o conjunto T_p de todo o valor $a \in A$ para o qual $p(a)$ é verdadeira é chamado conjunto verdade de $p(x)$.

Exemplo.

Ache o conjunto verdade do predicado $p(n)$ definida no conjunto N , dos inteiros positivos:

$p(n)$: n é par. Então $T_p = \{2, 4, 6, \dots\}$, isto é, o conjuntos dos inteiros positivos pares.

$p(n)$: $n+3 \leq 5$. Então $T_p = \{1, 2\}$.

$p(n)$: $n+5=0$. Então $T_p = \emptyset$.

$p(n)$: $n+3 > 3$. Então $T_p = N$.

Quantificador Universal. Seja $p(x)$ uma função proposicional definida num conjunto A . A expressão $(\forall x \in A)(p(x))$, ou $\forall x, p(x)$, lê-se “para todo $x \in A$ $p(x)$ é uma proposição verdadeira se e só se $T_p = A$ ”. O símbolo $\forall$, lê-se “para todo”, e denomina-se por quantificador universal.

Quantificador existencial. Seja $p(x)$ uma função proposicional definida num conjunto A . A expressão $(\exists x \in A)(p(x))$, ou $\exists x, p(x)$, lê-se “existe um $x \in A$ tal que $p(x)$ é uma proposição verdadeira se e só se $T_p \neq \emptyset$ ”. O símbolo $\exists$, lê-se “existe um”, e denomina-se por quantificador existencial.

Exemplo. Vai determinar-se o valor lógico das seguintes proposições:

- $(\forall n \in N)(2n+1 \geq 3)$ é uma proposição verdadeira, pois $n \in N$ e $2n+1 \geq 3 \Leftrightarrow n \in N$ e $n \geq 1$,

ou seja, $T_p = N$.

- Seja $p(x,y): x-y=0$ uma função proposicional definida no conjunto $\mathbb{R}^2$. A proposição $\forall(x,y), p(x,y)$ é falsa, pois T_p é o conjunto dos pontos da recta definida pela equação $y=x$, logo é diferente de $\mathbb{R}^2$. Evidentemente que, a proposição $\exists x, p(x,y)$ é uma proposição verdadeiro.
- Seja $p(x): x^2-1 < 0$ uma função proposicional definida em $\mathbb{Z}$. A proposição $\exists x, p(x)$ é falsa, pois $T_p = \emptyset$. Nota-se que

$$x \in \mathbb{R} \text{ e } x^2 - 1 < 0 \Leftrightarrow x \in]-1, 1[.$$

- Seja $A=\{\text{Pedro}, \text{Paulo}, \text{Manuel}\}$ e seja s a proposição “faz sol”. Seja também a função proposicional “ $p(x)$: x vai à praia” definida no conjunto A . Então, a proposição “se faz sol, então alguém vai à praia” traduz-se em linguagem simbólica por $s \rightarrow \exists x, p(x)$; a proposição “se o Pedro e o Paulo vão à praia, então o Manuel vai à praia” traduz-se em linguagem simbólica por $p(t) \wedge p(r) \rightarrow p(s)$, onde t , r e s representam, respectivamente, Pedro, Paulo e Manuel

Negação de proposições com quantificadores.

- $\neg \forall x, p(x) \equiv \exists x, \neg p(x)$;
- $\neg \exists x, p(x) \equiv \forall x, \neg p(x)$.

Funções proposicionais com mais de uma variável. Seja $A=A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$. Uma expressão proposicional (de n variáveis) definida em A é uma expressão $p(x_1, x_2, \dots, x_n)$ tal que para todo $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in A$, $p(a_1, a_2, \dots, a_n)$ é uma proposição.

Uma função proposicional de n variáveis precedida de um quantificador para cada uma das variáveis é uma proposição.

Exemplo. Seja $B=\{1, 2, 3, \dots, 9\}$, e seja a função proposicional $p(x,y)$ definida por “ $x+y=10$ ” em $A=B \times B = B^2$. Então $\forall x \exists y, p(x,y)$ é uma proposição verdadeira. Nota-se que

$$\neg[\forall x, (\exists y, p(x,y))] \equiv \exists x, (\neg(\exists y, p(x,y))) \equiv \exists x, (\forall y, \neg p(x,y)) \equiv \exists x, (\forall y, x+y \neq 10)$$

é uma proposição falsa.

Fórmulas bem-formadas do cálculo de predicado.

Sintaxe.

Os símbolos utilizados no cálculo de predicados são:

Variáveis: x, y, z , etc., eventualmente com índices.

Constantes: a, b, c , etc., eventualmente com índices.

Símbolos de predicados: p, q, r , etc., eventualmente com índices.

Conectivos: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$.

Quantificadores: $\forall, \exists$.

Auxiliares: $()$

Chama-se termo a toda variável ou constante.

Um predicado atômico é toda expressão do tipo $p(t_1, t_2, \dots, t_n)$ de $n \in \mathbb{N}$ variáveis, onde $t_1, t_2, \dots, t_n$ são termos. $\vee, \wedge$ e todo símbolo proposicional são também predicados atômicos

- Todo o predicado atômico é uma fórmula bem-formada.
- Se A e B são fórmulas bem-formadas e x é uma variável, então as expressões seguintes são fórmulas bem-formadas: $(A), A \wedge B, A \vee B, A \rightarrow B, A \leftrightarrow B, \exists x, A, \forall x, A$.

Prioridade dos conectivos lógicos.

Ordem de prioridade	Conectivo lógico
1º	$\neg, \forall, \exists$
2º	$\wedge$
3º	$\vee$
4º	$\rightarrow$
5º	$\leftrightarrow$

Escopo de um quantificador.

- Na fórmula bem-formada $\exists x, A$, diz-se que A é escopo de $\exists x$.
- Na fórmula bem-formada $\forall x, A$, diz-se que A é escopo de $\forall x$.

A ocorrência de uma variável x numa fórmula bem-formada diz-se limitada se ela figurar num quantificador ou estiver no escopo de $\exists x$ ou $\forall x$. Caso contrário, diz-se livre ou muda.

Exemplo. Seja $\exists x, (\forall y, (q(x; y) \rightarrow q(y; z)))$ uma fórmula bem formada num universo qualquer. O escopo de $\exists x$ é $\forall y, (q(x; y) \rightarrow q(y; z))$ e o escopo para $\forall y$ é $q(x; y) \rightarrow q(y; z)$. Nesta fórmula bem-formada as ocorrências das variáveis x e y são limitadas, enquanto que a variável z é livre.

Semântica.

Uma interpretação para uma fórmula bem-formada de predicados consiste em:

Um conjunto $D \neq \emptyset$, chamado domínio, ou universo, da interpretação, juntamente com uma correspondência que associa os símbolos da fórmula bem-formada com os elementos de D , do seguinte modo:

- A cada símbolo de predicado corresponde a uma determinada relação entre os elementos de D ;
- Um predicado sem argumentos é uma proposição e atribui-se-lhe um dos valores V ou F ;
- A cada variável livre faz-se corresponder um elemento de D ;
- A todas as ocorrências livres de uma mesma variável faz-se corresponder o mesmo elemento de D ;
- A cada constante faz-se corresponder um e um só elemento de D ;
- A todas as ocorrências de uma mesma constante faz-se corresponder o mesmo elemento de D .

Exemplo. A fórmula bem-formada $\forall x, p(x)$ é verdadeira para a interpretação $D=\mathbb{N}$ e $p(x): x>0$.

Exemplo. A fórmula bem-formada $\forall x, q(x, a)$ é falsa para a interpretação $D=\mathbb{Z}$ e $q(x, y): x>y$ e $a=7$.

Exemplo. A afirmação “todo papagaio é feio” (na linguagem corrente) pode ser escrita utilizando símbolos da lógica de predicado. Considere a fórmula bem-formada $\forall x, [p(x) \rightarrow q(x)]$ e a interpretação: o universo U é o conjunto de todas as coisas, o predicado $p(x)$: x é papagaio e que o predicado $q(x)$: x é feio. Para esta interpretação, a afirmação acima referida é equivalente à esta fórmula bem-formada.

Observação. A ordem na qual os quantificadores aparecem numa fórmula bem-formada é muito relevante. Uma fórmula bem-formada predicativa pode ter valor lógico verdadeira ou falsa, mas pode não ter valor lógico.

Exemplo. Sejam as fórmulas bem-formadas $\forall x, (\exists y, q(x, y))$ e $\exists x, (\forall y, q(x, y))$. Para o domínio $D=\mathbb{Z}$ e predicado $q(x, y): x>y$, a primeira fórmula bem-formada é verdadeira enquanto que a segunda fórmula bem-formada é falsa.

Uma fórmula bem-formada do cálculo dos predicados diz-se:

Válida ou tautologia se for verdadeira para todas as interpretações.

Exemplo. A fórmula bem-formada $\forall x, p(x) \rightarrow \exists x, p(x)$ é válida, pois em qualquer domínio se $\forall x, p(x)$ é verdadeira, então $\exists x, p(x)$ é verdadeira (recorda-se que uma implicação é falsa se e só se o antecedente é verdadeiro e o consequente falso).

Satisfazível se houver alguma interpretação onde ela é verdadeira;

Exemplo. A fórmula bem-formada $\exists x, p(x) \rightarrow \forall x, p(x)$ não é válida, pois se o universo é $U=\mathbb{Z}$, $p(x)$: x é par, a fórmula bem-formada é falsa para esta interpretação, isto é, quando o antecedente for verdadeiro, o consequente é falso. No entanto é satisfazível, pois é verdadeira para o universo U de todos os números pares e $p(x)$: x é par.

Contraditória, ou contradição, se for falsa para qualquer interpretação.

Uma interpretação diz-se satisfazer uma fórmula bem-formada A se ela a torna verdadeira.

Conclusão

As fórmulas bem-formadas predicativas podem ser válidas, satisfazível ou contraditória. A interpretação de uma fórmula-bem formada predicativa é muito importante para a determinação da sua natureza. Para cada interpretação, uma fórmula bem-formada pode ser verdadeira ou falsa (nesse caso será uma proposição) ou não ter valor da verdade, isto é, o valor da verdade de uma fórmula bem-formada predicativa pode depender da sua interpretação.

Avaliação

1. Seja $A=\{1,2,3,4,5\}$. Determine o valor lógico de cada uma das proposições seguintes:
 - a. $(\forall x \in A)(x+3 < 10)$
 - b. $(\forall x \in A)(x+3 \leq 7)$
 - c. $(\exists x \in A)(x+3=10)$
 - d. $(\exists x \in A)(x+3 < 5)$
2. Determine o valor lógico de cada uma das proposições seguintes, onde o domínio é o conjunto $U=\{1,2,3\}$:
 - a. $\exists x \forall y, x^2 < y+1$
 - b. $\forall x \forall y, x^2 + y^2 < 12$
 - c. $\forall x \exists y, x^2 + y^2 < 12$
3. Expresse as seguintes afirmações na forma de cálculo de predicados, onde o domínio é o conjunto dos números inteiros:
 - a. Se x está entre 1 e 2, e se y está entre 2 e 3, então a diferença entre x e y não pode exceder 2.
 - b. Se x é divisível por 4, então x não pode ser primo.
4. Suponha que o universo do discurso é um grupo de pessoas. Traduza a seguinte afirmação em cálculo de predicado: "Toda a gente aqui fala inglês ou francês".
5. No domínio de todos os animais, como se traduz as seguintes afirmações em cálculo de predicados:
 - a. "Todos os leões são predadores".
 - b. "Só os leões rugem".
 - c. "As aranhas comem insectos".

- d. "Alguns leões vivem em África".
 - e. "Alguns animais comem insectos".
 - f. "As aranhas só comem insectos".
6. Para cada uma das fórmulas bem-formadas abaixo indicadas, ache interpretação na qual seja verdadeira e na qual seja falsa:
- a. $\forall x, [p(x) \rightarrow \exists y, q(x, y)]$.
 - b. $[\forall x, p(x) \rightarrow \forall x, q(x)] \rightarrow \forall x, [p(x) \rightarrow q(x)]$.
 - c. $\forall x, \forall y, [p(x, y) \rightarrow q(x, y)]$.
 - d. $\exists x, [p(x) \wedge \forall y, q(x, y)]$.
7. Verifique se cada uma das fórmulas bem-formadas predicativas é válida, satisfazível ou contraditória:
- a. $\forall x, [p(x) \vee q(x)] \rightarrow \forall x, p(x) \vee \forall x, q(x)$.
 - b. $[\exists x, p(x) \wedge \exists x, q(x)] \rightarrow \exists x, [p(x) \wedge q(x)]$.
 - c. $\forall x, \neg(p(x)) \leftrightarrow \neg[\forall x, p(x)]$.
 - d. $\exists x, p(x) \leftrightarrow \neg[\forall x, \neg(p(x))]$.
 - e. $\forall x, p(x) \vee \exists x, q(x) \rightarrow \forall x, [p(x) \vee q(x)]$.

Atividade 1.3 - Lógica Booleana

Introdução

Em Matemática certas propriedades são aplicadas em contextos diferentes, uma vez que existem estruturas, reguladas por axiomas, e esses axiomas são satisfeitos em circunstâncias diferentes. Estuda-se aqui a Álgebra Booleana que é uma estrutura matemática que sirva de base à lógica proposicional e à teoria de conjuntos (que iremos estudar com mais pormenores na unidade 2).

O isomorfismo entre duas álgebras booleanas é um aspecto importante que ajuda a perceber a semelhança “quase total” entre dois modelos da álgebra booleana que aparentemente são diferentes.

Detalhes da atividade

Álgebra Booleana. Seja B um conjunto no qual são definidas duas operações binárias, que se denota por “+” e por “·”, e uma operação unária, que se denota por “'”. Sejam “0” e “1” dois elementos de B . Uma álgebra booleana é uma estrutura matemática $[B, +, \cdot, 0, 1]$ que satisfaz as seguintes propriedades, para quaisquer x, y, z pertencentes a B :

Propriedade comutativa:

$$(1.a) \quad x+y=y+x;$$

$$(1.b) \quad x \cdot y = y \cdot x$$

Propriedade distributiva:

$$(3.a) \quad x+(y \cdot z)=(x+y) \cdot (x+z);$$

$$(3.b) \quad x \cdot (y+z)=(x \cdot y)+(x \cdot z)$$

Propriedades de identidades:

$$(4.a) \quad x+0=x; \quad (4.b) \quad x \cdot 1=x$$

Propriedades complementativas:

$$(5.a) \quad x+x'=1; \quad (5.b) \quad x \cdot x'=0$$

O elemento “0” denomina-se por zero, o elemento “1” denomina-se por unidade e “x'”, para todo $x \in B$, denomina-se por complemento de “x”. Os resultados das operações “+” e “·” são denominado por soma e produto, respectivamente.

Nota. Por convenção, a menos que se use parênteses, “'” tem prioridade acima de “·” e “·” tem prioridade acima de “+”.

Exemplo. Seja B o conjunto formado pelos números inteiros 0 e 1 (bits). Para todo x, y pertencentes a B define-se as seguintes operações:

$$x+y=\max\{x,y\};$$

$$x \cdot y=\min\{x,y\};$$

$$0'=1;$$

$$1' = 0.$$

$[B, +, \cdot, ', 0, 1]$ é uma álgebra booleana. A demonstração faz-se verificando as 10 propriedades da definição. A laia de exemplo, demonstra-se as propriedades comutativas (adição e multiplicação) e a propriedade distributiva da adição em relação à multiplicação. O resto fica para exercícios.

Comutatividade de "+":

$$0+0=0+0=\max\{0,0\}=0;$$

$$0+1=\max\{0,1\}=\max\{1,0\}=1+0=1;$$

$$1+1=1+1=\max\{1,1\}=1.$$

Comutatividade de "·":

$$0 \cdot 0 = 0 \cdot 0 = \min\{0,0\} = 0;$$

$$0 \cdot 1 = \min\{0,1\} = \min\{1,0\} = 1 \cdot 0 = 0;$$

$$1 \cdot 1 = 1 \cdot 1 = \min\{1,1\} = 1.$$

Distributividade de "+" em relação a "·":

x	y	z	$x + (y \cdot z)$	$(x + y) \cdot (x + z)$
0	0	0	$0 + (0 \cdot 0) = 0 + 0 = 0$	$(0 + 0) \cdot (0 + 0) = 0 \cdot 0 = 0$
0	0	1	$0 + (0 \cdot 1) = 0 + 0 = 0$	$(0 + 0) \cdot (0 + 1) = 0 \cdot 1 = 0$
0	1	0	$0 + (1 \cdot 0) = 0 + 0 = 0$	$(0 + 1) \cdot (0 + 0) = 1 \cdot 0 = 0$
0	1	1	$0 + (1 \cdot 1) = 0 + 1 = 1$	$(0 + 1) \cdot (0 + 1) = 1 \cdot 1 = 1$
1	0	0	$1 + (0 \cdot 0) = 1 + 0 = 1$	$(1 + 0) \cdot (1 + 0) = 1 \cdot 1 = 1$
1	0	1	$1 + (0 \cdot 1) = 1 + 0 = 1$	$(1 + 0) \cdot (1 + 1) = 1 \cdot 1 = 1$
1	1	0	$1 + (1 \cdot 0) = 1 + 0 = 1$	$(1 + 1) \cdot (1 + 0) = 1 \cdot 1 = 1$
1	1	1	$1 + (1 \cdot 1) = 1 + 1 = 1$	$(1 + 1) \cdot (1 + 1) = 1 \cdot 1 = 1$

Conclui-se desta forma que para todo x, y, z pertencentes a B , tem-se $x+(y \cdot z)=(x+y) \cdot (x+z)$.

Exemplo. Seja $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 2$, e seja B_n o conjunto das sequências de n bits. A adição e a multiplicação de dois elementos de B_n faz-se bit por bit, e o complemento de um elemento faz-se bit a bit, de acordo com a adição, a multiplicação e o complemento de bits, vistos no exemplo anterior. Então $[B_n, +, \cdot, ', 0, 1]$ é uma álgebra booleana, onde "0" é uma sequência de n zeros e "1" é uma sequência de n uns.

Exercício. Sejam $a=1100110$, $b=1100101$ pertencentes a B_7 . Calcule $a+b$, $a \cdot b$, a' e b' .

Exemplo. Para todo o conjunto S , o conjunto das partes de S , $P(S)$, com as operações de união, intersecção e complementar constituem uma álgebra booleana, onde $0=\emptyset$ e $1=S$.

Exemplo. Seja B o conjunto das proposições (proposições logicamente equivalentes são vistas como iguais), onde para quaisquer $a, b \in B$, tem-se:

$$a+b=a\vee b, a\cdot b=a\wedge b \text{ e } a'=\neg a.$$

Então, $[B, \vee, \wedge, 0, 1]$ é uma álgebra booleana, onde "0" é uma contradição e "1" é uma tautologia.

Exemplo. Seja $n \in \mathbb{N}$, e seja $B = D_n$, o conjunto dos divisores de n . Para quaisquer $a, b \in D_n$, tem-se:

$$a+b = \text{m.m.c.}(a, b), a \cdot b = \text{m.d.c.}(a, b) \text{ e } a' = n \div a.$$

$[D_n, +, \cdot, 0, 1]$ é uma álgebra booleana, onde o zero, "0", é o número 1 e a unidade, "1", é n .

Exercício. Seja a álgebra booleana $[D_{70}, +, \cdot, 0, 1]$ definida acima. Determine: $x = 35 \cdot (2+7)'$; $y = (35 \cdot 10) + 14'$; $z = (2+7) \cdot (4 \cdot 10)'$.

Dualidade na álgebra booleana. Cada propriedade na álgebra booleana tem o seu dual. O dual de uma propriedade obtém-se a partir desta trocando "+" por "·" e "1" por "0".

Exemplo. O dual de $(a \cdot 1) \cdot (0 + a') = 0$ é $(a + 0) + (1 + a') = 1$.

Princípio de dualidade. Na álgebra booleana, o dual de um teorema é um teorema.

Pode-se deduzir outras propriedades da álgebra booleana a partir das já conhecidas.

Teorema. Seja $[B, +, \cdot, 0, 1]$ uma álgebra booleana arbitrária, e sejam $x, y, z \in B$:

Propriedade idempotente. " $x+x=x$ " e " $x \cdot x=x$ ". Demonstra-se:

$$\begin{aligned} x + x &= (x + x) \cdot 1 && \text{Pela Prop. (4. b)} \\ &= (x + x) \cdot (x + x') && \text{Pela Prop. (5. a)} \\ &= x + (x \cdot x') && \text{Pela Prop. (3. a)} \\ &= x + 0 && \text{Pela Prop. (5. b)} \\ &= x && \text{Pela Prop. (4. a)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x \cdot x &= (x \cdot x) + 0 && \text{Pela Prop. (4. a)} \\ &= (x \cdot x) + (x \cdot x') && \text{Pela Prop. (5. b)} \\ &= x \cdot (x + x') && \text{Pela Prop. (3. b)} \\ &= x \cdot 1 && \text{Pela Prop. (5. a)} \\ &= x && \text{Pela Prop. (4. b)} \end{aligned}$$

Propriedade de limitação. $x+1=1$ e $x \cdot 0=0$.

Propriedade absorvente. $x+(x \cdot y)=x$ e $x \cdot (x+y)=x$.

Propriedade associativa. $(x+y)+z=x+(y+z)$ e $(x \cdot y) \cdot z=x \cdot (y \cdot z)$.

Exercícios. Prove as propriedades B., C. e D.

Teorema de unicidade de complemento. Seja $[B, +, \cdot, 0, 1]$ uma álgebra booleana. Se para todo $x \in B$, e existe um elemento $x_1 \in B$ tal que $x + x_1 = 1$ e $x \cdot x_1 = 0$, então $x_1 = x'$.

Outras propriedades. Numa álgebra booleana $[B, +, \cdot, 0, 1]$, para todo x, y, z pertencentes a B , tem-se:

Propriedade involutiva. $(x')' = x$.

$0' = 1$ e $1' = 0$.

Propriedade de DeMorgan. $(x+y)' = x' \cdot y'$ e $(x \cdot y)' = x' + y'$.

Isomorfismo de álgebras booleanas. Sejam $[B, +, \cdot, 0, 1]$ e $[C, \&, *, 0, 1]$ duas álgebras booleanas. Uma função $f: B \rightarrow C$ é um isomorfismo destas álgebras booleanas se f é bijectiva (injectiva e sobrejectiva) e para todo x, y pertencentes a B tem-se:

- $f(x+y) = f(x) \& f(y)$;
- $f(x \cdot y) = f(x) * f(y)$;
- $f(x') = (f(x))'$.

Teorema de álgebras booleanas finitas. Seja uma álgebra booleana com n elementos ($n \in \mathbb{N}$). Se existe um número natural m tal que $2^m = n$, então essa álgebra booleana é isomorfa a uma álgebra booleana cujos elementos são partes de um conjunto S com m elementos, com as operações de reunião, intersecção e complementar.

Exemplo. Seja $B = \{0, 1, a, b\}$. A adição (+), a multiplicação ($\cdot$) e o complemento (') dos elementos de B , são conforme as tabelas que se seguem:

+	0	1	a	b
0	0	1	a	b
1	1	1	1	1
a	a	1	a	1
b	b	1	1	b

$\cdot$	0	1	a	b
0	0	0	0	0
1	0	1	a	b
a	0	a	a	0
b	0	b	0	b

'	
0	1
1	0
a	b
b	a

Seja $S = \{x_1, x_2\}$. Então as álgebras booleanas $[B, +, \cdot, 0, 1]$ e $[P(S), \cup, \cap, \emptyset, S]$ são isomorfas. Neste caso, o isomorfismo $f: B \rightarrow P(S)$ define-se como se segue:

- $f(0) = \emptyset$;
- $f(1) = S$;
- $f(a) = \{x_1\}$;
- $f(b) = \{x_2\}$.

A maneira como se definiu a função f , não deixa dúvida que f é:

- Injectiva, isto é, objetos diferentes correspondem à imagens diferentes;
- Sobrejectiva, isto é, o conjunto das imagens de f coincide com o conjunto de chegada.

No entanto, é necessário mostrar que f satisfaz as propriedades 1., 2. e 3. Como o domínio é finito e conhece-se a imagem de cada objeto, pode-se verificar estas propriedades analisando todos os casos possíveis. Por exemplo, para a propriedade 1., pode-se proceder da seguinte forma:

x	y	$f(x + y)$	$f(x) \cup f(y)$	x	y	$f(x + y)$	$f(x) \cup f(y)$
0	0	$f(0) = \emptyset$	$\emptyset \cup \emptyset = \emptyset$	1	0	$f(1) = S$	$S \cup \emptyset = S$
0	1	$f(1) = S$	$\emptyset \cup S = S$	1	1	$f(1) = S$	$S \cup S = S$
0	a	$f(a) = \{x_1\}$	$\emptyset \cup \{x_1\} = \{x_1\}$	1	a	$f(1) = S$	$S \cup \{x_1\} = S$
0	b	$f(b) = \{x_2\}$	$\emptyset \cup \{x_2\} = \{x_2\}$	1	b	$f(1) = S$	$\emptyset \cup \{x_2\} = S$

x	y	$f(x + y)$	$f(x) \cup f(y)$	x	y	$f(x + y)$	$f(x) \cup f(y)$
a	0	$f(a) = \{x_1\}$	$\{x_1\} \cup \emptyset = \{x_1\}$	b	0	$f(b) = \{x_2\}$	$\{x_2\} \cup \emptyset = \{x_2\}$
a	1	$f(1) = S$	$\{x_1\} \cup S = S$	b	1	$f(1) = S$	$\{x_2\} \cup S = S$
a	a	$f(a) = \{x_1\}$	$\{x_1\} \cup \{x_1\} = \{x_1\}$	b	a	$f(1) = S$	$\{x_2\} \cup \{x_1\} = S$
a	b	$f(1) = S$	$\{x_1\} \cup \{x_2\} = S$	b	b	$f(b) = \{x_2\}$	$\{x_2\} \cup \{x_2\} = \{x_2\}$

São 16 casos. Para a multiplicação, também será 16 casos. Já para complemento será 4 casos. Estes dois últimos casos ficam como exercícios.

Nota. Álgebras booleanas isomorfas são praticamente iguais, diferenciam-se apenas pelos nomes dos seus elementos e das suas operações.

Ordem na álgebra booleana. Uma relação $\leq$ num conjunto S diz-se uma ordem parcial se:

Para todo $a \in S$, $a \leq a$;

Para quaisquer $a, b \in S$, se $a \leq b$ e $b \leq a$, então $a = b$;

Para quaisquer $a, b, c \in S$, se $a \leq b$ e $b \leq c$, então $a \leq c$.

Neste caso, o conjunto S associado à ordem parcial, diz-se conjunto parcialmente ordenado. Se $a, b \in S$ e $a \leq b$, diz-se que " a " é um antecessor, ou predecessor, de " b ".

Escreve-se também:

$a \leq b$, se $a \leq b$ e $a \neq b$;

$a \geq b$, se $b \leq a$;

$a > b$, se $b \leq a$.

Sucessor imediato. Um elemento $b \in S$ é um sucessor imediato de um elemento $a \in S$, se $a \leq b$ e não há elemento $x \in S$ tal que, $a \leq x \leq b$.

Dois elementos a e b dizem-se não comparáveis se a e b não estão em relação.

Teorema. Seja $[B, +, \cdot, 0, 1]$ uma álgebra booleana arbitrária. Então B é um conjunto parcialmente ordenado pela ordem:

$$a \leq b \Leftrightarrow a + b = b, a, b \in B.$$

Exemplo. Seja B a colecção de subconjuntos de um conjunto S . B com as operações de união, intersecção e complemento, é uma álgebra booleana com zero igual ao conjunto vazio e unidade igual ao conjunto S . Nesta álgebra booleana um conjunto A precede um conjunto B se $A \subseteq B$, ou seja, $A \cup B = B$.

Conclusão

O Conceito da álgebra booleana é de suma importância, uma vez que permite determinar objectos matemáticos com as mesmas propriedades. Álgebras booleanas isomorfas diferenciam-se apenas pelos nomes dos seus elementos e das suas operações. Toda álgebra booleana com n elementos e $n = 2^m$, para algum $m \in \mathbb{N}$, é isomorfa com uma álgebra booleana cujos elementos são as partes dum conjunto S com m elementos, com as operações de reunião, intersecção e complementar. Os elementos de uma álgebra booleana são parcialmente ordenados, ou seja, $a \leq b$ se e só se $a + b = b$.

Avaliação

- Seja $S = \{0, 1\}$. Então $S^2 = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$. Considera o conjunto B composto por todas as funções definidas de S^2 para S . Para todo $f_1, f_2 \in B$, para todo $(x, y) \in S^2$, tem-se:

$$(f_1 + f_2)(x, y) = \max\{f_1(x, y), f_2(x, y)\}, (f_1 \cdot f_2)(x, y) = \min\{f_1(x, y), f_2(x, y)\},$$

$$f_1'(x, y) = 1 \text{ se } f_1(x, y) = 0 \text{ e } f_1'(x, y) = 0 \text{ se } f_1(x, y) = 1.$$
 - Suponha que $f_1(x, y) = 1$ se $x = y$, $f_1(x, y) = 0$ se $x \neq y$; $f_2(x, y) = 1$ se $x = 0$ e $f_2(x, y) = 0$ se $x = 1$. Determine $f_1 + f_2$; f_1' ; f_2' e $f_1 \cdot f_2$.
 - Mostre que $[B, +, \cdot, 0, 1]$ é uma álgebra booleana, onde 0 é a função contante nula, isto é, para todo $(x, y) \in S^2$, $0(x, y) = 0$, e 1 é a função constante, tal que para todo $(x, y) \in S^2$, $1(x, y) = 1$.
- Seja $[B, +, \cdot, 0, 1]$ uma álgebra booleana arbitrária. Para todo x, y pertencentes a B , define-se uma nova operação $\oplus$ tal que:

$$x \oplus y = x \cdot y' + y \cdot x'.$$
 Mostre que, para todo x, y pertencentes a B :

a. $x \oplus y = y \oplus x$;

b. $x \oplus x = 0$;

c. $0 \oplus x = x$;

d. $1 \oplus x = x'$.

3. Seja $[B, +, \cdot, 0, 1]$ uma álgebra booleana arbitrária. Prove que para quaisquer elementos x, y, z pertencentes a B , então:

a. $(x+y) \cdot (x'+y) = y$;

b. $(x+y) \cdot (y \cdot x') = x+y$;

c. $x+y' = x + (x' \cdot y + x \cdot y)'$.

Resumo da Unidade

Relativamente às proposições você estudou: os conectivos lógicos, tabela de verdade (equivalência lógica) e fórmulas bem-formadas (tautologia, contradição e contingência).

No que concerne aos predicados abordou-se : quantificadores, funções proposicionais com mais de uma variável, fórmulas bem-formadas de cálculo de predicados (satisfazível e contraditória).

No que tange a Álgebra Booleana você estudou o princípio de dualidade na Álgebra Booleana, Álgebras Booleanas isomorfas e ordem na Álgebra Booleana.

Avaliação da Unidade

Verifique a sua compreensão!

Testes Sumativo - Lógica proposicional e de predicados; lógica booleana.

Instruções

O teste tem dez questões, e cada uma vale dez pontos. Deve apresentar todos os cálculos e todos os fundamentos que sustentam as resoluções feitas. O teste deve ser resolvido em duas horas.

CrITÉRIOS de Avaliação

São dez questões e cada uma delas vale 20 pontos, totalizando 200 pontos.

Escala de avaliação:

Insuficiente: 0 a 100 (exclusivo);

Suficiente: 100 a 140 (exclusivo);

Bom: 140 a 170 (exclusivo);

Muito bom: 170 a 200.

O aluno com Suficiente, Bom e Muito Bom considera-se com nível de conhecimentos suficientes para obter aprovação nesta unidade.

Avaliação

1. Traduza a seguinte proposição para a notação simbólica:
 “Sempre que violetas são azuis, as rosas são vermelhas e o açúcar é doce.”
2. Construa a tabela-verdade para cada uma das seguintes fórmulas bem-formadas. Diga se é uma tautologia, uma contradição ou uma contingência:
 - a. $(A \rightarrow B) \leftrightarrow \neg A \vee B$;
 - b. $(A \vee \neg B) \wedge \neg (A \wedge B)$.
3. Verifique se cada uma das fórmulas bem-formadas predicativas é válida, satisfazível ou contraditória:
 - a. $A(a) \rightarrow \exists x, A(x)$;
 - b. $\forall x, \neg A(x) \leftrightarrow \neg [\forall x, A(x)]$;
 - c. $\forall x, A(x) \leftrightarrow \neg (\exists x, \neg A(x))$.
4. Para cada uma das fórmulas bem-formadas abaixo indicadas, ache uma interpretação na qual seja verdadeira e na qual seja falsa:
 - a. $\forall x, \forall y, [P(x, y) \rightarrow P(y, x)]$;
 - b. $\exists x, [A(x)] \wedge \forall y, B(x, y)$.
5. Seja $[B, +, \cdot, 0, 1]$ uma álgebra booleana arbitrária. Prove que $\forall x, y, z \in B$ tem-se:
 $(x+y') \cdot z = [(x'+z') \cdot (y+z')]'$.
6. Considere a álgebra booleana $[B, +, \cdot, 0, 1]$, onde B é o conjunto de todas as funções do conjunto $\{0,1\} \times \{0,1\}$ ao conjunto $\{0,1\}$. Define-se as operações “+”, “ $\cdot$ ” e “'” como o que se segue:
 $\forall f_1(x,y), f_2(x,y) \in B, \forall (x,y) \in \{0,1\} \times \{0,1\}$
 $(f_1 + f_2)(x,y) = \max\{f_1(x,y), f_2(x,y)\}, (f_1 \cdot f_2)(x,y) = \min\{f_1(x,y), f_2(x,y)\},$
 $f_1'(x,y) = 1 \text{ se } f_1(x,y) = 0 \text{ e } f_1'(x,y) = 0 \text{ se } f_1(x,y) = 1.$
 - a. Defina um isomorfismo entre B e o conjunto $P(S)$, onde $S = \{1, 2, 3, 4\}$.

Leituras e outros Recursos

As leituras e outros recursos desta unidade encontram-se na lista de Leituras e Outros Recursos do curso.

Unidade 2. Conjunto e Cálculo Combinatório

Introdução à Unidade

Na Ciência de Computação muitos conceitos são expressos em linguagens de conjuntos. Os conjuntos finitos e numeráveis ganham especial interesse, pois na Ciência de Computação trabalha-se mais com estes tipos de conjuntos. Estuda-se as operações binárias e unárias em um conjunto, com intuito de verificar se um conjunto associado às operações nele definidas formam uma estrutura algébrica.

A análise combinatória estudada nesta unidade é muito importante em ambientes onde se trabalha com conjunto finitos, pois é um conjunto de ferramentas utilizadas para determinar o número de elementos de um determinado conjunto formado por uma determinada condição (medição da eficiência de um algoritmo, é um exemplo de aplicação prática).

Objetivos da Unidade

Após a conclusão desta unidade, deverá ser capaz de:

1. Operar com conjuntos (união, intersecção, complemento, diferença e produto cartesiano).
2. Demonstrar a veracidade de uma propriedade, aplicando propriedades gerais.
3. Resolver problemas, aplicando propriedades de número de elementos de conjuntos finitos.
4. Resolver problemas de contagem, aplicando Princípio da Casa do Pombo, Princípio de Inclusão e de Exclusão, Princípio da Multiplicação, arranjo e combinação.
5. Desenvolver a potência de um binómio.

Termos-chave

Conjunto: é uma coleção não ordenada de objectos (de natureza qualquer).

Dual de uma expressão: Seja E uma expressão envolvendo conjuntos, num universo U, e suas operações. Dual de E é uma expressão E^* que se obtém de E substituindo cada ocorrência de U, $\cap$, $\cup$ e $\emptyset$, por $\cap$, $\cup$, $\emptyset$ e U, respectivamente.

Coefficiente binomial: O símbolo $\binom{n}{r}$, onde $r, n \in \mathbb{N}_0$ e $r \leq n$, define-se por

$$\binom{n}{r} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-r+1)}{r!}$$

Princípios de contagem: são regras que se podem aplicar para resolver determinados problemas de contagem.

Combinação: Combinação de n elementos p a p é o número $n!/(p!(n-p)!)$

Permutação: Permutação de n elementos p a p é o número $n!/((n-p)!)$

Actividades de Aprendizagem

Actividade 1.1 - Conjuntos: operações e igualdades

Introdução

Conjuntos e suas operações são fundamentais em áreas de computação, pois nesta área quase sempre trabalha-se na base de conjuntos (base de dados, por exemplo) .

Pretende-se com esta actividade introduzir a noção de conjunto, algumas das suas operações e respectivas propriedades.

A introdução do conceito de operação (binária e unária) em conjunto, serve de base para compreensão dos outros conteúdos desenvolvidos neste módulo.

Como o computador trabalha com conjunto finitos, explora-se aqui esta noção, com destaque para o cálculo do número de elementos de um conjunto finito.

Detalhes da actividade

Conjunto. Conjunto é uma colecção não ordenada de objectos (de natureza qualquer).

Representação. Para representar um conjunto utiliza-se letras maiúsculas (A, B, C, D, etc.) e os seus elementos por letras minúsculas (x, y, z, a, b, c, etc.). Se um objecto a está num conjunto A , escreve-se $a \in A$, se não, escreve-se $a \notin A$. Um objecto dum conjunto chama-se elemento, ou membro, desse conjunto. O conjunto que não tem nenhum elemento, denomina-se por conjunto vazio, e representa-se por $\emptyset$. Geralmente numa determinada aplicação de teoria de conjuntos, os elementos de todos os conjuntos em estudo, pertencem a um determinado conjunto, que se chama conjunto universo.

Conjunto finito e infinito. Um conjunto diz-se finito se ele contém n objectos diferentes, onde $n \in \mathbb{N}$; caso contrário o conjunto diz-se infinito.

É possível descrever conjunto de três maneiras diferentes:

- Pode listar os seus elementos, um a um (possível para conjuntos finitos; óptimo para conjuntos finitos e pequenos). Isto é, para todo $n \in \mathbb{N}$, se $a_1, a_2, \dots, a_n$ são elementos do conjunto A , então escreve-se $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$;
- Através da definição de uma propriedade que determina os seus elementos - usa-se chavetas para delimitar o conjunto.
- Através da sua representação gráfica.

Exemplo. Seja A o conjunto dos números inteiros positivos menores que 7. Então:

- $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$;
- $A = \{x \in \mathbb{N} : x < 7\}$.

Exercícios. Escreva os elementos dos seguintes conjuntos:

- $A = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ é par e } x < 15\}$;
- $B = \{x \in \mathbb{N} : x + 4 = 3\}$.

Subconjunto. Sejam A, B conjuntos. Se para cada $a \in A$, então $a \in B$, diz-se que A é um subconjunto de B , e escreve-se $A \subseteq B$ (lê-se A contido ou igual a B), ou $B \supseteq A$ (lê-se B contém ou igual a A). Nota-se que para todo conjunto A , A é subconjunto de si próprio e o conjunto vazio é subconjunto de A ; então A e $\emptyset$ dizem-se subconjuntos impróprios de A . Subconjuntos de A que não são impróprios dizem-se subconjuntos próprios. Se A é um subconjunto de B e $A \neq B$ escreve-se $A \subset B$ (lê-se A contido em B), ou $B \supset A$ (lê-se B contém A).

Propriedades. Sejam A, B e C conjuntos de um certo universo U . Então:

- $\emptyset \subseteq A \subseteq U$;
- $A \subseteq A$;

- Se $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$, então $A \subseteq C$.

Igualdade de conjuntos. Sejam A e B conjuntos. A e B são iguais ou idênticos se tiverem os mesmos elementos, isto é,

$$A=B \Leftrightarrow A \subseteq B \text{ e } B \subseteq A.$$

Conjunto cujo elementos são conjuntos. Seja $A=\{\{1,3,5,7\},\{2,4,6\}\}$ um conjunto. Os seus elementos são:

- $\{1,3,5,7\}$, isto é, conjunto dos números inteiros positivos ímpares menores que 8;
- $\{2,4,6\}$, isto é, conjunto dos números inteiros positivos pares menores que 8.

Conjunto das partes. Para todo o conjunto A , existe um conjunto, denominado por conjunto das partes, que se denota por 2^A , ou $P(A)$, cujos elementos são os subconjuntos de A , ou seja,

$$B \in 2^A \Leftrightarrow B \subseteq A.$$

Teorema. Seja A um conjunto finito, com $n \in \mathbb{N}$ elementos, num universo arbitrário U . Então o conjunto 2^A tem 2^n elementos.

Exemplo. Seja $A=\{2,4,6\}$. Então

$$2^A = \{\emptyset, A, \{2\}, \{4\}, \{6\}, \{2,4\}, \{2,6\}, \{4,6\}\}.$$

Operações com conjuntos. Sejam A e B conjuntos.

- Intersecção de conjuntos A e B , escreve-se $A \cap B$, é o conjunto composto por elementos x tais que $x \in A$ e $x \in B$.

$$A \cap B = \{x: x \in A \text{ e } x \in B\}.$$

Se $A \cap B = \emptyset$, diz-se que A e B são disjuntos.

- União de conjuntos A e B , escreve-se $A \cup B$, é o conjunto composto por elementos x tais que x pertence a pelo menos um dos dois conjuntos, A , B , isto é, $x \in A$ ou $x \in B$.

$$A \cup B = \{x: x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$

- Complementar de um conjunto. Seja A um conjunto arbitrário de um universo U . Complementar de A , representa-se por A^c (ou A' ou $\neg A$), é o conjunto cujos elementos pertencem a U , mas não pertencem a A .

$$A^c = \{x: x \in U \text{ e } x \notin A\}.$$

- Diferença de conjuntos. Sejam A e B conjuntos dum universo U. Diferença de A e B, denota-se $A \setminus B$ ou $A - B$, é o conjunto cujos elementos pertencem ao conjunto A, mas não pertencem ao conjunto B.

$$A \setminus B = \{x: x \in A \text{ e } x \notin B\}.$$

Exemplo. Sejam os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{2, 4, 6, 8\}$ e $C = \{3, 4, 5, 6\}$, no universo $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Então:

- $B \cup A = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$;
- $A \cap C = \{3, 4\}$;
- $A \setminus C = \{1, 2\}$;
- $B \setminus C = \{2, 8\}$.

Teorema. Sejam A e B conjuntos dum universo U. Se $A \subseteq B$, então:

$$A \cap B = A \text{ e } A \cup B = B.$$

Teorema. Sejam A, B, C conjuntos dum universo U. Então:

1. Propriedades Idempotente: $A \cup A = A$; $A \cap A = A$.
2. Propriedades Associativa: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$; $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.
3. Propriedades comutativa: $A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$.
4. Propriedades distributiva: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$; $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
5. Elementos neutro: $A \cup \emptyset = A$; $A \cap U = A$.
6. Elementos absorvente: $A \cup U = U$; $A \cap \emptyset = \emptyset$.
7. Propriedade Involutiva: $\llbracket (A \setminus C) \rrbracket^c = A$.
8. Propriedades de Complemento: $A \cup A^c = U$; $A \cap A^c = \emptyset$; $U^c = \emptyset$; $\emptyset^c = U$.
9. Leis de DeMorgan: $\llbracket (A \cup B) \rrbracket^c = A^c \cap B^c$; $\llbracket (A \cap B) \rrbracket^c = A^c \cup B^c$.

Princípio de dualidade. Seja E uma expressão envolvendo conjuntos, num universo U, e suas operações. Dual de E é uma expressão E^* que se obtém de E substituindo cada ocorrência de $\cup, \cap, U$ e $\emptyset$, por $\cap, \cup, \emptyset$ e U, respectivamente.

Teorema. Seja E uma expressão envolvendo conjuntos, num universo U, e suas operações. Se E é um teorema, então o seu dual E^* é um teorema.

Exercícios. Aplicando as propriedades de operações com conjuntos, prove as seguintes propriedades, para quaisquer conjuntos A, B dum universo U:

A. $A \cap (A \cup B)$; $A \cup (A \cap B)$ - Lei de absorvência.

$$\begin{aligned} A \cup (A \cap B) &= (A \cap U) \cup (A \cap B) && \text{Elemento neutro} \\ &= A \cap (U \cup B) && \text{Prop. Distributiva} \\ &= A \cap (B \cup U) && \text{Prop. Comutativa} \\ &= A \cap U && \text{Elemento Neutro} \\ &= A && \text{Elemento Neutro} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A \cap (A \cup B) &= (A \cup \emptyset) \cap (A \cup B) && \text{Elemento neutro} \\ &= A \cup (\emptyset \cap B) && \text{Prop. Distributiva} \\ &= A \cup (B \cap \emptyset) && \text{Prop. Comutativa} \\ &= A \cup \emptyset && \text{Elemento Neutro} \\ &= A && \text{Elemento Neutro} \end{aligned}$$

B. $(A \cup B) \cap (A \cup B)^c = A$; $(A \cap B) \cup (A \cap B)^c = A$.

C. $(B^c \cap U) \cap (A^c \cup \emptyset) = [(A \cup B)]^c$. Indique o seu dual.

Número de elemento num conjunto finito. Seja A um conjunto finito num universo U. $n(A)$ representa o número de elementos diferentes de A.

Teorema. Sejam A, B conjuntos finitos num universo U. Então $A \cup B$ e $A \cap B$ são conjuntos finitos e:

1. $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$, logo
2. $n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B)$.

Consequência. Se A e B são disjuntos, então $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$.

A partir deste teorema pode-se deduzir o seguinte:

Teorema. Sejam A, B, C conjuntos finitos num universo U. Então $A \cup B \cup C$ é finito e:

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C).$$

Pois:

$$\begin{aligned} n(A \cup B \cup C) &= n[(A \cup B) \cup C] \\ &= n(A \cup B) + n(C) - n[(A \cup B) \cap C] \\ &= n(A) + n(B) - n(A \cap B) + n(C) - [(A \cap C) \cup (B \cap C)] \\ &= n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - [n(A \cap C) + n(B \cap C) - n((A \cap C) \cap (B \cap C))] \\ &= n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

Nota. Nota-se que para quaisquer A, B num universo U, tem-se:

1. $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$
2. $B = (A \cap B) \cup (B \setminus A)$.

Então como A e $B \setminus A$ são disjuntos tem-se:

$$1. n(A \cup B) = n(A) + n(B \setminus A).$$

Como também $A \cap B$ e $B \setminus A$ são disjuntos tem-se:

$$2. n(B) = n(A \cap B) + n(B \setminus A).$$

Desta feita, tem-se:

$$n(B \setminus A) = n(B) - n(A \cap B).$$

Nota. Se $A \subseteq B$, então $n(A \cup B) = n(B)$ e $n(A \cap B) = n(A)$.

Exercícios. Resolva os seguintes problemas aplicando as propriedades de número de elementos de conjuntos finitos:

1. De 32 pessoas que recolhem papéis ou garrafas para reciclagem, sabe-se que 30 pessoas recolhem papéis e que 14 pessoas recolhem garrafas. Determine:

- O número de pessoas que recolhe papéis e garrafas;
- O número de pessoas que recolhe só papéis;
- O número de pessoas que recolhe só garrafas.

Resolução. Sejam A o conjunto de pessoas que recolhem papéis e B o conjunto de pessoas que recolhem garrafas.

- $n(A \cap B)$ dá o número de pessoas que recolhem papéis e garrafas.
 $n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B) = 30 + 14 - 32 = 12.$
- $n(A \setminus B)$ dá o número de pessoas que recolhem só papéis.
 $n(A \setminus B) = n(A) - n(A \cap B) = 30 - 12 = 18.$
- $n(B \setminus A)$ dá o número de pessoas que recolhem só garrafas.
 $n(B \setminus A) = n(B) - n(A \cap B) = 14 - 12 = 2.$

2. Suponha que numa universidade, 100 dos 120 estudantes de Ciências de Computação estudam pelo menos uma das três línguas: portuguesa, francesa e inglesa. Suponha também que: 65 estudam a língua francesa; 45 estudam a língua portuguesa; 42 estudam a língua inglesa; 20 estudam as línguas francesa e portuguesa; 25 estudam as línguas francesa e inglesa; 15 estudam as línguas portuguesas e inglesas.
 - a. Determine o número de estudantes que estudam simultaneamente as 3 línguas;
 - b. Determine o número de estudantes que estudam exactamente uma língua; e o número de estudantes que estudam exactamente duas línguas.

Produto cartesiano de conjuntos. Sejam A e B conjuntos. Produto cartesiano destes conjuntos é o conjunto

$$A \times B = \{(a,b): a \in A \text{ e } b \in B\}.$$

Exemplo. Sejam $A = \{1,2,3\}$ e $B = \{a,b\}$. Então:

$$A \times B = \{(1,a), (1,b), (2,a), (2,b), (3,a), (3,b)\}.$$

Propriedade. Sejam A e B conjuntos finitos. Então $A \times B$ é finito e

$$n(A \times B) = n(A) \cdot n(B).$$

Operação binária num conjunto. Seja S um conjunto arbitrário. Diz-se que a operação “ $*$ ” é binária em S , se para todo $x, y \in S$, $x * y$ é único e pertence a S . Neste caso, diz-se que o conjunto S é fechado para a operação “ $*$ ”.

Exemplo. A adição usual, “ $+$ ” é uma operação binária no conjunto $\mathbb{N}$, pois a soma de dois números naturais é um número natural. Contudo a subtração usual, “ $-$ ”, não é uma operação binária em $\mathbb{N}$, pois, por exemplo, $1, 2 \in \mathbb{N}$, mas $1 - 2 = -1 \notin \mathbb{N}$.

Operação unária num conjunto. Seja S um conjunto arbitrário. Uma operação “ $''$ ” é unária em S , se para todo $x \in S$, x'' é único e pertence a S .

Exemplo. A operação complementar de um conjunto é uma operação unária, no conjunto 2^A , para todo conjunto A do universo qualquer.

Exercícios. Diga, justificando, se cada uma das seguintes operações, no conjunto S indicado, é unária, binária ou nem uma nem outra:

a. $x * y = x \div y, x, y \in S = \mathbb{Q}.$

b. $P * Q = P \cup Q; P, Q \in S = 2^A.$

c. $x'' = \sqrt{x}, x \in S = \mathbb{R}^+.$

Conclusão

Um conjunto por si só tem pouco interesse para estudos, há que conhecer as operações nele definidas, como são as operações binárias e unárias.

As operações com conjuntos num dado universo, obedecem à várias propriedades, com muito interesse para estudos a lógica de programação e não só.

O estudo de número de elementos de conjuntos finitos obedecem propriedades fundamentais na resolução de problemas na área de informática e nas outras áreas de estudos.

Avaliação

1. Indique os elementos dos seguintes conjuntos, no universo Z (conjunto dos números inteiros relativos):
 - a. A : conjunto composto pelos números entre 3 e 12.
 - b. B : conjunto composto pelos números não negativos menores que 15.
 - c. Determine: $A \cup B$; $A \cap B$; A' e B' .
2. Sejam os seguintes conjuntos

$$A = \{x: x \in \mathbb{N} \text{ e } 1 < x < 50\};$$

$$B = \{x: x \in \mathbb{R} \text{ e } 1 < x < 50\};$$

$$C = \{x: x \in \mathbb{Z} \text{ e } |x| \geq 25\}.$$
 - a. Quais das afirmações são verdadeiras:
 1. $A \subseteq B$;
 2. $\emptyset \subseteq B$;
 3. $\{x: x \in \mathbb{Z} \text{ e } x^2 \geq 625\} \subseteq C$;
 4. $\{0, 1, 2\} \subseteq A$.
 5. $A \subseteq C$.
3. Cem estudantes foram questionados acerca das três áreas, Matemática, Informática e Física, que pretendem frequentar os estudos. Os resultados foram os seguintes: 45 pretendem Matemática; 38 pretendem Informática; 21 pretendem Física; 18 pretendem Matemática e Informática; 9 pretendem Matemática e Física; 4 pretendem Informática e Física e 23 não pretendem nenhuma destas três áreas.
 - a. Determine o número de estudantes que pretendem frequentar curso:
 - i. Em exactamente uma área de estudos;
 - ii. Em exactamente duas áreas de estudos.
4. Escreva o dual da seguinte expressão: $\overline{((A \cap U))} \wedge c \cap A = \emptyset$.
5. Demonstre a seguinte propriedade: $A = (B \wedge c \cup A) \cap (A \cup B)$.
6. Demostre a propriedade que se segue, e indique o seu dual:

$$[A \cup (B \cap C)] \cap ([A' \cup (B \cap C)] \cap (B \cap C)') = \emptyset.$$
7. Determine o conjunto 2^A , onde $A = \{1, 2, 3, 4\}$.
8. Sabendo que $P(A) = \{\emptyset, \{x\}, \{y\}, \{x, y\}\}$.

9. Diga, justificando, se as seguintes operações são binárias ou unárias nos conjuntos indicados?
- i. $x*y=x+4$, onde $x,y \in \mathbb{N}$;
 - ii. $x*y=x+y-3$, onde $x,y \in \mathbb{N}$;
 - iii. $x''=\ln(x)$, onde $x \in \mathbb{R}$;
 - iv. $x''=x^2$, onde $x \in \mathbb{Z}$.

Actividade 1.2 - Contagem

Introdução

Apresenta-se aqui alguns princípios de contagem, com várias aplicações na resolução de problemas. Desta feita, algumas actividades apresentadas visam a interiorização desses princípios, enquanto que outras actividades consistem na resolução de problemas.

Detalhes da atividade

Princípio Fundamental de Contagem. Se um determinado evento pode ocorrer de n_1 maneiras diferentes, e se, a seguir a esse evento, um segundo evento pode ocorrer de n_2 maneiras diferentes, e se, a seguir a esse segundo evento, um terceiro evento pode ocorrer de n_3 maneiras diferentes, ..., então o número de maneiras que esses eventos podem ocorrer na ordem indicada é:

$$n_1 \times n_2 \times n_3 \times \dots$$

Exemplo.

A uma criança é permitida escolher uma entre dois confeitos, um vermelho e outro preto, e um entre três pastilhas elástica, amarelo, lilás e branco. Quantos conjuntos de doces diferentes a criança pode ter?

Resolução. Pelo Princípio Fundamental de Contagem, a resposta é:

$$3 \times 2 = 6,$$

pois são dois eventos seguidos, o primeiro com 3 possibilidades, e o segundo com duas possibilidades. A tabela que se segue ajuda a compreender o resultado:

Confeitos	Pastilhas Elásticas	Escolhas Possíveis
V	A	{V, A}
V	L	{V, L}
V	B	{V, B}
P	A	{P, A}
P	L	{P, L}
P	B	{P, B}

V - VERMELHO; **P** - PRETO, **A** - AMARELO, **L** - LILÁS, **B** - BRANCO

Quantos números de quatro dígitos começam com 4 ou com 5?

Resolução. Para a primeira posição há duas possibilidades e para as restantes dez possibilidades cada, pelo que a resposta é:

$$2 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 2000.$$

Quantos números pares, maiores ou igual a 100 e menores que 999, existem?

Exercícios.

- Quantos números de 4 dígitos existem?
- De quantas maneiras diferentes se pode escolher 3 funcionários num grupo de 25?

Princípio de inclusão e de exclusão. Dados os conjuntos $A_1, A_2, \dots, A_n$, com $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 2$, tem-se:

$$\begin{aligned}
 n(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n) \\
 = \sum_{1 \leq i \leq n} n(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} n(A_i \cap A_j) + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} n(A_i \\
 \cap A_j \cap A_k) - \dots + \\
 + (-1)^{n-1} \cdot n(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n).
 \end{aligned}$$

|

Casos particulares.

- $n = 2$ (visto na actividade anterior)

$$n(A_1 \cup A_2) = n(A_1) + n(A_2) - n(A_1 \cap A_2).$$

- $n = 3$ (visto na actividade anterior)

$$n(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = n(A_1) + n(A_2) + n(A_3) - n(A_1 \cap A_2) - n(A_1 \cap A_3) - n(A_2 \cap A_3) + n(A_1 \cap A_2 \cap A_3).$$

- $n = 4$

$$n(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) = n(A_1) + n(A_2) + n(A_3) + n(A_4) - n(A_1 \cap A_2) - n(A_1 \cap A_3) - n(A_1 \cap A_4) - n(A_2 \cap A_3) - n(A_2 \cap A_4) - n(A_3 \cap A_4) + n(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + n(A_1 \cap A_2 \cap A_4) + n(A_1 \cap A_3 \cap A_4) - n(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4).$$

Exercício. Encontre a equação do Princípio de Inclusão e de Exclusão, para $n=5$.

Exercício (**Aplicação do Princípio de Inclusão e de Exclusão**).

- Uma quitanda vende apenas brócolis, cenoura e quiabo. Num determinado dia, a quitanda atendeu 208 pessoas. Sabendo que 114 pessoas compraram apenas brócolis, 152 pessoas compraram cenouras, 17 pessoas compraram quiabos, 64 pessoas compraram brócolis e cenouras, 12 pessoas compraram cenouras e quiabos, e 9 pessoas compraram todos os três, quantas pessoas compraram brócolis e quiabo?

Resolução.

Sejam:

- A_1 o conjunto de pessoas que compraram brócolis;
- A_2 o conjunto de pessoas que compraram cenoura;
- A_3 o conjunto de pessoas que compraram quiabo.

Então: $n(A_1)=114$; $n(A_2)=152$; $n(A_3)=17$; $n(A_1 \cap A_2)=64$; $n(A_2 \cap A_3)=12$; $n(A_1 \cap A_2 \cap A_3)=9$; $n(A_1 \cup A_2 \cup A_3)=208$.

Pede-se para calcular $n(A_1 \cap A_3)$.

Pelo Princípio de Inclusão e exclusão,

$$n(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = n(A_1) + n(A_2) + n(A_3) - n(A_1 \cap A_2) - n(A_1 \cap A_3) - n(A_2 \cap A_3) + n(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$

$\Leftrightarrow$

$$n(A_1 \cap A_3) = n(A_1) + n(A_2) + n(A_3) - n(A_1 \cap A_2) - n(A_1 \cup A_2 \cup A_3) - n(A_2 \cap A_3) + n(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$

$\Leftrightarrow$

$$n(A_1 \cap A_3) = 114 + 152 + 17 - 64 - 208 - 12 + 9 = 8.$$

Princípio da Casa do Pombo. Se mais do que k objectos são distribuídos em k caixas, então pelo menos uma caixa conterá mais de um objecto.

Exemplo (Aplicação do Princípio da Casa do Pombo). Quantas pessoas precisam estar no mesmo quarto para se garantir que pelo menos duas pessoas têm sobrenomes iniciados pela mesma letra?

Resolução. Existem 26 letras. Se no quarto houver pelo menos 27 pessoas, então pelo menos duas pessoas terão sobrenomes iniciados pela mesma letra.

Exercício. Quantas vezes um único dado precisa ser lançado para se garantir que um valor (1, 2, 3, 4, 4 ou 6) saia duas vezes?

Conclusão

Os princípios de, Multiplicação, da Casa do Pombo e de Inclusão e Exclusão permitem resolver problemas relacionados ao número de elementos de um conjunto finito.

Avaliação

1. De quantas maneiras se pode escolher 3 funcionários de um grupo de 25 pessoas, se uma pessoa puder acumular mais de um cargo?
2. Determine o número de chapa matrículas que se pode constituir, sabendo que cada chapa matrícula é formada por duas letras diferentes e 4 dígitos diferentes.
3. Em um grupo de 42 turistas, todos falam inglês ou francês. Existem 35 pessoas que falam inglês e 18 pessoas que falam francês. Quantos turistas falam inglês e francês?
4. Em um grupo de 24 pessoas que gostam de rock, country e música clássica, 14 gostam de rock, 12 gostam de música clássica, 11 gostam de rock e country, 9 gostam de rock e música clássica, 13 gostam de country e música clássica e 8 gostam de rock, country e música clássica. Quantos gostam de country?

Actividade 1.3 - Factorial, Permutações e combinações

Introdução

Introduz-se aqui as principais ferramentas na resolução de problemas que envolvem a determinação de números de um conjunto formado por determinadas condições: permutação, arranjo e combinação. As fórmulas para cálculos de permutação, arranjo e combinação serão apresentadas em função do conceito de factorial de um número inteiro não negativo. A combinação dos princípios da contagem e das fórmulas anteriormente mencionadas, vai permitir a resolução de problemas mais complexos. A introdução do conceito de binomial vai permitir o desenvolvimento de potência de um binómio, com todas as suas consequências.

Detalhes da atividade

Factorial. Seja $n \in \mathbb{N}_0$ (conjunto dos números inteiros não negativos, isto é, $\mathbb{N} \cup \{0\}$). Chama-se factorial de n ao número

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n, \text{ se } n \neq 0 \text{ e } n! = 1, \text{ se } n = 0.$$

Exemplo. $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$

Exercícios.

Escreva as seguintes expressões em função de factorial:

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-r+1).$$

Resolução. Como $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-r+1) \cdot (n-r)!$, logo:

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-r+1) = n! / ((n-r)!).$$

$$35 \cdot 34 \cdot 33$$

Simplifique as seguintes expressões:

$$((n+1)!)/n!$$

Resolução.

$$((n+1)!)/n! = ((n+1) \cdot n!)/n! = n+1.$$

$$n! / ((n-2)!)$$

Coefficiente binomial. O símbolo $\binom{n}{r}$, onde $r, n \in \mathbb{N}_0$ e $r \leq n$, define-se por

$$\binom{n}{r} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-r+1)}{r!}.$$

Propriedades.

$$1. \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

$$2. \binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}, \text{ isto é, se } n = a + b, \text{ então } \binom{n}{a} = \binom{n}{b}.$$

$$3. \binom{n+1}{r} = \binom{n}{r-1} + \binom{n}{r}$$

Exemplo. $\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!n!} = 1$; $\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1$ (ver propriedade 2.); $\binom{8}{5} = \frac{8!}{3!5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2} = 8 \cdot 7 = 56$.

Teorema de um binómio e Triângulo de Pascal.

Teorema (de um binómio). Sejam $a, b \in \mathbb{R}$. Então

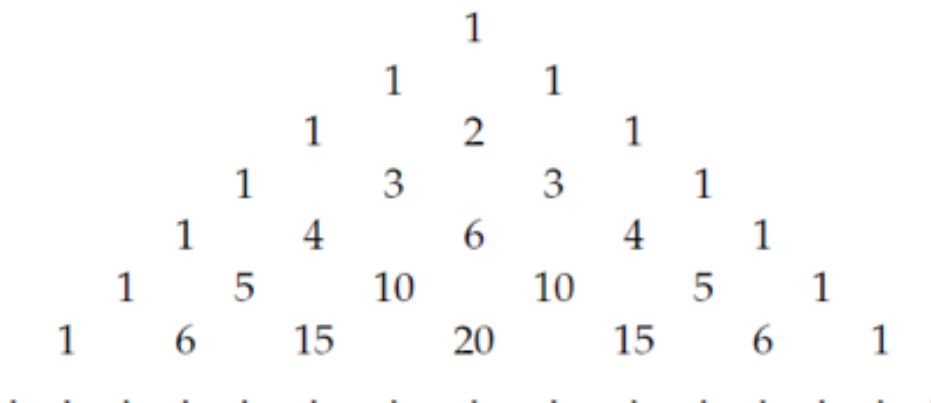
$$[(a+b)]^n = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} a^{n-r} b^r.$$

Exemplo.

$$\begin{aligned} (a+b)^5 &= \binom{5}{0}a^5 + \binom{5}{1}a^4b + \binom{5}{2}a^3b^2 + \binom{5}{3}a^2b^3 + \binom{5}{4}ab^4 + \binom{5}{5}b^5 \\ &= a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5 \end{aligned}$$

Triângulo de Pascal. Os coeficientes das potências sucessivas de “a+b” podem ser organizados em linhas de um triângulo, de acordo com a figura abaixo (exemplo de um triângulo com 7 linhas), que se denomina por triângulo de Pascal. O Triângulo de Pascal tem as seguintes propriedades:

- O primeiro número e o último número de cada linha são iguais a 1;
- Todo o outro número numa linha pode ser obtido adicionando os dois números que estão nas linhas oblíquas imediatamente acima.



- A primeira linha dá os coeficientes de $[(a+b)]^0$;
- A segunda linha dá os coeficientes de $[(a+b)]^1$;
- A terceira linha dá os coeficientes de $[(a+b)]^2$;

...

- A n -ésima linha dá os coeficientes $[(a+b)]^{(n-1)}$;
- A $(n+1)$ -ésima linha dá os coeficientes de $[(a+b)]^n$;
- ...

Exemplo.

$$\begin{aligned}(x+2y)^6 &= x^6 + 6x^5(2y) + 15x^4(2y)^2 + 20x^3(2y)^3 + 15x^2(2y)^4 + 6x(2y)^5 \\ &\quad + (2y)^6 \\ &= x^6 + 12x^5y + 60x^4y^2 + 160x^3y^3 + 240x^2y^4 + 192xy^5 + 64y^6.\end{aligned}$$

Consequência. $2^n = (1+1)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n}$.

Permutação. Seja $n \in \mathbb{N}$. Permutação de n elementos distintos, representa-se por P_n , é um agrupamento ordenado desses elementos.

Teorema. Seja $n \in \mathbb{N}$. Então $P_n = n!$.

Arranjo (sem repetição). Sejam $n, p \in \mathbb{N}_0$ e $n \geq p$. Um arranjo de n elementos dispostos p a p , representa-se por A_p^n , é uma escolha de p elementos entre esses n elementos, na qual a ordem importa.

Teorema. Sejam $n, p \in \mathbb{N}_0$ e $n \geq p$. Então

$$A_p^n = \frac{n!}{(n-p)!}.$$

Nota. $P_n = A_n^n$.

Combinação (sem repetição). Sejam $n, p \in \mathbb{N}$ e $n \geq p$. Combinação de n elementos p a p , representa-se C_p^n , é uma escolha, não ordenada, de p elementos entre esses n elementos.

Teorema. Sejam $n, p \in \mathbb{N}$ e $n \geq p$. Então

$$C_p^n = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \binom{n}{p}.$$

Exercícios.

1. De quantas maneiras pode-se escolher um presidente e um vice-presidente dentre um grupo de 20 pessoas.

Resolução. Nota-se que a ordem na escolha de duas pessoas importa, pois pessoa P na presidência e pessoa Q na vice-presidência é diferente de pessoa Q na presidência e pessoa P na vice-presidência. Então, a solução deste problema passa-se pelo cálculo de

$$A_2^{20} = \frac{20!}{(20-2)!} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18!}{18!} = 20 \cdot 19 = 380.$$

Nota. Nota-se que este problema, como qualquer outro problema que envolve arranjo, pode ser resolvido aplicando Princípio de Multiplicação.

2. De quantas maneiras diferentes se pode constituir uma comissão de 3 pessoas, dentre um grupo de 12.

Resolução. Nota-se que a ordem na escolha das 3 pessoas não importa. Então a solução deste problema passa-se pelo cálculo de

$$C_3^{12} = \frac{12!}{3! \cdot 9!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{3 \cdot 2} = 2 \cdot 110 = 220.$$

Nota. A diferença entre a permutação e a combinação reside no facto de que os objectos são seleccionados e ordenados, no caso de permutação, e apenas seleccionados, no caso de combinação.

3. Quantas anagramas distintas podem ser formadas com letras da palavra "FLORIDA"?

Resolução. Há 7! anagramas distintas.

Nota. O número de subconjuntos de um conjunto S com n elementos, pode ser calculado utilizando a noção de combinação, isto é, para cada $0 \leq r \leq n$, deve-se determinar C_r^n , obtendo o número de subconjuntos de S com r elementos. Nota-se que $C_0^n = 1$, diz que existe um único subconjunto de S com zero elementos, o conjunto vazio ($\emptyset$); e que $C_n^n = 1$, diz que existe um único subconjunto de S com um só elemento. Sendo assim, o número de subconjuntos de S é:

$$(C_0^n) + (C_1^n) + (C_2^n) + \dots + (C_n^n) = 2^n.$$

Exemplo de aplicação. De quantas maneiras pode-se escolher pelo menos 3 pessoas num grupo de 12?

Resolução. O número total de subconjuntos de um conjunto com 12 pessoas é 2^{12} . Como queremos subconjuntos com pelo menos 3 pessoas (isto é, com 3 ou 4 ou 5 ou ... ou 12 pessoas), deve-se subtrair de 2^{12} a soma $C_0^{12} + C_1^{12} + C_2^{12}$, ou seja, o número pedido é:

$$2^{12} - (C_0^{12} + C_1^{12} + C_2^{12}) = 4096 - (1 + 12 + 66) = 4017.$$

Permutação (com repetição). Suponha que existam n objetos dos quais n_1 são iguais entre si, outro n_2 são também iguais entre si, e assim por diante, até n_k objetos que são iguais entre si. O número de permutações distintas desses n objetos é

$$n! / (n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k).$$

Exemplo.

Quantas anagramas distintas podem ser formadas com letras da palavra "MISSISSIPI"?

$$\text{Há } \frac{11!}{4! \cdot 4!} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 11 \cdot 10 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 69300.$$

Combinação (com repetição). Suponha que se pretende escolher r objectos, não necessariamente distintos, dum conjunto com n objectos distintos, onde a ordem não importa. Então o número total de escolhas é

$$C_r^{r+n-1} = \frac{(r+n-1)!}{r!(n-1)!}.$$

Exemplo. Seis crianças escolhem um pirulito cada, dentre pirulitos vermelhos, verdes e amarelos. De quantas maneiras essa escolha pode ser feita?

Resolução. Neste caso a ordem da escolha não importa e as crianças podem eventualmente escolher pirulitos da mesma cor. Então esta-se perante uma combinação com repetição. Logo o número pedido é

$$C_6^8 = \frac{8!}{6!2!} = \frac{8 \cdot 7}{2} = 28.$$

Conclusão

Vários problemas podem ser resolvidos aplicando cálculo combinatório. Contudo, deve-se analisar bem um problema para decidir se o método de resolução passa por uma permutação (com ou sem repetição), arranjo ou combinação (com ou sem repetição). Com a introdução do coeficiente binomial, tornou-se possível o desenvolvimento de potência de um binómio.

Avaliação

1. Simplifique as seguintes expressões:

a. $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}$

b. $\frac{(n-r)!}{(n-r-2)!}$

2. Desenvolva $[(2x+y)]^7$.
3. Quantas anagramas distintas são possíveis com as letras da palavra "MONOFÁSICOS"?
4. Quantas permutações distintas das letras da palavra COMPUTADOR existem? Quantas delas terminam por uma vogal?
5. Num debate participaram três rapazes e duas raparigas. De quantas maneiras podem sentar-se em filas se:

- a. As meninas devem sentar-se juntos?
- b. Os rapazes devem sentar-se juntos e as meninas também?
6. O controle de qualidade deseja testar 25 chips de microprocessadores dentre os 300 que são produzidos diariamente. De quantas maneiras isto pode ser feito?
7. Um estudante precisa responder 8 das 10 questões apresentadas num exame. Diga de quantas maneiras ele pode escolher as 8 questões?
8. De quantas maneiras pode um professor escolher pelo menos 1 estudante num grupo de 6?
9. Uma gelataria dispõe de cinco sabores de gelados. De quantas maneiras uma pessoa pode comer dois gelados?
10. Podendo escolher entre 5 tipos de queijo e 4 marcas de vinho, de quantos modos é possível fazer um pedido num restaurante, com duas qualidades diferentes de queijo e 3 garrafas de vinho (da mesma marca ou não)?

Resumo da Unidade

Nesta unidade tratou-se sobre o estudo de conjuntos e suas operações. Os princípios de contagem dos elementos em um conjunto finito têm grande aplicação na resolução de problemas. Através do cálculo combinatório, e da sua combinação com os princípios de contagem, pode-se resolver problemas mais complexos sobre o número de elementos de um conjunto cujos elementos estão de acordo com determinadas condições.

Avaliação da Unidade

Verifique a sua compreensão!

Testes Sumativo - Conjuntos e cálculos combinatórios

Instruções

O teste tem dez questões, e cada uma vale dez pontos. Deve apresentar todos os cálculos e todos os fundamentos que sustentam as resoluções feitas. O teste deve ser resolvido em duas horas.

Critérios de Avaliação

São dez questões e cada uma delas vale 20 pontos, totalizando 200 pontos.

Escala de avaliação:

Insuficiente: 0 a 100 (exclusivo);

Suficiente: 100 a 140 (exclusivo);

Bom: 140 a 170 (exclusivo);

Muito bom: 170 a 200.

O aluno com Suficiente, Bom e Muito Bom considera-se com nível de conhecimentos suficientes para obter aprovação nesta unidade.

Avaliação

1. Sejam $A=\{x \in \mathbb{R}: x^2-4x+3 < 0\}$ e $B=\{x \in \mathbb{R}: 0 < x < 6\}$. Diga, justificando, se $A \subset B$.
2. Uma senha de usuário, em um computador de grande porte, consiste em três letras seguidas de dois dígitos. Quantas senhas diferentes são possíveis, sabendo que o conjunto dos alfabetos tem vinte e seis letras?
3. O controle de qualidade em uma fábrica introduziu 47 peças com defeitos, de pintura, na embalagem ou na parte electrónica, na linha de montagem. Dessas peças, 28 tinham defeitos de pintura, 17 tinham defeitos de embalagem, 7 tinham defeitos na embalagem e na parte electrónica e 3 tinham defeitos na pintura e na parte electrónica. Alguma peça tinha os 3 defeitos?
4. De quantas maneiras catorze pessoas podem ser divididas em seis comissões, em que duas das comissões contêm três membros, e as outras, dois?
5. Simplifique $\frac{(n-r+1)!}{(n-r-1)!}$.
6. Suponha que exista n pares de distintos de sapatos em um armário. Mostre que, se se escolher aleatoriamente $n+1$ sapatos no armário, com certeza haverá pelo menos um par de sapatos.
7. Ache o número de permutações distintas que se pode formar com todas as letras da palavra "SUCESSO".
8. Prove que: $((_r)^{(n+1)}))=((_ (n+1)^{(n)}))+((_r^n))$.
9. Prove a seguinte identidade: $(A \cup B) \cap (A \cup B^c) = A$.
10. Determine o complementar do conjunto $A=\{1,2,3\}$ no universo $\mathbb{R}$.

Leituras e outros Recursos

As leituras e outros recursos desta unidade encontram-se na lista de Leituras e Outros Recursos do curso.

Unidade 3. Relações e Funções, Matrizes e Demonstração por Indução Matemática

Introdução à Unidade

Os elementos de um conjunto muitas vezes apresentam ligações especiais entre si que podem ser descritas como uma relação. Nesta unidade você irá estudar a relação binária e as suas propriedades, com destaque para relação de equivalência. As relações n -árias constituem a base dos bancos de dados relacionais. Também estuda-se função, como caso particular de uma relação e permutações de um conjunto, como caso particular de funções. O estudo de funções sobrejectivas e a determinação das respectivas inversas tem grande interesse. Define-se recursivamente certas sequências (muito importante para a lógica de programação)

Estuda-se também as matrizes e as suas operações: adição e multiplicação. O estudo de matrizes booleanas ganha especial interesse, pois o computador processa com dois bits. As matrizes podem ser utilizadas para representar grafos e relações.

A Técnica de demonstração por indução finita deve ser muito bem explorada, pois é útil no desenvolvimento de capacidade de raciocínio no campo de programação e outros.

Objetivos da Unidade

Após a conclusão desta unidade, deverá ser capaz de:

1. Identificar as propriedades de uma relação binária.
2. Operar com relações binárias.
3. Classificar funções.
4. Operar com matrizes.
5. Demonstrar proposições utilizando a indução matemática.

Termos-chave

Relação n-ária: Dados os conjuntos $\{S_1\}, S_2, \dots, S_n$, $n \in \mathbb{N}$, uma relação n-ária nos conjuntos $\{S_1\}, S_2, \dots, S_n$ é um subconjunto do produto cartesiano $S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n$.

Ordenação parcial: uma relação binária p num conjunto S diz-se ordenação parcial se ela for reflexiva, anti-simétrica e transitiva.

Relação de equivalência: uma relação binária p num conjunto S diz-se relação de equivalência se ela for reflexiva, simétrica e transitiva.

Função: Dados os conjuntos A e B , uma função f de A para B , $f: A \rightarrow B$, é uma correspondência que a cada elemento x do conjunto A associa um e um só elemento $f(x)$ do conjunto B . Equivalente, uma função de A para B , $f: A \rightarrow B$, é um subconjunto do produto cartesiano $A \times B$ onde cada elemento $a \in A$ aparece uma vez só como primeiro componente de um par ordenado.

Matriz sobre um conjunto numérico: Dados um conjunto P e dois números naturais (inteiros positivos) n e m , uma matriz de dimensão $m \times n$ é uma função $A: \{1, 2, 3, \dots, m\} \times \{1, 2, 3, \dots, n\} \rightarrow P$, definida por $A((i, j)) = a_{ij}$, para todo $(i, j) \in \{1, 2, 3, \dots, m\} \times \{1, 2, 3, \dots, n\}$.

Indução Matemática: é uma técnica de demonstração, normalmente usadas para demonstrar proposições definidas num conjunto de números inteiros positivos..

Actividades de Aprendizagem

Actividade 1.1 - Questionário - Relações binárias

Introdução

Estuda-se a relação n-árias em conjuntos, especialmente as relações binárias. Uma relação binária pode satisfazer determinadas propriedades ou não. Conforme for as propriedades satisfeitas pode-se ter uma relação de ordem parcial (neste caso os elementos podem ser representados através de um grafo) ou uma relação de equivalência (neste caso os elementos podem ser agrupados em classes).

Relações n-árias constituem a base de banco de dados relacionais, isto é, permite realizar diversas pesquisas num banco de dados relacionais.

Detalhes da actividade

Recorda-se que o produto cartesiano entre conjuntos A e B define-se da seguinte forma

$$A \times B = \{(a,b) : a \in A \text{ e } b \in B\}.$$

Por exemplo: Seja $A = \{a,b\}$ e $B = \{1,2,3,4\}$, então:

$$A \times B = \{(a,1), (a,2), (a,3), (a,4), (b,1), (b,2), (b,3), (b,4)\}$$

Relação binária: uma relação binária ρ em conjuntos A e B é um subconjunto do produto cartesiano $A \times B$. Uma relação binária ρ num conjunto S, é um subconjunto do produto cartesiano $S \times S = S^2$.

Se um par (a,b) pertence a uma relação binária ρ , escreve-se $a \rho b$, isto é: $(a,b) \in \rho \Leftrightarrow a \rho b$.

Por exemplo: Seja $S = \{1,2\}$. Então $S^2 = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\}$. Considere a relação ρ definida em S da seguinte forma: $\forall a,b \in S$, $a \rho b$ se $a+b$ é um número ímpar. Nota-se que os pares $(1,1)$ e $(2,2)$ não pertencem a ρ uma vez que $1+1$ e $2+2$ são números pares. Mas, os pares $(1,2)$ e $(2,1)$ pertencem a relação ρ , pois $1+2$ e $2+1$ são números ímpares. Logo $\rho = \{(1,2), (2,1)\}$.

Relação n-árias em conjuntos $S_1, S_2, \dots, S_n$, $n \in \mathbb{N}$ e $n > 2$, é um subconjunto do produto cartesiano $S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n$. Uma relação n-ária em um conjunto S é um subconjunto de $S^n = S \times S \times \dots \times S$ (produto cartesiano com n factores todos iguais a S).

Exercícios

- Para cada relação binária ρ nos conjuntos A e B determine quais dos pares ordenados apresentados pertence a ρ :
 - $A=B=\mathbb{N}$ e $a \rho b \Leftrightarrow a=b+1$; pares ordenados: $(2,2), (2,3), (3,3), (3,2)$.
 - $A=B=\mathbb{N}$ e $a \rho b \Leftrightarrow a$ divide b ; pares ordenados: $(2,4), (2,5), (2,6)$.

Uma relação binária ρ em conjuntos A e B diz-se:

- **Um-para-um** se para todo par $(a,b) \in \rho$ não existe nenhum par $(c,d) \in \rho$ tal que $a=c$ ou $b=d$;
- **Um-para-muitos** se existe algum $a \in A$ tal que $(a,b), (a,c) \in \rho$, para $b, c \in B$ e $b \neq c$;
- **Muitos-para-um** se existe algum $b \in B$ tal que $(a,b), (c,b) \in \rho$, para $a, c \in A$ e $a \neq c$.
- **Muitos-para-muitos** se é simultaneamente um-para-muitos e muitos-para-um.

Exercícios: nestes exercícios o estudante deve verificar se para cada uma das relações binárias se verifica ou não as condições dos conceitos mencionados.

Para cada relação ρ nos conjuntos $A=\{2,5,7,9\}$ e $B=\{3,4,5\}$ diga se ρ é uma relação um-por-um, um-por-muitos, muitos-por-um ou muitos-por-muitos:

$$\rho=\{(5,3),(7,5),(9,3)\};$$

$$\rho=\{(2,4),(5,5),(9,3)\};$$

$$\rho=\{(7,4),(2,5),(8,4),(2,3)\}.$$

Por exemplo: no exercício da alínea (a) nota-se que os pares ordenados (5,3) e (9,3) satisfazem as condições de muitos-para-um, logo esta relação é uma relação muitos-para-um.

União, intersecção e complementar de relações binárias num conjunto S.

Seja U o conjunto de todas as relações em um determinado conjunto S . Dado quaisquer relações $\rho, \mu \in U$, tem-se:

$$\rho \cup \mu \in U \text{ e } (x,y) \in \rho \cup \mu \leftrightarrow (x,y) \in \rho \text{ ou } (x,y) \in \mu;$$

$$\rho \cap \mu \in U \text{ e } (x,y) \in \rho \cap \mu \leftrightarrow (x,y) \in \rho \text{ e } (x,y) \in \mu;$$

$$\rho' \in U, \text{ onde } \rho' \text{ é o complementar de } \rho, \text{ e } (x,y) \in \rho' \leftrightarrow (x,y) \notin \rho.$$

Exercícios:

- Sejam ρ e μ duas relações binárias definidas no conjunto dos números naturais N por:

$$(a,b) \in \rho \leftrightarrow a=b \text{ e } (a,b) \in \mu \leftrightarrow a < b.$$

- Determine $\rho \cup \mu$, $\rho \cap \mu$, ρ' e μ' .

Por exemplo: $(a,b) \in \rho \cup \mu \leftrightarrow (a,b) \in \rho \text{ ou } (a,b) \in \mu \leftrightarrow a=b \text{ ou } a < b \leftrightarrow a \leq b$. Isto é, a relação $\rho \cup \mu$ é tal que: $(a,b) \in \rho \cup \mu \leftrightarrow a \leq b$.

Propriedades de uma relação binária num conjunto

Seja ρ uma relação binária num conjunto S . Diz-se que ρ é:

- Reflexiva** se: $\forall x \in S \ (x,x) \in \rho$;
- Simétrica** se: $\forall x \in S \ \forall y \in S \text{ se } (x,y) \in S \Rightarrow (y,x) \in S$

$$\forall x \in S \ \forall y \in S \ \forall z \in S \text{ se } (x,y) \in S \text{ e } (y,z) \in S \Rightarrow (x,z) \in S$$

- Anti-simétrica** se: $\forall x \in S \ \forall y \in S \text{ se } (x,y) \in S \text{ e } (y,x) \in S \Rightarrow x=y$.

Por exemplo: considere a relação ρ definida em $\mathbb{N}$ da seguinte forma: $(a,b) \in \rho \leftrightarrow a \leq b$.

- $\forall x \in \mathbb{N} \ x \leq x$, pois $x=x$, logo $(x,x) \in \rho$, isto é, ρ é reflexiva.
- $(2,3) \in \rho$, pois $2 < 3$, mas $(3,2) \notin \rho$ pois $3 > 2$, isto é, $3 \neq 2$ e 3 não é menor que dois, logo ρ não é simétrica.
- $\forall x \in \mathbb{N} \ \forall y \in \mathbb{N} \ \forall z \in \mathbb{N}$ se $x \leq y$ e $y \leq z \Rightarrow x \leq z$, logo ρ é transitiva.
- $\forall x, y \in \mathbb{N}$ se $x \leq y$ e $y \leq x \Rightarrow x=y$, logo ρ é anti-simétrica.

Nota: As relações de simetria e anti-simetria não são opostas, isto é: uma relação binária ρ num conjunto S pode ser simétrica e anti-simétrica ao mesmo tempo; pode ser simétrica e não ser anti-simétrica, pode ser anti-simétrica e não ser simétrica e pode não ser nem simétrica nem anti-simétrica.

Por exemplo: a relação $\rho = \{(1,3), (3,1), (1,4), (2,4)\}$ em $\mathbb{N}$ não é nem simétrica, pois por exemplo, $(1,4) \in \rho$ mas $(4,1) \notin \rho$, nem anti-simétrica pois $(1,3) \in \rho$ e $(3,1) \in \rho$, mas $3 \neq 1$.

Contudo se ρ é uma relação binária em S simétrica e anti-simétrica, então ρ é uma relação de igualdade. Pois, seja um elemento arbitrário $(a,b) \in \rho$. Por simetria de ρ , $(b,a) \in \rho$; por anti-simetria de ρ , $a=b$. Como (a,b) é um elemento arbitrário de ρ , então tem-se: $(a,b) \in \rho \leftrightarrow a=b$, isto é, ρ é uma relação de igualdade.

Exercícios:

1. Verifique se cada uma das relações que se seguem definidas num conjunto S é reflexiva ou transitiva ou simétrica ou anti-simétrica:
 - a. $S = \mathbb{N}$ e $(x,y) \in \rho \leftrightarrow x+y$ é um número par.
 - b. $S = \mathbb{N}$ e $(x,y) \in \rho \leftrightarrow y = nx$, para algum $n \in \mathbb{N}$.
 - c. $S = \{0,1\}$ e $(x,y) \in \rho \leftrightarrow x = y^2$.
 - d. $S = \{x: x \text{ é um aluno da sua sala}\}$ e $(x,y) \in \rho \leftrightarrow x$ senta na mesma fila que y .

Fecho de uma relação: uma relação binária ρ^* num conjunto S diz-se fecho de uma relação binária ρ também definida no conjunto S em relação à propriedade P (reflexiva ou simétrica ou transitiva) se:

1. ρ^* tem a propriedade P ;
2. $\rho \subset \rho^*$;
3. ρ^* é a menor relação que contém ρ e que satisfaz as propriedades (1) e (2), isto é, qualquer relação μ que satisfaz as propriedades (1) e (2) contém ρ^* ($\rho^* \subseteq \mu$).

Um fecho em relação à propriedade reflexiva diz-se fecho reflexivo, em relação à propriedade simétrica diz-se fecho simétrico e em relação à propriedade transitiva diz-se fecho transitivo.

Por exemplo. Considere a relação ρ definida no conjunto $S = \{1,2,3,4,5\}$ por: $\rho = \{(1,1), (3,3), (1,3), (1,4), (2,4), (4,5)\}$.

1. O fecho reflexivo de p é:

$$p^* = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (1,3), (1,4), (2,4), (4,5)\}.$$

2. O fecho simétrico de p é:

$$p^* = \{(1,1), (3,3), (1,3), (1,4), (2,4), (4,5), (3,1), (4,1), (4,2), (5,4)\}$$

3. O fecho transitivo de p é:

$$p^* = \{(1,1), (3,3), (1,3), (1,4), (2,4), (4,5), (1,5), (2,5)\}$$

Exercício:

- Seja $p = \{(a,a), (b,b), (c,c), (a,c), (a,d), (b,d), (c,a), (d,a)\}$ no conjunto $S = \{a,b,c,d\}$. Determine o fecho simétrico; o fecho reflexivo e o fecho transitivo de p .

Ordenação parcial: seja p uma relação binária num conjunto S . Diz-se que p é uma relação de ordem parcial no conjunto S se p é reflexiva, transitiva e anti-simétrica.

Por exemplo : A relação p num conjunto N , definida por $(a,b) \in p \leftrightarrow b=na$, para algum $n \in \mathbb{N}$, é uma ordem parcial em N . Pois:

- a. p é reflexiva: $\forall a \in N \quad a=1.a \leftrightarrow (a,a) \in p$;
- b. p é simétrica: se $(a,b) \in p$ e $(b,a) \in p \leftrightarrow b=na$ e $a=mb$, para alguns $m,n \in \mathbb{N}$. Tem-se:
 $b=na \leftrightarrow b=n(mb) \leftrightarrow nm=1 \leftrightarrow n=m=1$, isto é, $a=b$.
- c. p é transitiva: se $(a,b) \in p$ e $(b,c) \in p$, então $b=na$ e $c=mb$, para alguns $m,n \in \mathbb{N}$. Logo, $c=mna=ka$, onde $k=mn \in \mathbb{N}$, isto é, $(a,c) \in p$.

Conjunto parcialmente ordenado: se p é uma ordenação parcial em S , par ordenado (S,p) é denominado por um conjunto parcialmente ordenado.

Geralmente um conjunto parcialmente ordenado representa-se por $(S, \leq)$, qualquer que seja a ordenação parcial considerada.

Restrição de uma ordenação parcial: sejam $(S, \leq)$ um conjunto parcialmente ordenado e $A \subseteq B$. O subconjunto de $\leq$ composto por pares ordenados de elementos de A denomina-se por restrição de $\leq$ ao conjunto A . Nota-se que $\leq$ é uma ordenação parcial em A .

Predecessor, predecessor imediato e sucessor: seja $(S, \leq)$ um conjunto parcialmente ordenado. Se $a \leq b, a, b \in S$, então ou $a=b$ ou $a \neq b$; para o último caso escreve-se $a \leq b$ e diz-se que a é um predecessor de b e que b é um sucessor de a . se a é um predecessor de b e se não existe nenhum $c \in S$ tal que $a \leq c$ e $c \leq b$, diz-se que a é um predecessor imediato de b .

Exemplo: considere a ordenação parcial $\leq$ definida no conjunto $S = \{1,2,3,6,12,18\}$ por $a \leq b \leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}: b=na$.

- a. Escreva os pares ordenados $(a,b) \in \leq$.
- b. Escreva todos os predecessores de 6.

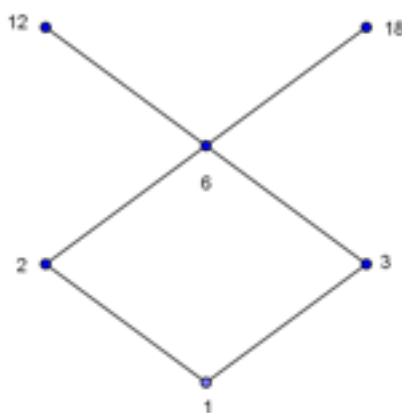
- c. Escreva todos os predecessores imediatos de 6.
- d. Determine a restrição de $\leq$ ao conjunto $A=\{3,6,18\}$.

Resolução:

- a. $\leq = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,6),(1,12),(1,18)\} \cup \{(2,2),(2,6),(2,12),(2,18)\} \cup \{(3,3),(3,6),(3,12),(3,18)\} \cup \{(6,6),(6,12),(6,18),(12,12),(18,18)\}$.
- b. Os predecessores de 6 são: 1, 2 e 3.
- c. Os predecessores imediatos de 6 são: 2 e 3.
- d. A restrição de $\leq$ ao conjunto $A=\{3,6,18\}$ é a ordenação parcial:
 $\{(3,3),(3,6),(3,18),(6,6),(6,18),(18,18)\}$.

Representação gráfica de uma ordenação parcial num conjunto finito: se S é finito, o conjunto parcialmente ordenado $(S, \leq)$ pode ser representado através de um grafo denominado diagrama de Hasse. Cada um dos elementos de S é representado por um ponto denominado nó, ou vértice, do diagrama. se a é um predecessor imediato de b , o nó para a deve situar-se acima do nó para b e esses dois nós devem ser ligados por um segmento de recta.

Por exemplo: Do exemplo anterior, sabe-se que $(\mathbb{N}, \leq)$ é um conjunto parcialmente ordenado, onde $(a,b) \in \leq \leftrightarrow b=na$, para algum $n \in \mathbb{N}$. A sua representação gráfica obtém-se determinando os predecessores imediatos de cada elemento e depois ordena-los de acordo com a descrição da diagrama de Hasse. Assim: predecessor imediato de 12 e 18 é 6, 2 e 3 são predecessores imediatos de 6 e 1 é predecessor imediato de 2 e 3. Logo, os nós para 12 e 18 ficam mais acima e ao mesmo nível (pois eles não são predecessores de nenhum elemento), o nó para 6 fica acima dos nós para 2 e 3 e esses últimos ficam ao mesmo nível (pois um não é predecessor do outro) e, finalmente, o nó para 1 fica mais abaixo.



Nota: a partir do diagrama de Hasse de um conjunto parcialmente ordenado $(S, \preceq)$ pode-se constituir o conjunto dos pares ordenados da ordenação parcial $\preceq$.

Também, numa ordenação parcial $\preceq$ num conjunto S pode acontecer que alguns elementos de S não se relacionam entre si. Como exemplo, pode ver-se o exemplo anterior, em que o elemento 2 não se relaciona com o elemento 3.

Máximo, mínimo, maximal e minimal: seja $(S, \preceq)$ um conjunto parcialmente ordenado. Se existe um elemento $y \in S$ tal que para todo elemento $x \in S$, então $y \preceq x$, diz-se que y é um elemento mínimo de $(S, \preceq)$. Se existe um elemento $x \in S$ tal que para todo elemento $y \in S$, então $y \preceq x$, diz-se que x é o elemento máximo de $(S, \preceq)$. Um elemento $y \in S$ diz-se um elemento minimal de $(S, \preceq)$ se não existe elemento $z \in S$ tal que $z \prec x$. Um elemento $x \in S$ diz-se um elemento maximal de $(S, \preceq)$, se não existe $w \in S$ tal que $x \prec w$.

O elemento mínimo e o elemento máximo quando existem são únicos.

Contudo pode haver mais que um elemento minimal e/ou mais que um elemento maximal num conjunto parcialmente ordenado.

Exemplo: no conjunto parcialmente ordenado $(\mathbb{N}, \preceq)$, onde $(a, b) \in \preceq \leftrightarrow b = na$, para algum $n \in \mathbb{N}$, o elemento mínimo e o elemento minimal coincidem e são iguais a 1, não existe elemento máximo e existem dois elementos maximais, 12 e 18.

Nota: um elemento mínimo é sempre minimal e um elemento máximo é sempre maximal, contudo o recíproco não é verdadeiro. No diagrama de Hasse o nó para o elemento mínimo é o mais abaixo e o nó para elemento minimal não tem nenhum nó abaixo dele. Também, o nó para elemento máximo é o nó mais acima e o nó para elemento maximal não tem nenhum nó acima dele.

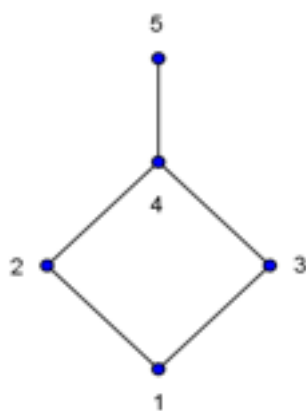
Ordenação total ou cadeia: uma ordenação parcial $\preceq$ num conjunto S em que cada elemento está relacionado com todos os demais elementos do conjunto S chama-se ordenação total, ou cadeia. O par ordenado $(S, \preceq)$ chama-se conjunto totalmente ordenado.

Nota: num conjunto totalmente ordenado o elemento minimal é sempre o elemento mínimo e o elemento maximal é sempre o máximo. O diagrama de Hasse para um conjunto totalmente ordenado é algo parecido com a figura abaixo:



Exercício:

1. Mostre que o conjunto $(S, \subseteq)$ é parcialmente ordenado, onde S é o conjunto de todos os subconjuntos do conjunto $\{1,2,3\}$ e para $A, B \in S$, $(A, B) \in \subseteq \leftrightarrow A \subseteq B$.
 - a. Faça o respectivo diagrama de Hasse.
 - b. Verifique a existência de elemento mínimo e do elemento máximo. Determine-os caso existam.
 - c. Quais são os elementos maximais e os elementos minimais.
2. Escreva os pares ordenados da ordenação parcial representado graficamente da seguinte forma:



Relação de equivalência: uma relação binária ρ num conjunto S que é reflexiva, simétrica e transitiva denomina-se por relação de equivalência.

Por exemplo: a relação binária ρ em $\mathbb{N}$, definida por $(a,b) \in \rho \leftrightarrow a+b$ é par é uma relação de equivalência.

Partição de um conjunto: uma partição de um conjunto S é uma colecção de subconjuntos de S , não vazios, disjuntos e cuja união resulta S .

Teorema de relações de equivalência e partições: uma relação de equivalência num conjunto S determina uma partição de S . Também, uma partição de um conjunto S determina uma relação de equivalência em S .

Classe de equivalência: sejam ρ uma relação de equivalência num conjunto S e $x \in S$. Chama-se classe de equivalência de x , representa-se por $[x]$, ao conjunto dos elementos de S que se relacionam com x , isto é:

$$[x] = \{y \in S: x \rho y\}.$$

Desta feita,

$$[x] = [z] \leftrightarrow x \rho z,$$

isto é, uma classe de equivalência pode ser representada por qualquer um dos seus elementos.

Por exemplo: considere a relação de equivalência ρ em $\mathbb{N}$, definida por $(a,b) \in \rho \leftrightarrow a+b$ é par.

Qualquer número natural ou é par ou é ímpar. Um número par é representado por $2n$ para algum $n \in \mathbb{N}$ e um número ímpar por $2n+1$ para algum $n \in \mathbb{N}$. Sendo assim a soma de dois números pares é par, pois: $2n_1 + 2n_2 = 2(n_1 + n_2) = 2k$, com $k = n_1 + n_2 \in \mathbb{N}$, uma vez que. Também, a soma de dois números ímpares é par, pois: $2n_1 + 1 + 2n_2 + 1 = 2(n_1 + n_2 + 1) = 2k$, onde $k = n_1 + n_2 + 1 \in \mathbb{N}$, uma vez que $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$. Contudo, a soma de um número para com um número ímpar é ímpar, pois: $2n_1 + 2n_2 + 1 = 2(n_1 + n_2) + 1 = 2k + 1$, com $k = n_1 + n_2 \in \mathbb{N}$, uma vez que $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$. Desta feita, na relação de equivalência ρ os números pares se relacionam entre si e os números ímpares se relacionam entre si, isto é, ρ determina uma partição de $\mathbb{N}$ em duas classes de equivalências: uma composta só de números pares e uma outra composta só de números ímpares. Então:

- $[2] = [4] = \dots = \{2n : n \in \mathbb{N}\};$
- $[1] = [3] = \dots = \{2n+1 : n \in \mathbb{N}\}.$

Exercício:

Sejam $S = Q = \{a/b : a, b \in \mathbb{Z} \text{ e } b \neq 0\}$ e a relação ρ definida em S , tal que: $a/b \rho c/d \leftrightarrow ad = bc$. Mostre que ρ é uma relação de equivalência e determine as partições de S determinada por ρ .

Congruência módulo n : sejam $n \in \mathbb{N}$ e $S = \mathbb{Z}$. Define-se em $\mathbb{Z}$ uma relação ρ do seguinte modo: para $a, b \in \mathbb{Z}$

$a \rho b \leftrightarrow a \equiv b \pmod{n} \leftrightarrow a - b = kn$, para algum $k \in \mathbb{Z}$.

ρ é uma relação de equivalência, denominada congruência módulo n .

Verificação:

Reflexividade: $\forall a \in \mathbb{Z}, a - a = 0 = 0 \cdot n$ e $0 \in \mathbb{Z}$, então $a \rho a$.

Simetria: Para $a, b \in \mathbb{Z}$, se $a \rho b \leftrightarrow a - b = kn$, para algum $k \in \mathbb{Z}$, então $b - a = -kn = k'n$, com $k' = -k \in \mathbb{Z}$. Mas $b - a = k'n$, com $k' \in \mathbb{Z} \leftrightarrow b \rho a$. Logo, se $a \rho b \Rightarrow b \rho a$.

Transitividade: Para $a, b, c \in \mathbb{Z}$, se $a \rho b$ e $b \rho c$, então para alguns $k, k' \in \mathbb{Z}$, $a - b = kn$ e $b - c = k'n$. Ora, $a - b = kn \Leftrightarrow b = a - kn$, então $b - c = k'n \Leftrightarrow a - kn - c = k'n \Leftrightarrow a - c = (k' + k)n \Leftrightarrow a - c = k''n$, com $k'' \in \mathbb{Z}$, pois sendo $k, k' \in \mathbb{Z} \Rightarrow k + k' = k'' \in \mathbb{Z}$. Ora $a - c = k''n, k'' \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow a \rho c$.

Muito importante: para $n \in \mathbb{N}$, a congruência módulo n determina uma partição de $\mathbb{Z}$ em n classes de equivalências. os números inteiros não negativos,

$0, 1, 2, \dots, n-1$

pertencem a classes de equivalência diferentes, isto é, as classes de equivalências módulo n são:

$[r]$, com $r \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$.

Seja um número arbitrário $a \in \mathbb{Z}$:

$a \in [r] \leftrightarrow a = kn + r$, para algum $k \in \mathbb{Z}$,

ou seja,

$[r] = \{kn + r : k \in \mathbb{Z}\}$.

Exemplo: seja ρ a congruência módulo 5 em $\mathbb{Z}$. Então existem 5 classes de equivalência que podem ser representadas por:

- $[0] = \{5k : k \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, -20, -15, -10, -5, 0, 5, 10, 15, 20, \dots\}$.
- $[1] = \{5k + 1 : k \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, -19, -14, -9, -4, 1, 6, 11, 16, 21, \dots\}$.
- $[2] = \{5k + 2 : k \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, -18, -13, -8, -3, 2, 7, 12, 17, 22, \dots\}$.
- $[3] = \{5k + 3 : k \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, -17, -12, -7, -2, 3, 8, 13, 18, 23, \dots\}$.
- $[4] = \{5k + 4 : k \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, -16, -11, -6, -1, 4, 9, 14, 19, 24, \dots\}$.

$$588 = 5 \times 117 + 3 \leftrightarrow 588 \in [3].$$

$$-588 = 5 \times (-118) + 2 \leftrightarrow -588 \in [2].$$

Exemplo: para a relação de equivalência ρ no conjunto $\{a, b, c\}$, definida por $\rho = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, c), (c, a)\}$:

- $[a] = \{a, c\} = [c]$;
- $[b] = \{b\}$

Exemplo: Dada as partições $\{a, b, c\}$ e $\{d, e\}$ determinadas pela relação de equivalência ρ no conjunto $A = \{a, b, c, d, e\}$. Determinar os pares ordenados de ρ .

A classe de equivalência $[a] = [b] = [c] = \{a, b, c\}$, deriva dos pares ordenados: (a, a) , (b, b) , (c, c) , (a, b) , (b, a) , (a, c) , (c, a) , (b, c) e (c, b) .

A classe de equivalência $[d] = [e] = \{d, e\}$, deriva dos pares: (d, d) , (e, e) , (d, e) e (e, d) .

Logo, $\rho = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, a), (a, c), (c, a), (b, c), (c, b), (d, d)\} \cup \{(d, d), (e, e), (d, e), (e, d)\}$.

Conclusão

As operações binárias num conjunto S podem satisfazer-se determinadas propriedades. reflexividade, simetria, transitividade e anti-simetria.

De entre as relações binárias pode-se destacar a ordenação parcial, a ordenação total e a relação de equivalência.

Máximo, mínimo, maximal e minimal definem-se em conjuntos parcialmente ordenados.

O diagrama de Hasse é uma forma de representar graficamente ordenação parcial e ordenação total definida num conjunto finito. A partir do diagrama de Hasse de uma ordenação pode-se constituir o conjunto dos pares ordenados dessa ordenação.

Avaliação

1. (Para cada uma das seguintes relações binárias definidas no conjunto N , indique os pares ordenados que a pertencem:
 - a. $x \rho y \leftrightarrow x+y < 7$; $(1,3), (2,5), (3,3), (4,4)$.
 - b. $x \rho y \leftrightarrow x=y+2$; $(0,2), (4,2), (6,3), (5,3)$.
 - c. $x \rho y \leftrightarrow 2x+3y=10$; $(5,0), (2,2), (3,1), (1,3)$.
 - d. $x \rho y \leftrightarrow y$ é um quadrado perfeito; $(1,1), (4,2), (3,9), (25,5)$.
2. Para cada uma das seguintes relações binárias definidas no conjunto Z , indique os pares ordenados que a pertencem:
 - a. $x \rho y \leftrightarrow x$ divide y ; $(2,6), (3,5), (8,4), (4,8)$.
 - b. $x \rho y \leftrightarrow \text{mdc}(x,y)=7$; $(28,14), (7,7), (10,5), (21,14)$.
 - c. $x \rho y \leftrightarrow x^2+y^2=z^2$, para algum $z \in Z$; $(1,0), (3,9), (2,2), (3,4)$.
3. Indique os pares ordenados que satisfazem cada uma das relações binárias seguintes:
 - a. ρ é relação binária em Z , $x \rho y \leftrightarrow x=-y$; $(1,-1), (2,2), (-3,3), (-4,-4)$.
 - b. ρ é relação binária em N , $x \rho y \leftrightarrow x$ é primo, $(19,7), (21,4), (33,13), (41,16)$.
 - c. ρ é relação binária em Q , $x \rho y \leftrightarrow x \leq 1/y$, $(1,2), (-3,-5), (-4,12), (1/2, 1/3)$.
 - d. ρ é uma relação binária em N^2 , $(x,y) \rho (u,v) \leftrightarrow x+u=y+v$; $((1,2),(3,2)), ((4,5),(0,1))$.
4. Para cada uma das relações binárias definidas em S , abaixo indicadas, diga se é um-para-um, um-para-muitos, muitos-para-um ou muitos-para-muitos.
 - a. $S=N$ e $x \rho y \leftrightarrow x=y+1$.
 - b. $S=N$ e $\rho=\{(1,2),(1,4),(1,6),(2,3),(4,3)\}$.
 - c. S é a família de todos os subconjuntos de $A=\{1,2,3\}$ e $A \rho B \leftrightarrow |A|=|B|$.
 - d. $S=N$ e $\rho=\{(9,7),(6,5),(3,6),(8,5)\}$.
 - e. $S=R$ e $x \rho y \leftrightarrow x=5$.
 - f. $S=N$ e $\rho=\{(2,7),(8,4),(2,5),(7,6),(10,1)\}$.
5. Sejam ρ e σ relações binárias em N definidas por $x \rho y \leftrightarrow x$ divide y , $x \sigma y \leftrightarrow 5x \leq y$. Indique os pares ordenados que satisfazem cada uma das seguintes relações:

- a. $\rho \cup \sigma; (2,6), (3,17), (2,1), (0,0)$.
 - b. $\rho \cap \sigma; (3,6), (1,2), (2,12)$.
 - c. $\rho'; (1,5), (2,8), (3,15)$.
 - d. $\sigma'; (1,1), (2,10), (4,8)$.
6. Seja $S=\{0,1,2,4,6\}$. Verifique se cada uma das relações binárias que se seguem é reflexiva, simétrica, transitiva e/ou anti-simétrica:
- a. $\rho=\{(0,0),(1,1),(2,2),(4,4),(6,6),(0,1),(1,2),(2,4),(4,6)\}$;
 - b. $\rho=\{(0,1),(1,0),(2,4),(4,2),(4,6),(6,4)\}$;
 - c. $\rho=\{(0,1),(1,2),(0,2),(2,0),(2,1),(1,0),(0,0),(1,1),(2,2)\}$;
 - d. $\rho=\{(0,0),(1,1),(2,2),(4,4),(6,6),(4,6),(6,4)\}$;
 - e. $\rho=\emptyset$.
- (6.1) Encontre o fecho simétrico, reflexivo e transitivo de cada uma destas relações.
7. Verifique se cada uma das seguintes relações binárias em conjuntos indicados S é reflexiva, simétrica, anti-simétrica e/ou transitiva:
- a. $S=\mathbb{N}$ e $x \rho y \leftrightarrow x.y$ é par.
 - b. $S=\mathbb{N}$ e $x \rho y \leftrightarrow x$ é ímpar.
 - c. $S=\{0,1,2,3,4,5\}$ e $x \rho y \leftrightarrow x+y=5$.
 - d. S é a famílias de subconjuntos de $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ e $A \rho B \leftrightarrow |A|=|B|$.
 - e. S é a famílias de subconjuntos de $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ e $A \rho B \leftrightarrow |A| \neq |B|$.
 - f. $S=\mathbb{N}^2$ e $(x,y) \rho (u,v) \leftrightarrow x \leq u$ e $y \leq v$.
- (7.1) Quais destas relações são relações de equivalência? Para cada uma das relações de equivalência indique as classes de equivalência.
8. Seja S um conjunto com n elementos, $n \in \mathbb{N}$. Quantas relações binárias pode-se definir em S ?
9. Faça o diagrama de Hasse para cada uma das seguintes ordenações parciais:
- a. $S=\{a,b,c\}$, $\rho=\{(a,a),(b,b),(c,c),(a,b),(b,c),(a,c)\}$.
 - b. $S=\{a,b,c,d\}$, $\rho=\{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(a,b),(a,c)\}$.
 - c. $S=\{\emptyset,\{a\},\{a,b\},\{c\},\{a,c\},\{b\}\}$, $A \rho B \leftrightarrow A \leq B$.

(9.1) Para cada uma destas ordenações parciais indique o elemento mínimo, os elementos minimais, o elemento máximo e os elementos maximais, caso existam.

10. Considere a relação ρ definida no conjunto $A=\{1,2,3,4,5\}$ por: $\rho=\{(1,1),(2,2),(1,2),(2,1),(1,3),(3,1),(3,2),(2,3),(3,3),(4,4)\} \cup \{(5,5),(4,5),(5,4)\}$. Determine as classes de equivalências determinadas por ρ em A .
11. Para a relação de equivalência módulo 5 em $\mathbb{Z}$, indique os elementos da classe de equivalência $[-3]$.
12. Considere as partições $\{1,2\}$ e $\{3,4\}$ determinada pela relação de equivalência ρ no conjunto $A=\{1,2,3,4\}$. Determine os pares ordenados de ρ .

Actividade 1.2 - Funções e Matrizes

Introdução

Função é um caso particular de uma relação. Ela estabelece relações muito interessantes entre elementos de conjuntos. Tem diversas aplicações, principalmente na área de criptografia, que garante a segurança nas transações que se fazem utilizando os computadores. As funções são utilizadas também para medir o tempo de execução de um algoritmo.

Matriz é um caso particular de função e é utilizada para representar várias situações em Matemática, na área de informática em particular e nas situações do dia-a-dia. O estudo de matriz booleana ganha especial interesse pois as suas entradas são zeros e uns.

Detalhes da atividade

Função: Dados os conjuntos A e B , uma função f de A para B , $f: A \rightarrow B$, é uma correspondência que a cada elemento x do conjunto A associa um e um só elemento $f(x)$ do conjunto B . Equivalente, uma função de A para B , $f: A \rightarrow B$, é um subconjunto do produto cartesiano $A \times B$ onde cada elemento $a \in A$ aparece uma vez só como primeiro componente de um par ordenado. Neste caso, o conjunto A é o domínio e o conjunto B é o contradomínio da função f . Se (a,b) pertence a f , então b denota-se por $f(a)$; diz-se que $b=f(a)$ é a imagem de a pela função f , que a é uma pré-imagem de $b=f(a)$ pela função f e que f faz corresponder o elemento a ao elemento b .

$S \subseteq A$, então $f(S)=\{f(a):a \in S\}$ e se $U \subseteq B$, então $f^{-1}(U)=\{a:f(a) \in U\}$.

Exemplo. Para cada uma das relações abaixo indicadas, indique aquela que é uma função e justifique por que razão alguma delas não é uma função:

$f: A \rightarrow B$, onde $A=B=\{1,2,3\}$ e $f=\{(1,1),(2,3),(3,1),(2,1)\}$.

$g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$, onde g é definida por $g(x)=|x|$, $\forall x \in \mathbb{Z}$.

$h: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, onde h é definida por $h(x)=x-4$, $\forall x \in \mathbb{N}$.

$m: A \rightarrow B$, onde A é o conjunto dos polinómios do segundo grau na variável x e com coeficientes em $\mathbb{Z}$, $B=\mathbb{Z}$ e m é definida por $m(ax^2+bx+c)=b+c$, $\forall ax^2+bx+c \in A$.

Resolução. Na alínea a., verifica-se que o elemento 2 aparece duas vezes como primeiro elemento de pares ordenados de f , logo f não é função. Na alínea b., nota-se que $0 \in \mathbb{Z}$, mas $|0|=0 \notin \mathbb{N}$, logo g não é função pois 0 não é primeiro elemento de qualquer par ordenado determinado por g . Na alínea c., os elementos 1, 2, 3 e 4 pertencentes a $\mathbb{N}$ não são primeiros elementos em qualquer par ordenado determinado por h , logo h não é uma função. Nota-se que: $x \in \mathbb{N}$ e $x-4 \notin \mathbb{N}$ é equivalente a $x \in \mathbb{N}$ e $x-4 \leq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{N}$ e $x \leq 4 \Leftrightarrow x \in \{1,2,3,4\}$. Na alínea d., cada elemento do conjunto A aparece uma só vez como primeiro elemento de um par ordenado determinado por m , pois para todo elemento $ax^2+bx+c \in A$, $b+c$ é um inteiro único.

Exemplo. Qual a imagem de $2x^2+3x-4$ pela função m , definida no exercício anterior? Quais são as pré-imagens de -5?

Resolução. $m(2x^2+3x-4)=3-4=-1$, ou seja, imagem de $2x^2+3x-4$ é -1. Pré-imagens de -5: $f(-5)=\{ax^2+bx+c \in A: f(ax^2+bx+c)=-5\}$, isto equivale a $b+c=-5$ e $a \in \mathbb{Z}$ e $a \neq 0 \Leftrightarrow b=-5-c$ e $a, c \in \mathbb{Z}$ e $a \neq 0$. Então, pré-imagens de -5 são os polinómios da forma $ax^2+(-5-c)x+c$, tal que $a, c \in \mathbb{Z}$ e $a \neq 0$.

Igualdade de funções: duas funções são iguais se têm o mesmo domínio, o mesmo contradomínio e a mesma associação de elementos do domínio com elementos do contradomínio.

Exemplo. Sejam os conjuntos $A=\{1,2,3\}$ e $B=\{1,4,9\}$. As funções $f:A \rightarrow B$, definida por $f(x)=x^2$, $\forall x \in A$, e $g:A \rightarrow B$, definida por $g(x)=(\sum_{k=1}^x (4k-2))/2$, $\forall x \in A$, são iguais. Pois $f(1)=g(1)=1$, $f(2)=g(2)=4$ e $f(3)=g(3)=9$.

Propriedades de funções: Seja $f:A \rightarrow B$ uma função. Diz-se que f é sobrejectiva se o contradomínio de f coincide com o conjunto de chegada B . Diz-se que f é injectiva se não há qualquer elemento de B que seja imagem de mais de um elemento de A . Diz-se que f é bijectiva se ela é simultaneamente injectiva e sobrejectiva.

Nota: seja $f:A \rightarrow B$ uma função. f é injectiva se sempre que $f(x)=f(y)$, então $x=y$. f é sobrejectiva se para todo elemento $y \in B$, então existe um elemento $x \in A$ tal que $f(x)=y$.

Exemplo. A função $f:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x)=x^3$, $\forall x \in \mathbb{R}$, é sobrejectiva. Pois ela é injectiva, isto é: $f(x)=f(y) \Leftrightarrow x^3=y^3 \Leftrightarrow x=y$, logo em f sempre que $f(x)=f(y)$, então $x=y$. A função f é sobrejectiva também. Pois para todo $y \in \mathbb{R}$, $f(x)=y \Leftrightarrow x^3=y \Leftrightarrow x=\sqrt[3]{y} \in \mathbb{R}$, isto é, existe um $x=\sqrt[3]{y} \in \mathbb{R}$ tal que $f(x)=y$.

Exemplo. A função $g:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x)=x^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$, não é injectiva. Ou seja: $g(x)=g(y) \Leftrightarrow x^2=y^2 \Leftrightarrow |x|=|y| \Leftrightarrow x=y$ ou $x=-y$, isto é, para todo $x \in \mathbb{R}$, $g(x)=g(-x)$, equivalentemente x^2 é imagem de x e de $-x$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Ela não é sobrejectiva também, pois se $y \in \mathbb{R}$ e $g(x)=y$, então $y=x^2$ o que equivale dizer que y é não negativa, isto é, o contradomínio de g é

diferente de R que é o conjunto de chegada.

Composição de funções: sejam $f:A \rightarrow B$ e $g:B \rightarrow C$ funções. A composição de função g após f é uma função $g \circ f:A \rightarrow C$, definida por $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Exemplo. Sejam as funções $f:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ definida por $f(x) = x^2$ e $g:\mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ definida por $g(x) = \sqrt{x}$. Determine $g \circ f$.

Resolução. $g \circ f:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$, definida por $g(f(x)) = \sqrt{(x^2)} = |x|, \forall x \in \mathbb{R}$.

Propriedade: Composição de duas funções bijectivas é bijectiva.

Função identidade: Dado um conjunto A , a função $i_A:A \rightarrow A$ definida por $i(x) = x, \forall x \in A$, denomina-se por função identidade em A .

Funções inversas. Sejam $f:A \rightarrow B$ e $g:B \rightarrow A$ funções. Diz-se que f é inversa de g e que g é inversa de f , se $f \circ g = i_B$ e $g \circ f = i_A$. Neste caso, diz-se que f e g são funções inversas, e escreve-se $f = g^{-1}$ e $g = f^{-1}$, e que cada uma delas é invertível.

Propriedades.

- Uma função $f:A \rightarrow B$ tem inversa se e somente se f é bijectiva.
- Se uma função $f:A \rightarrow B$ tem inversa, a Inversa é única.

Exemplo. Seja $f:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 3x + 4$. Verifique se f tem inversa e, em caso afirmativo, determine f^{-1} .

Resolução. $f(x) = f(y) \Leftrightarrow 3x + 4 = 3y + 4 \Leftrightarrow 3x = 3y \Leftrightarrow x = y$. Logo f é injectiva. Para $z \in \mathbb{R}$, $z = f(x) \Leftrightarrow 3x + 4 = z \Leftrightarrow x = (z - 4)/3 \in \mathbb{R}$, isto é, todo elemento do conjunto de chegada é imagem, equivalentemente, f é sobrejectiva. Sendo f injectiva e sobrejectiva, então f é bijectiva. Logo existe $f^{-1} = g$. Então $g:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $f \circ g = i_{\mathbb{R}} \Leftrightarrow f(g(x)) = x, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 3g(x) + 4 = x, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow g(x) = (x - 4)/3, \forall x \in \mathbb{R}$. Então f^{-1} é a função $g:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = (x - 4)/3, \forall x \in \mathbb{R}$.

Exercícios.

- Sejam as funções $f:\mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ definida por $f(x) = x^2$ e $g:\mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ definida por $g(x) = \sqrt{x}$. Determine $f \circ g$.
- Verifique que a função $g:\mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ definida por $g(x) = \sqrt{x}$ é invertível e determine g^{-1} .

Permutação de um conjunto: Permutação do conjunto A é uma função bijectiva $f:A \rightarrow A$. Ao conjunto S_A de todas as permutações do conjunto A chama-se conjunto de permutações de A .

Nota. Seja A um subconjunto de $\mathbb{N}$. Uma permutação em A costuma-se representar por uma matriz. Por exemplo, para $A = \{1, 2, 3, 4\}$, a permutação $f = \{(1, 2), (2, 4), (3, 1), (4, 3)\}$ pode ser representada por:

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Uma forma abreviada de escrever a permutação f é por intermédio de um ciclo, isto é:

$$f = (1, 2, 4, 3)$$

Neste caso f faz corresponder cada elemento com aquele que está a sua direita e faz corresponder o último elemento com o primeiro. Se houver algum elemento do conjunto A que não estiver no ciclo, então f fará corresponder esse elemento consigo próprio. Por exemplo:

$$f = (1, 3, 4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Composição de permutações num conjunto A : por ser permutações num determinado conjunto A funções cujos domínios e contradomínios são todos iguais a A , então pode-se determinar a composição de permutações.

Exercícios.

Seja $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e sejam $f, g \in S_A$. Determine $f \circ g$ e $g \circ f$ para cada um dos casos apresentados:

- $f = (5, 2, 3)$; $g = (3, 4, 1)$. Apresente o resultado na forma de matriz e na forma de ciclo.
- $f = (1, 2, 3, 4)$; $g = (3, 2, 4, 5)$. Apresente o resultado na forma de matriz.
- $f = (1, 3)$; $g = (2, 5)$. Apresente o resultado na forma de matriz.

A laia de exemplo, resolve-se o exercício da alínea a. Resolução: determinação de $f \circ g$:
 $f(g(1)) = f(3) = 5$; $f(g(2)) = f(2) = 3$; $f(g(3)) = f(4) = 4$; $f(g(4)) = f(1) = 1$; $f(g(5)) = f(5) = 2$. Então:

$$f \circ g = (1, 5, 2, 3, 4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Determinação de $g \circ f$: $g(f(1)) = g(1) = 3$; $g(f(2)) = g(3) = 4$; $g(f(3)) = g(5) = 5$; $g(f(4)) = g(4) = 1$; $g(f(5)) = g(2) = 2$.
 Então:

$$g \circ f = (1, 3, 5, 2, 4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Permutação Identidade: a permutação num conjunto A que cada elemento de A corresponde consigo próprio, chama-se permutação identidade, e representa-se por i_A . Nota-se que para toda permutação $f \in S_A$ tem-se:

$$f \circ i_A = i_A \circ f = f.$$

Nota: nem sempre se consegue representar uma permutação por intermédio de um ciclo. No entanto, se A é finito e se $f \in S_A$ e $f \neq i_A$ pode ser escrita como composição de ciclos disjuntos. Por exemplo:

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (1, 4) \circ (3, 5)$$

Matriz: Dados um conjunto P e dois números naturais (inteiros positivos) n e m , uma matriz de dimensão $m \times n$ é uma função $A: \{1, 2, 3, \dots, m\} \times \{1, 2, 3, \dots, n\} \rightarrow P$, definida por $A((i, j)) = a_{ij}$, para todo $(i, j) \in \{1, 2, 3, \dots, m\} \times \{1, 2, 3, \dots, n\}$.

Representação. Geralmente não se representa uma matriz através do símbolo funcional.

Utiliza-se as seguintes anotações para uma matriz A de dimensão $m \times n$:

$$A = [a_{ij}]_{m \times n} \quad \text{ou} \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Para todo $(i, j) \in \{1, 2, 3, \dots, m\} \times \{1, 2, 3, \dots, n\}$, o elemento $a_{ij} \in P$ denomina-se por entrada.

Exemplo: as médias de temperaturas (em grau fahrenheit) em três cidades, de um determinado país, em cada mês dum determinado ano, podem ser representados por uma matriz de dimensão 3×12 . Nesse caso, cada linha registra as médias de temperaturas de uma determinada cidade, enquanto que cada coluna registra as médias de temperaturas nas três cidades num determinado mês:

$$A = \begin{bmatrix} 23 & 26 & 38 & 47 & 58 & 71 & 78 & 77 & 69 & 55 & 39 & 33 \\ 14 & 21 & 33 & 38 & 44 & 57 & 61 & 59 & 49 & 38 & 25 & 21 \\ 35 & 46 & 54 & 67 & 78 & 86 & 91 & 94 & 89 & 75 & 62 & 51 \end{bmatrix}$$

Neste sentido, a entrada a_{34} representa a média da temperatura da “terceira cidade” no mês de Abril.

Matriz linha. Uma matriz A denomina-se por matriz linha, se ela tiver uma linha e qualquer número de colunas.

Matriz coluna. Uma matriz A denomina-se por matriz coluna, se ela tiver uma coluna e um número qualquer de linhas.

Matriz quadrada. Uma matriz $A = [a_{ij}]$ em que o número de linhas m é igual ao número de colunas n denomina-se por matriz quadrada de ordem n . As entradas a_{ii} de uma matriz quadrada são denominadas entradas principais, e o seu conjunto é denominado diagonal principal da matriz.

Matriz triangular superior. Uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]$, de ordem n , denomina-se por triangular superior, $\forall (i, j), i > j$, a entrada $a_{ij} = 0$, ou seja, as entradas abaixo da diagonal principal são todos iguais a zero e as restantes entradas são escalares arbitrários.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n-1} & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1n-1} & a_{n-1n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Matriz triangular inferior. Uma matriz quadrada $A=[a_{ij}]$, de ordem n , denomina-se por triangular inferior, se $\forall(i,j), i < j$, a entrada $a_{ij}=0$, ou seja, as entradas acima da diagonal principal são todos iguais a zero e as restantes entradas são escalares arbitrários.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-11} & a_{n-12} & a_{n-13} & \dots & a_{n-1n-1} & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Matriz diagonal. Uma matriz quadrada A diz-se diagonal, se $\forall(i,j), i \neq j$, a entrada $a_{ij}=0$, ou seja, as entradas principais são escalares arbitrários enquanto que as outras entradas são todos iguais a zero.

Matriz escalar. Uma matriz escalar A é uma matriz diagonal em que toda as entradas principais são iguais a um escalar qualquer.

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Uma matriz diagonal de ordem n representa-se por $\text{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, onde $\forall i, \lambda_i$ é um escalar arbitrário.

Matriz escalar. Uma matriz escalar é uma matriz diagonal em que todas as entradas diagonais são iguais, ou seja:

$$A = \text{Diag} \left(\underbrace{\lambda, \lambda, \dots, \lambda}_{n \text{ componentes}} \right)$$

Matriz identidade de ordem n . Uma matriz identidade A de ordem n é uma matriz escalar em que cada elemento diagonal é igual a 1, ou seja:

$$A = \text{Diag} \left(\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{n \text{ componentes}} \right)$$

Uma matriz identidade de ordem n representa-se por I_n .

Exemplo.

$$I_3 = \text{Diag}(1, 1, 1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Igualdade de matrizes. Sejam $A=[a_{ij}]$ e $B=[b_{ij}]$ matrizes. A é igual a B se:

- o número de linhas de A é igual ao número de linhas de B e o número de colunas de A é igual ao número de colunas de B, ou seja, A e B têm dimensões iguais;
- Para todo (i,j) , $a_{ij}=b_{ij}$.

Exemplo: Sejam as matrizes sobre o conjunto dos números reais:

$$A = \begin{bmatrix} x & 4 \\ 1 & y \\ z & 0 \end{bmatrix} \quad e \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 6 \\ 2 & w \end{bmatrix}$$

Determinar os valores reais de x,y,z,w de modo que $A=B$.

Resolução. Como as matrizes A e B têm as mesmas dimensões, então $A=B$ se para todo $(i,j) \in \{1,2,3\} \times \{1,2\}$, $a_{ij}=b_{ij}$. Tem-se então:

$x=3$; $y=6$; $z=2$ e $w=0$.

Soma de matrizes. Para adicionar duas matrizes $A=[a_{ij}]$ e $B=[b_{ij}]$ é necessário que tenham as mesmas dimensões. Sendo assim, a soma $A+B$ é igual a uma matriz $C=[c_{ij}]$ tal que, para todo (i,j) , $a_{ij}+b_{ij}=c_{ij}$.

Exemplo. Sejam matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 6 & -3 & 2 \end{bmatrix} \quad e \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 12 & 15 \\ 18 & -9 & 6 \end{bmatrix}.$$

Então,

$$A+B = \begin{bmatrix} 1+3 & 4+12 & 5+15 \\ 6+18 & -3+(-9) & 2+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 16 & 20 \\ 24 & -12 & 8 \end{bmatrix}.$$

Multiplicação de duas matrizes. O produto AB de duas matrizes $A=[a_{ij}]$ e $B=[b_{ij}]$ é possível se o número de colunas de A é igual ao número de linhas de B. isto é, se A tem dimensão $m \times n$, então B tem dimensão $n \times p$, onde m,n,p são números naturais arbitrários.

Se $A=[a_{ij}]_{(m \times n)}$ e $B=[b_{ij}]_{(n \times p)}$, então o produto AB é igual a $C=[c_{ij}]_{(m \times p)}$, onde para todo $(i,j) \in \{1,2,3,\dots,m\} \times \{1,2,3,\dots,p\}$,

$$c_{ij}=a_{i1}.b_{1j}+a_{i2}.b_{2j}+a_{i3}.b_{3j}+\dots+a_{in}.b_{nj}=\sum_{k=1}^n a_{ik}.b_{kj}.$$

Exemplo. Sejam as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \quad e \quad B = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Como o número de colunas de A é igual ao número de linhas de B, então o produto AB é possível realizar-se. Logo:

$$AB = \begin{bmatrix} -1 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 & -1 \cdot (-2) + 2 \cdot 2 & -1 \cdot (-3) + 2 \cdot 3 \\ 3 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 & 3 \cdot (-2) + 1 \cdot 2 & 3 \cdot (-3) + 1 \cdot 3 \\ 2 \cdot (-1) + (-2) \cdot 1 & 2 \cdot (-2) + (-2) \cdot 2 & 2 \cdot (-3) + (-2) \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 \\ -2 & -4 & -6 \\ -4 & -8 & -12 \end{bmatrix}$$

Multiplicação de um escalar por uma matriz. Seja $A=[a_{ij}]$ uma matriz de dimensão $m \times n$ sobre um conjunto P , e seja um escalar $\lambda \in P$. A multiplicação do escalar λ pela matriz A é uma matriz $C=[\lambda a_{ij}]$, para todo (i,j) pertencente ao conjunto $\{1,2,3,\dots,m\} \times \{1,2,3,\dots,n\}$.

Exemplo. Seja a matriz

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -3 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

e o escalar $\lambda = -3$. Então:

$$\lambda A = -3A = \begin{bmatrix} -3 \cdot (-1) & -3 \cdot 2 & -3 \cdot 3 \\ -3 \cdot (-3) & -3 \cdot 5 & -3 \cdot 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -6 & -9 \\ 9 & -15 & -15 \end{bmatrix}$$

Nota: A matriz $-A = -1A$.

Subtração de matrizes. Sejam A e B matrizes da mesma dimensão, então $A-B=A+(-B)$.

Matriz nula. Uma matriz A diz-se nula se todas as suas entradas são iguais a zero. Uma matriz nula representa-se por O , qualquer que seja a sua ordem.

Propriedades de operações com matrizes sobre o conjunto dos números reais.

Adição. Sejam A,B,C matrizes de dimensão $m \times n$:

- A.1. $(A+B)+C=A+(B+C)$;
- A.2. $A+B=B+A$;
- A.3. $A+O=A$; onde O é a matriz nula de ordem $m \times n$;
- A.4. $A+(-A)=O$;
- A.5. $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$, para todo escalar real λ ;
- A.6. $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$, para quaisquer escalares reais λ e μ .
- A.7. $(\lambda\mu)A=\lambda(\mu A)$

Multiplicação.

- M.1. $(AB)C=A(BC)$, onde A tem dimensão $m \times n$, B tem dimensão $n \times p$ e C tem dimensão $p \times r$;
- M.2. $A(B+C)=AB+AC$, onde A tem dimensão $m \times n$ e B,C têm dimensão $n \times p$;
- M.3. $(A+B)C=AC+BC$, A,B têm dimensão $m \times n$ e C tem dimensão $n \times p$;

M.4. $(\lambda\mu)(AB)=(\lambda A)(\mu B)$, onde A tem dimensão $m \times n$ e B tem dimensão $n \times p$.

M.5. Seja A uma matriz de dimensão $m \times n$. Então, $A I_n = I_m A = A$.

Nota. Nota-se que, se A é uma matriz de dimensão $m \times n$, então o produto AB e BA são possíveis se e só se B tem dimensão $n \times m$. Neste caso AB é uma matriz quadrada de ordem m, enquanto que BA é uma matriz quadrada de ordem n. Daí que, a existência do produto AB não garante a existência do produto BA. Também, a condição necessária para que AB seja igual a BA é que as matrizes A e B sejam quadradas da mesma ordem.

Matrizes comutáveis. Duas matrizes quadradas A e B com a mesma ordem são comutáveis se $AB=BA$.

Exemplo. $\forall \lambda, \beta \in \mathbb{R}$, as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} \lambda & \beta \\ \beta & \lambda - 2\beta \end{bmatrix}$$

são comutáveis. Com efeito:

$$AB = BA = \begin{bmatrix} \lambda + \beta & \lambda - \beta \\ \lambda - \beta & \lambda + 3\beta \end{bmatrix}$$

Transposta de uma matriz. Transposta de uma matriz $A=[a_{ij}]$ de dimensão $m \times n$ é uma matriz $A^t=[b_{ij}]$ de dimensão $n \times m$, tal que $\forall (i,j)$, $b_{ij}=a_{ji}$.

Propriedades.

$$(A^t)^t = A.$$

$$(A+B)^t = A^t + B^t.$$

$$(AB)^t = B^t A^t.$$

Matriz simétrica. Uma matriz quadrada $A=[a_{ij}]$, de ordem n, é simétrica se $A=A^t$, ou seja, $\forall (i,j)$, $a_{ij}=a_{ji}$.

Matriz anti-simétrica. Uma matriz quadrada $A=[a_{ij}]$, de ordem n, é anti-simétrica se $A=-A^t$, ou seja, $\forall (i,j)$, $a_{ij}=-a_{ji}$.

Matriz regular, ou invertível. Uma matriz A é regular, ou invertível, se e só se ela é quadrada, de ordem n, e existir uma matriz quadrada B, da mesma ordem, tal que $AB=BA=I_n$. Neste caso diz-se que B é inversa de A, e escreve-se $B=A^{-1}$; da mesma forma, diz-se que A é inversa de B, e escreve-se, $A=B^{-1}$.

Exemplo. A matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

é regular e a sua inversa é

$$B = A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz booleana. Matriz booleana é uma matriz sobre o conjunto $\{0,1\}$, ou seja, cada entrada é igual a 1 ou a 0.

Sabe-se que a multiplicação e a adição booleana, define-se, respectivamente por:

$$x \times y = x \wedge y = \min\{x, y\};$$

$$x + y = x \vee y = \max\{x, y\},$$

onde $x, y \in \{0,1\}$.

Multiplicação de matrizes booleanas. Sejam as matrizes booleanas $A = [a_{ij}]_{(m \times n)}$ e $B = [b_{ij}]_{(n \times p)}$. O produto booleano $A \times B$ é uma matriz $C = [c_{ij}]_{(m \times p)}$, onde $\forall (i,j) \in \{1,2,3,\dots,m\} \times \{1,2,\dots,p\}$,

$$c_{ij} = (a_{i1} \wedge b_{1j}) \vee (a_{i2} \wedge b_{2j}) \vee \dots \vee (a_{in} \wedge b_{nj}) = \bigvee_{k=1}^n (a_{ik} \wedge b_{kj})$$

Outra operações com matrizes booleanas. Sejam as matrizes booleanas $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$, ambas com dimensão $m \times n$. Então:

$A \wedge B$ é uma matriz $C = [c_{ij}]$ de dimensão $m \times n$, também, tal que: $\forall (i,j), c_{ij} = a_{ij} \wedge b_{ij}$.

$A \vee B$ é uma matriz $C = [c_{ij}]$ de dimensão $m \times n$, também, tal que: $\forall (i,j), c_{ij} = a_{ij} \vee b_{ij}$.

Exemplo. Sejam as matrizes booleanas

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Então:

$$A \times B = \begin{bmatrix} (1 \wedge 1) \vee (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 0) & (1 \wedge 0) \vee (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 0) & (1 \wedge 0) \vee (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 1) \\ (0 \wedge 1) \vee (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 0) & (0 \wedge 0) \vee (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 0) & (0 \wedge 0) \vee (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 1) \\ (0 \wedge 1) \vee (0 \wedge 1) \vee (1 \wedge 0) & (0 \wedge 0) \vee (0 \wedge 1) \vee (1 \wedge 0) & (0 \wedge 0) \vee (0 \wedge 1) \vee (1 \wedge 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A \wedge B = \begin{bmatrix} 1 \wedge 1 & 1 \wedge 0 & 0 \wedge 0 \\ 0 \wedge 1 & 1 \wedge 1 & 0 \wedge 1 \\ 0 \wedge 0 & 0 \wedge 0 & 1 \wedge 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A \vee B = \begin{bmatrix} 1 \vee 1 & 1 \vee 0 & 0 \vee 0 \\ 0 \vee 1 & 1 \vee 1 & 0 \vee 1 \\ 0 \vee 0 & 0 \vee 0 & 1 \vee 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Conclusão

O conceito de função é de extrema importância, pois muitas relações entre conjuntos são nada mais, nada menos, que funções.

A composição de funções bijectivas é bijectiva. Nota-se que uma função admite inversa se e só se ela for bijectiva.

Permutações são funções bijectivas cujos domínios e contradomínios são iguais a um determinado conjunto.

As matrizes são utilizadas para representar um conjunto de dados na forma de uma tabela rectangular. Pode-se multiplicar e adicionar matrizes, no entanto deve-se saber em que condições. As operações com matrizes booleanas devem obedecer as regras de operações booleanas.

Avaliação

1. Sejam $S=\{0,2,4,6\}$ e $T=\{1,3,5,7\}$. Verifique se cada um dos conjuntos de pares ordenados é uma função de domínio S e contradomínio T . Em caso afirmativo, verifique se é injectiva e se é sobrejectiva.
 - a. $\{(0,2),(2,4),(4,6),(6,0)\}$;
 - b. $\{(6,3),(2,1),(0,3),(4,5)\}$;
 - c. $\{(2,3),(4,7),(0,1),(6,5)\}$;
 - d. $\{(2,1),(4,5),(6,3)\}$;
 - e. $\{(6,1),(0,3),(4,1),(0,7),(2,5)\}$.
2. Determine a função inversa de cada uma das bijecções do exercício anterior.
3. Quais das seguintes correspondências são funções para domínio e conjunto de chegada dados? Quais são funções injectivas e/ou sobrejectivas? Determine as inversas das funções sobrejectivas.
 - a. $f:Z \rightarrow N$, onde f é definida por $f(x)=x^2+1$;
 - b. $f:Z \rightarrow Q$, onde f é definida por $f(x)=1/x$;
 - c. $f:Z \times N \rightarrow Q$, onde f é definida por $f(z,n)=z/(n+1)$;

d. $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, onde f é definida por $f(x) = 2^x$;

e. $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, onde f é definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{se } x \text{ é par} \\ x + 1 & \text{se } x \text{ é ímpar} \end{cases};$$

f. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, onde f é definida por $f(x) = 1/\sqrt{x+1}$;

g. $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, onde f é definida por

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{se } x \text{ é par} \\ x - 1 & \text{se } x \text{ é ímpar} \end{cases};$$

4. Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^n$, onde $n \in \mathbb{N}$. Para que valores de n f é bijectiva?

5. Sejam $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definida por $f(x) = x + 1$ e $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definida por $g(x) = 3x$ funções. Determine:

a. $g \circ f(5)$

b. $f \circ g(5)$

c. $g \circ f(x)$

d. $f \circ g(x)$

e. $f \circ f(x)$

f. $g \circ g(x)$

6. Sejam $f: S \rightarrow T$ e $g: T \rightarrow U$ funções.

a. Mostre que se $g \circ f$ é injectiva, então f é injectiva.

b. Mostre que se $g \circ f$ é sobrejectiva, então g é sobrejectiva.

7. Seja $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Escreva cada uma das seguintes permutações em A na forma de ciclo:

a. $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

b. $f = \{(1, 4), (2, 5), (3, 2), (4, 3), (5, 1)\}$;

8. Seja $A = \{a, b, c, d\}$. Escreva cada uma das permutações em A na forma de matriz:

a. $f = \{(a, c), (b, b), (c, d), (d, a)\}$;

b. $f = (c, a, b, d)$;

c. $f = (d, b, a)$;

$$d \quad f=(a,b) \circ (b,d) \circ (c,a).$$

9. Seja $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$. Determine cada uma das composições dos ciclos seguintes, que representam permutações em A:

a. $(1,3,4) \circ (5,1,2)$

10. Determine os valores reais de x,y,z de modo que:

$$\begin{bmatrix} x+y & 2x-3y \\ z-w & z+2w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -7 \\ -6 & 6 \end{bmatrix}.$$

11. Sejam $\lambda=3$, $\beta=-2$,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 6 & -1 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Determine:

- $A+D$.
 - $A-D$.
 - C^2 .
 - BD .
 - $(\lambda\beta)C$.
12. Encontre uma matriz B, de modo que o produto BA seja possível, onde

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

13. Determine as matrizes comutáveis com

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

14. Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

Verifique se $B=A^{-1}$.

15. Seja

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \text{ com } ad - bc \neq 0.$$

Mostre que a inversa de A é

$$B = \begin{bmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{bmatrix}.$$

16. Sejam as matrizes booleanas

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Determine $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \times B$, $B \times A$.

17. Prove que para toda matriz A, AA^t é uma matriz simétrica.

Actividade 1.3 - Demonstração por Indução Matemática

Introdução

Para demonstrar proposições em Matemática é necessário dispor de um conjunto de técnicas. Nesta actividade vai analisar-se o método de demonstração por indução finita, que é muito utilizado na Ciência de Computação. Analisa-se também a recursão que está intimamente ligada à indução finita.

Detalhes da actividade

Princípio de Indução Matemática 1. Seja P uma proposição definida no conjunto dos números inteiros positivos N, isto é, para cada $n \in \mathbb{N}$, P é verdadeira ou falsa. Suponha que P tem as seguintes propriedades:

1. $P(1)$ é verdadeira;
2. Para todo $k \in \mathbb{N}$, $P(k+1)$ é verdadeira sempre que $P(k)$ é verdadeira.

Então, P é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo. Mostra-se que a soma dos n primeiros números ímpares é n^2 , isto é:

$$1+3+5+\dots+(2n-1)=n^2.$$

Nota-se que a proposição $P(n)$ é $1+3+5+\dots+(2n-1)=n^2$. Então:

- $P(1)$ é a proposição $1=1^2$, que é verdadeira.
- Hipótese de indução: suponha-se que a proposição $P(k)$ é verdadeira, isto é, $1+3+5+\dots+(2k-1)=k^2$. Então, a proposição $P(k+1)$ é tal que:

$$1+3+5+\dots+(2k-1)+(2(k+1)-1).$$

Como por hipótese, $1+3+5+\dots+(2k-1)=k^2$, então vem:

$$1+3+5+\dots+(2k-1)+(2(k+1)-1)=k^2+(2(k+1)-1)$$

$$=k^2+2k+2-1=k^2+2k+1=((k+1))^2$$

Princípio de Indução Matemática 2. Seja P uma proposição definida no conjunto dos números inteiros positivos N , isto é, para cada $n \in N$, P é verdadeira ou falsa. Suponha que P tem as seguintes propriedades:

- $P(1)$ é verdadeira;
- Para todo $k \in N$ e $k \geq 2$, $P(k)$ é verdadeira sempre que $P(r)$ é verdadeira para todo $1 \leq r < k$.

Então, $P(n)$ é verdadeira para todo número natural n .

Observação.

- Sempre que se quer mostrar que alguma propriedade é verdadeira para todo o número natural, pode-se tentar o princípio de indução matemática, pois poderá ser uma alternativa.
- Algumas vezes se quer provar que a proposição P é verdadeira para o conjunto de inteiros $\{a, a+1, a+2, \dots, a+k, \dots\}$, onde " a " é algum inteiro positivo arbitrário, possivelmente zero. Nesse caso, deve substituir-se " 1 " por " a " em qualquer um dos dois princípios de indução matemática.
- Os "princípios de indução 1 e 2" são equivalentes. Por vezes a aplicação de um, em vez do outro, se encaixa melhor a um determinado tipo de problema.

Exemplo. Seja $P(n)$ a proposição definida no conjunto dos números inteiros maiores que " 2 " por: para todo $n \in N$ e $n \geq 2$, ou n é um número primo ou n é um produto de números primos.

Mostra-se que $P(n)$ é verdadeira utilizando o "princípio de indução matemática 2". Neste caso, deve-se substituir-se o número " 1 " pelo número " 2 " na aplicação do referido princípio, pois a proposição é definida no conjunto $\{2, 3, 4, 5, \dots\}$. Assim sendo tem-se:

- $P(2)$ é verdadeira, pois " 2 " é um número primo.
- Hipótese de indução: para todo $k \in N$ e $k \geq 3$, suponha-se que $P(r)$ é verdadeira para $2 \leq r < k$.

Ora, se “ k ” for um número primo, então $P(k)$ será verdadeira. Caso contrário, “ k ” será um número composto. Nesse caso, existirá dois números inteiros r_1 e r_2 , tais que $1 < r_1 < k$, $1 < r_2 < k$ e $k = r_1 \times r_2$. Como os números “ r_1 ” e “ r_2 ” vão satisfazer a hipótese de indução, então ou serão ambos números primos, ou ambos produtos de números primos ou um deles será um número primo e o outro produto de números primos. De qualquer um destes casos, resultará que ou “ k ” será um número primo ou “ k ” será um produto de números primos, ou seja, $P(k)$ será verdadeira. Logo, $P(n)$ é verdadeira, para todo número natural $n \geq 2$.

Progressão geométrica. é uma sequência de termos, onde existe um termo inicial “ a ”, e cada termo subsequente é obtido pelo produto do anterior por um valor constante “ r ”.

Exercícios. Sejam “ n ” termos de uma progressão geométrica de termo inicial “ a ” e razão “ r ”:

$$a, a \times r, a \times r^2, \dots, a \times r^{n-1}.$$

Mostre que a soma desses “ n ” termos é $(a \times (1 - r^n)) / (1 - r)$.

Conclusão

A indução matemática é uma técnica usada para demonstrar proposições definidas num conjunto de números inteiros positivos. Os dois princípios de indução podem ser utilizadas para demonstrar o mesmo resultado; no entanto, dependendo da situação, uma ou outra abordagem pode ser mais fácil de ser utilizada.

Avaliação

1. Use um dos princípios de indução matemática para demonstrar que os resultados que se seguem são válidos para qualquer número inteiro positivo n :
 - a. $2 + 6 + 10 + \dots + (4n - 2) = 2n^2$;
 - b. $1 + 3 + 6 + \dots + (n(n + 1)) / 2 = (n(n + 1)(n + 2)) / 6$.
2. Mostre que para todo $n \in \mathbb{N}$ tem-se:
 - a. $7^n - 2^n$ é divisível por 5;
 - b. $13^n - 6^n$ é divisível por 7.

Resumo da Unidade

Nesta unidade abordou-se os conteúdos relacionados com as relações binárias (propriedades e operações), com destaque para as relações de equivalência e as de ordem. Também estuda-se as funções (propriedades e operações; permutações) e matrizes (com um pequeno destaque às matrizes booleanas). Analisa-se também o método de demonstração por indução finita.

Avaliação da Unidade

Verifique a sua compreensão!

Testes Sumativo - Relações e funções; matrizes e indução matemática.

Instruções

O teste tem dez questões, e cada qual vale dez pontos. Deve apresentar todos os cálculos e todos os fundamentos que sustentam as resoluções feitas. O teste deve ser resolvido em duas horas.

Critérios de Avaliação

São dez questões e cada uma delas vale 20 pontos, totalizando 200 pontos.

Escala de avaliação:

Insuficiente: 0 a 100 (exclusivo);

Suficiente: 100 a 140 (exclusivo);

Bom: 140 a 170 (exclusivo);

Muito bom: 170 a 200.

O aluno com Suficiente, Bom e Muito Bom considera-se com nível de conhecimentos suficientes para obter aprovação nesta unidade.

Avaliação

1. Use um dos princípios de indução matemática para demonstrar que os resultados que se seguem são válidos para qualquer número inteiro positivo:
 - a. $1+2^2+\dots+n^2=(n(n+1)(2n+1))/6$;
 - b. $5+10+15+\dots+5n=(5n(n+1))/2$.
2. Prove que para todo $n \in \mathbb{N}$, " n^3+2n é divisível por 3".
3. Seja $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$. Determine cada uma das composições dos ciclos seguintes, que representam permutações em A:
 - a. $(2,7,8) \circ (1,2,4,6,8)$.
4. Sejam as matrizes booleanas:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

 - a. Determine $A \wedge B$, $A \vee B$.
 - b. Determine $A \times B$, $B \times A$.
5. Faça o diagrama de Hasse para a ordenação parcial ρ no conjunto $S=\{2,3,5,7,21,42,105,210\}$, definida por $x \rho y \leftrightarrow x$ divide y . Indique:
 - a. O elemento mínimo e o elemento máximo, caso existam;
 - b. Os elementos maximais e os elementos minimais, caso existam.
6. Verifique se cada uma das seguintes relações binárias em conjuntos indicados S é reflexiva, simétrica, anti-simétrica e/ou transitiva:
 - a. $S=\mathbb{Q}$ e $x \rho y \leftrightarrow |x| \leq |y|$.
 - b. $x \rho y \leftrightarrow x-y$ é um inteiro múltiplo de 3.

Leituras e outros Recursos

As leituras e outros recursos desta unidade encontram-se na lista de Leituras e Outros Recursos do curso.

Unidade 4. Teoria de Grafos

Introdução à Unidade

Teoria de Grafos é um ramo da Matemática que estuda as relações entre os objectos discretos num determinado conjunto. Hoje em dia a teoria de grafos tem sido aplicado à diversas áreas, nomeadamente na área de Informática.

Objetivos da Unidade

Após a conclusão desta unidade, deverá ser capaz de:

- Identificar grafos e dígrafos e especificar os seus elementos.
- Determinar a coloração de um grafo.
- Representar multigrafo (dirigido ou não) através de matrizes.
- Colorir um mapa;
- Identificar caminhos eulorianos e ciclo hamiltoniano;
- Identificar uma ordem numa árvore enraizada ordenada

Termos-chave

Grafo euloriano: um grafo G é euloriano se existe um caminho fechado sem repetição de arestas e que inclui todos os vértices e todas as arestas. Tal caminho diz-se caminho euloriano.

Grafo hamiltoniano: um grafo conexo de ordem $n \geq 3$ é chamado grafo hamiltoniano se existe um ciclo fechado que inclui todos os vértices. Tal ciclo, chama-se ciclo hamiltoniano.

Árvore geradora: um subgrafo T de um grafo conexo G é dito árvore geradora de G se T é uma árvore que inclui todos os vértices de G .

Número cromático: é o número mínimo de cores necessário para a coloração de um grafo G .

Árvore enraizada: Uma árvore com raiz, ou enraizada, é uma árvore T que contém um vértice chamado de raiz, que geralmente é designado por r .

Actividades de Aprendizagem

Actividade 1.1 - Grafo: definição e conceitos gerais

Introdução

Pretende-se aqui introduzir o conceito de grafo e os conceitos a eles associados. A identificação de grafos é um objectivo muito importante a ser alcançado, isto é, deve-se distinguir grafo e pseudografo (ou multigrafo). É muito importante a determinação de caminhos e saber classifica-los.

Detalhes da actividade

Grafo. Um grafo G consiste de duas partes:

- Um conjunto $V=V(G)$ cujos elementos são chamados vértices, ou pontos, ou nós;
- Um conjunto A de pares não ordenados de elementos distintos de $V(G)$, chamados arestas.

Escreve-se $G(V,A)$ quando se quer referir às duas partes do gráfico.

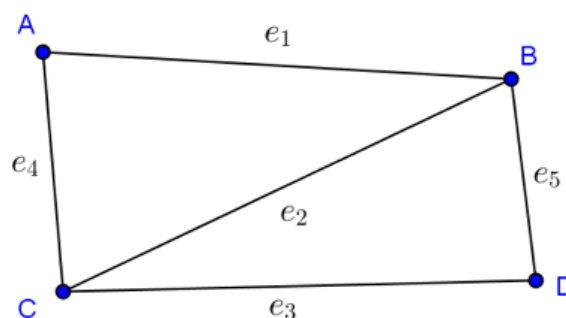
Ordem e dimensão de um grafo. O número de vértices de um grafo designa-se por ordem desse grafo, e representa-se por $|V(G)|$, ou $n(G)$. O número de arestas de um grafo designa-se por dimensão do grafo, e representa-se por $|A(G)|$, ou $m(G)$.

Vértices adjacentes. Dois vértices a e b de um grafo G dizem-se adjacentes se existe uma aresta e que os une. Neste caso os vértices a e b são ditos extremos da aresta e e a aresta e diz-se incidente nestes vértices.

Arestas adjacentes. Duas arestas distintas de um grafo dizem-se adjacentes se elas tiverem pelo menos um vértice em comum.

Representação de um grafo simples. Um grafo é muitas vezes representado por um diagrama no qual um vértice é designado por um "ponto" ou um "pequeno círculo" e uma aresta, por uma linha unindo vértices.

Exemplo. Considere o seguinte diagrama que representa um grafo $G=(V,A)$.



- $V=\{A,B,C,D\}$
- $A=\{e_1=\{A,B\}, e_2=\{B,C\}, e_3=\{C,D\}, e_4=\{A,C\}, e_5=\{B,D\}\}$.

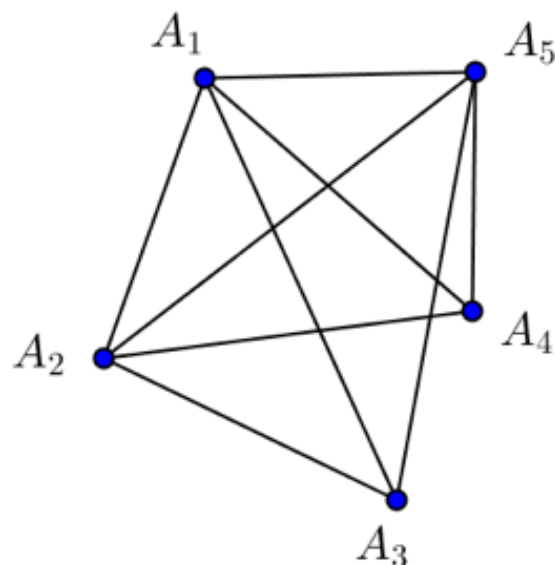
Exemplo de um problema que pode ser expresso por um grafo. Cinco turistas de diferentes nacionalidades encontram-se num aeroporto, onde passam largas horas à espera dum avião de ligação que os levará para um destino comum. O conhecimento de línguas desses cinco personagens é grande, mas não há uma língua que todos falam, pelo que a conversa não se generaliza. Na tabela que se segue listam-se os idiomas falados pelos cinco turistas:

Turistas	Inglês	Alemão	Francês	Espanhol
A_1	S	S	S	N
A_2	N	S	N	S
A_3	S	N	N	S
A_4	N	S	S	N
A_5	S	N	S	S

Para $1 \leq i \leq 5$, a linha i da tabela mostram os dados sobre as línguas faladas (S) e as línguas não faladas (N) pelo turista A_i .

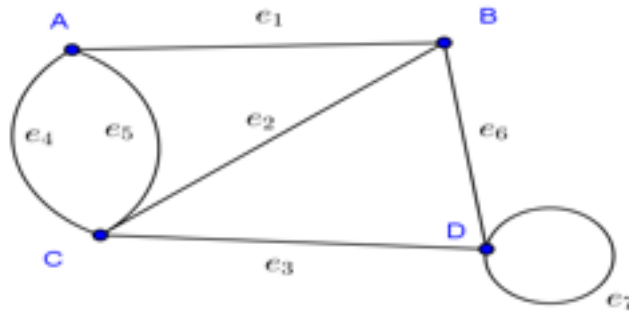
Questão. Quem não fala com quem?

O esquema de comunicação entre os turistas pode ser representado através de um grafo, em que cada ponto representa um turista e cada aresta que une dois pontos mostra que os turistas representados por esses pontos conseguem se comunicar em pelo menos uma língua (veja o grafo abaixo).



Multigrafo, ou **pseudografo**. Dependendo do estudo de problemas, dois vértices podem ter várias arestas (arestas múltiplas) unindo-os. Também há casos em que uma aresta liga um vértice a si próprio, denominada por lacete, ou laço,. Nesses casos, os grafos dizem-se multigrafo ou pseudografo. A definição formal de um grafo não engloba arestas múltiplas nem lacete, isto é, um grafo é um multigrafo sem arestas múltiplas nem lacetes.

Exemplo.



Este pseudografo tem quatro vértices (A, B, C, D) e sete arestas (e_1 , e_2 , e_3 , e_4 , e_5 , e_6 , e_7), entre os quais, dois são arestas múltiplas (e_4 e e_5) e um é lacete (e_7).

Observação. Alguns autores utilizam o termo grafo incluindo o multigrafo, e o termo grafo simples para um grafo sem arestas múltiplas ou lacetes.

Grafo finito e grafo trivial. Diz-se que um multigrafo é finito se tiver um número finito de vértices e um número finito de arestas. Um multigrafo finito com um único vértice e nenhuma aresta diz-se grafo trivial.

Grafo nulo. Grafo nulo é o grafo cujo o conjunto dos vértices é vazio.

Grafo vazio. Grafo vazio é o grafo cujo o conjunto de arestas é vazio.

Grau de um vértice. Grau de um vértice A num multigrafo G, denota-se por $d(A)$ ou $\deg(A)$, é igual ao número de arestas incidentes em A.

Vértice par e ímpar. Um vértice A diz-se par [ímpar] se o seu grau for um número par [ímpar].

Vértice isolado e terminal. Um vértice de grau 0 (zero) diz-se isolado. Um vértice de grau 1 (um) diz-se terminal.

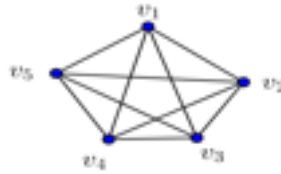
Propriedade (soma de graus dos vértices). A soma dos graus dos vértices de um multigrafo é igual ao dobro do número das suas arestas.

Nota (Lema de Aperto de Mãos). O resultado da propriedade anterior é conhecido como o Lema de Aperto de Mãos, pelo facto de implicar que se um grupo de pessoas apertar as mãos entre si, o número total de apertos será par.

Grafo completo. É um grafo em que cada vértice é conectado a cada um dos restantes vértices.

Nesse caso todos os vértices têm o mesmo grau.

Exemplo. Grafo completo K_5 :



Propriedade (número de arestas dum grafo completo). Um grafo completo de n vértice, representa-se por K_n , tem $(n \cdot (n-1))/2$ arestas.

Multigrafo regular. Um multigrafo diz-se regular de ordem p se todos os seus vértices têm graus iguais a p .

Caminho. Um caminho α num multigrafo G com origem A_0 e extremidade A_n é uma sequência alternada de vértices e arestas da forma

$$A_0, e_1, A_1, e_2, \dots, e_{(n-1)}, A_{(n-1)}, e_n, A_n$$

onde cada aresta e_i é incidente nos vértices $A_{(i-1)}$ e A_i . O número de arestas (n) denomina-se por comprimento do caminho.

Representação de caminho. Quando não houver ambiguidade, representa-se um caminho α pela sequência das suas arestas,

$$\alpha = (e_1, e_2, \dots, e_n),$$

ou pela sequência dos seus vértices,

$$(A_0, A_1, A_2, \dots, A_n).$$

Classificação de caminhos.

- Um caminho diz-se simples, ou sem repetições de vértices, se todos os vértices são distintos;
- Um caminho diz-se trilha, ou sem repetições de arestas, se todas as arestas são distintas;
- Um caminho $\alpha = (A_0, A_1, \dots, A_n)$ diz-se fechado se a origem é igual a extremidade, isto é, $A_0 = A_n$;
- Um caminho $\alpha = (A_0, A_1, \dots, A_n)$ diz-se aberto se a origem é diferente da extremidade, isto é, $A_0 \neq A_n$;
- Um caminho $\alpha = (A_0, A_1, \dots, A_n)$ diz-se um ciclo se ela é fechado e se todos os vértices são distintos, excepto A_0 e A_n . Um ciclo com comprimento k diz-se k -ciclo. Um k -ciclo é par se k é par e é ímpar se k é ímpar. Um ciclo num grafo simples tem comprimento maior ou igual 3. Um grafo sem ciclo diz-se acíclico, ou floresta. Um grafo conexo acíclico diz-se uma árvore.

Distância entre vértices. Sejam A e B vértices num grafo. Distância entre A e B, denota-se por $d(A,B)$, define-se da seguinte forma: $d(A,B)=0$ se $A=B$; se $A \neq B$ e existe pelo menos um caminho entre A e B, então $d(A,B)$ é igual ao comprimento do caminho mais curto entre A e B; se não existe nenhum caminho entre A e B, então $d(A,B)$ não existe.

Teorema. Existe um caminho entre os vértices A e B se e só se existe um caminho simples entre A e B.

Multigrafo conexo. Um multigrafo diz-se conexo se existe um caminho entre quaisquer dois vértices.

Diâmetro de um grafo conexo. Diâmetro de um grafo conexo é a maior distância, entre as distâncias de quaisquer dois dos seus vértices.

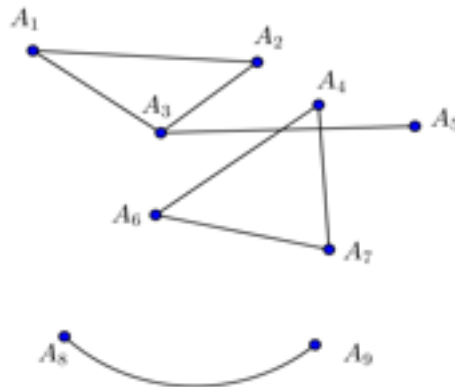
Subgrafo. Um grafo $H(V',E')$ diz-se subgrafo de $G(V,E)$, se $V' \subseteq V$ e $E' \subseteq E$. Diz-se que H é um subespaço gerado por V' , se todas as arestas de G com extremos em V' estão em H. Um subgrafo H de G é próprio se $V(H) \neq V(G)$ ou $A(H) \neq A(G)$.

Subgrafo conexo maximal. Um subgrafo conexo H de um grafo [multigrafo] G é maximal se H não for subgrafo próprio de algum subgrafo conexo de G.

Componente de um grafo. Um componente, ou componente conexo, de um grafo G é qualquer subgrafo conexo maximal de G.

Um grafo G pode ser particionado em seus componentes conexos.

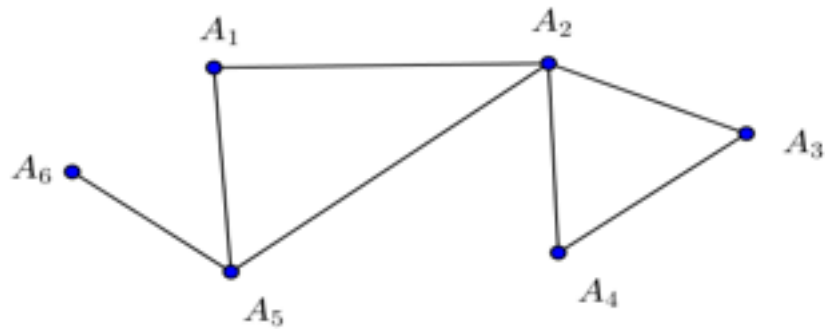
Exercício. Determine os componentes conexos do grafo abaixo indicado:



Subgrafo $G-A_i$. Subgrafo $G-A_i$ é o subgrafo de G que se obtém eliminando o vértice A_i de $V(G)$ e eliminando todas as arestas que incidem em A_i .

Vértice de corte (num grafo conexo). Diz-se que A_i pertencente $V(G)$ é um vértice de corte para o grafo conexo G, se $G-A_i$ é desconexo.

Exemplo. No grafo abaixo, A_2 é um vértice de corte. Há mais vértices de corte?

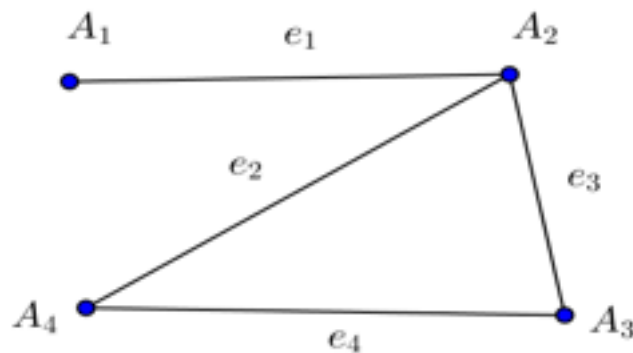


Subgrafo $G-e_i$. Subgrafo $G-e_i$ é um subgrafo de G que se obtém eliminando a aresta e_i de $A(G)$. Sendo assim:

- $V(G-e_i)=V(G)$;
- $A(G-e_i)=A(G)-\{e_i\}$.

Ponte (num grafo conexo). Uma aresta e de um grafo conexo é uma ponte se $G-e$ é desconexo.

Exemplo. No grafo conexo abaixo, a aresta e_1 é uma ponte.



Teorema. Seja G um grafo com n vértices. Então as seguintes afirmações são equivalentes:

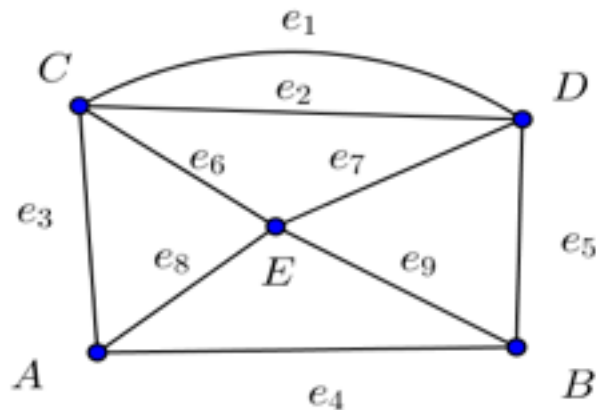
1. G é uma árvore;
2. G não tem ciclo e tem $n-1$ arestas;
3. G é conexo e tem $n-1$ arestas;
4. G é conexo e cada aresta é uma ponte;
5. Quaisquer dois vértices de G estão ligados por exactamente um caminho;

Teorema. Se G é uma floresta com n vértices e k componentes, então G tem $n-k$ arestas.

Multigrafo semi-eureliano (ou atravessável). Um multigrafo G diz-se semi-eureliano se existe um caminho aberto sem repetição de arestas e que inclui todos os vértices e todas as arestas. Tal caminho diz-se caminho semi-eureliano, ou atravessável.

Nota. Um multigrafo semi-eureliano é conexo.

Exercício. Determine um caminho atravessável no grafo que se segue.



Resposta. Por exemplo, o caminho $Ae_3 Ce_1 De_2 Ce_6 Ee_8 Ae_4 Be_9 Ee_7 De_5$ é atravessável.

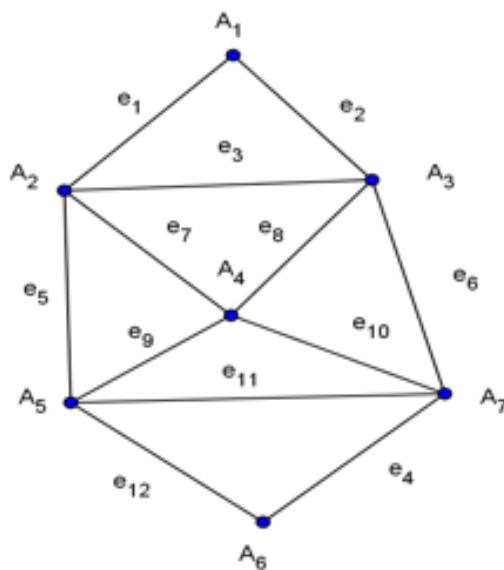
Propriedade. Seja P um vértice de um multigrafo atravessável G . Se qualquer caminho atravessável não tem origem nem extremidade em P , então o grau de P é par.

Grafo eureliano. Um grafo G é eureliano se existe um caminho fechado sem repetição de arestas e que inclui todos os vértices e todas as arestas. Tal caminho diz-se caminho eureliano.

Teorema. Um grafo conexo finito é eureliano se e só se cada vértice tem grau par.

Teorema. Um grafo conexo finito é semi-eureliano se e só se existem dois vértices de grau ímpar.

Exercício. Encontre um caminho eureliano no grafo que se segue.



Resposta: Por exemplo, $A_1 e_2 A_3 e_6 A_7 e_4 A_6 e_{12} A_5 e_{11} A_7 e_{10} A_4 e_7 A_2 e_3 A_3 e_8 A_4 e_9 A_5 e_5 A_2 e_1 A_1$

Grafo Hamiltoniano. Um grafo conexo de ordem $n \geq 3$ é chamado grafo hamiltoniano se existe um ciclo fechado que inclui todos os vértices. Tal ciclo, chama-se ciclo hamiltoniano.

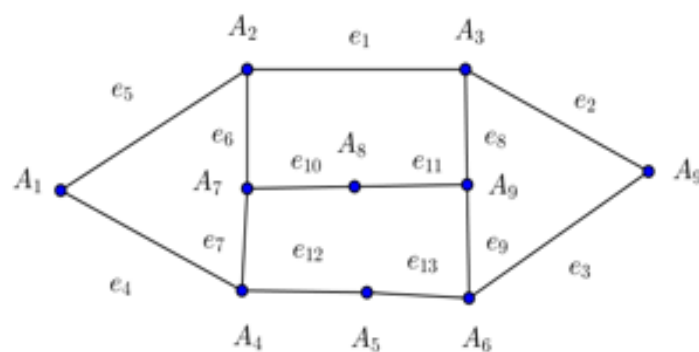
Regras para construir um ciclo hamiltoniano:

- Se um vértice A_i tem ordem 2 em G , então as duas arestas incidentes em A_i são necessárias para obter o ciclo hamiltoniano;
- Se durante o processo é formado (de construção de um ciclo hamiltoniano) um ciclo que não passa por todos os vértices utilizando as arestas necessárias (as de ordem 2), então o grafo não é hamiltoniano;
- Se durante o processo (de construção de um ciclo hamiltoniano) duas arestas incidentes com um determinado vértice são utilizadas, então as outras arestas incidentes com o mesmo vértice (caso existam) não serão consideradas para as próximas etapas.

Teorema (condição necessária para que um grafo seja hamiltoniano). Se um grafo simples é hamiltoniano, então para todo subconjunto S não vazio e próprio de $V(G)$, o número de componentes de $G-S$ é menor ou igual ao cardinal de S .

Teorema (condição suficiente para que um grafo seja hamiltoniano). Seja G um grafo conexo de ordem $n \geq 3$. Se $n \leq \deg(v)$ para cada vértice v de G , então G é um grafo hamiltoniano.

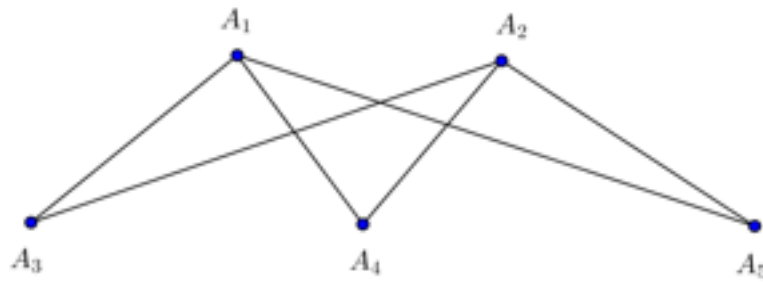
Exercício. Encontre o ciclo hamiltoniano no grafo hamiltoniano abaixo indicado:



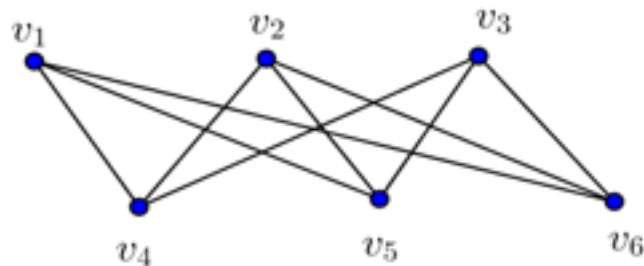
Resposta. Por exemplo, $A_1 e_4 A_4 e_{12} A_5 e_{13} A_6 e_3 A_{10} e_2 A_3 e_8 A_9 e_{11} A_8 e_{10} A_7 e_6 A_2 e_5 A_1$

Grafo bipartido. Um grafo G , com ordem superior ou igual a dois, diz-se bipartido se o conjunto de vértices $V(G)$ pode ser particionado em dois subconjuntos não vazios M e N de modo que cada aresta de $A(G)$ une um vértice em M a um vértice em N . Um grafo bipartido diz-se completo se cada vértice de M é unido a cada vértice de N , e representa-se por $K_{(m,n)}$, onde m é o número de vértices em M e n é o número de vértices em N . Ao par (M,N) chama-se bipartido de G .

Exemplo. Grafo bipartido completo $K_{2,3}$:



Exemplo. Grafo bipartido completo $K_{3,3}$:

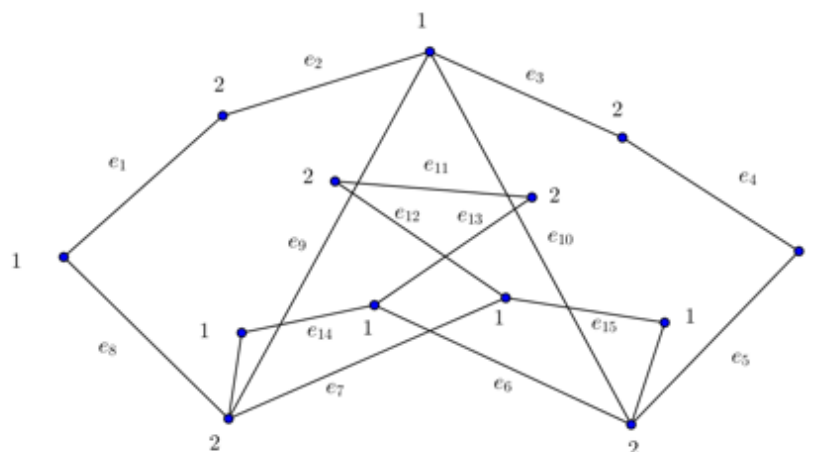


Nota. Um grafo bipartido completo $K_{(m,n)}$ tem $m \times n$ arestas.

Teorema. Um grafo simples G é bipartido se e só se não contém ciclos ímpares.

Método para obter a bipartição de um grafo bipartido. Começa-se por um vértice qualquer, marcando-o com "1". Depois marca-se todos os vértices adjacentes com "2"; e de seguida marque todos os vértices adjacentes a esses últimos com "1"; assim sucessivamente, até que todos os vértices sejam marcados com "1" e "2".

Exercício. Verifique se o grafo que se segue é bipartido ou não. Em caso afirmativo, indique a bipartição, e em caso contrário, indique o ciclo ímpar.



Resposta. O grafo é bipartido. O conjunto M pode ser formado só pelos vértices marcados com "1" e o conjunto N pode ser formado só pelos vértices marcados com "2".

Grafos isomorfos e homeomorfos.

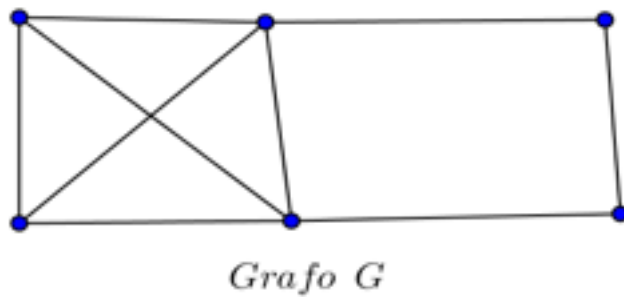
Grafos isomorfos. Os grafos $G(V,A)$ e $G'(V',A')$ dizem-se isomorfos se existe uma função injectiva $f:V \rightarrow V'$ tal que $e=\{u,v\}$ é uma aresta em $G(V,A)$ se, e somente se, $e'=\{f(u),f(v)\}$ é uma aresta em $G'(V',A')$.

Os grafos isomorfos são indistinguíveis, ainda que seus diagramas sejam diferentes.

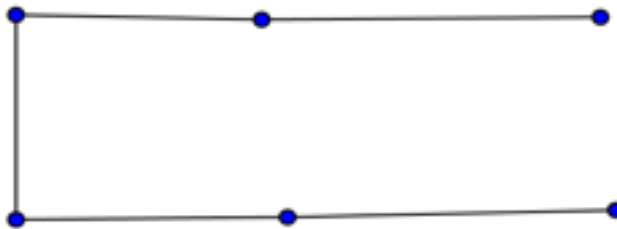
Grafos homeomorfos. Dado um grafo $G(V,A)$ pode obter-se um novo grafo dividindo uma aresta de $G(V,A)$ com vértices adicionais. Então, dois grafos H e H' são ditos homeomorfos se poderem ser obtidos a partir dum mesmo grafo ou de grafos isomorfos por este método.

Árvore geradora. Um subgrafo T de um grafo conexo G é dito árvore geradora de G se T é uma árvore que inclui todos os vértices de G .

Exemplo. Seja o grafo conexo G abaixo indicado:



Então, uma árvore geradora de G é, por exemplo, o grafo T que se segue:



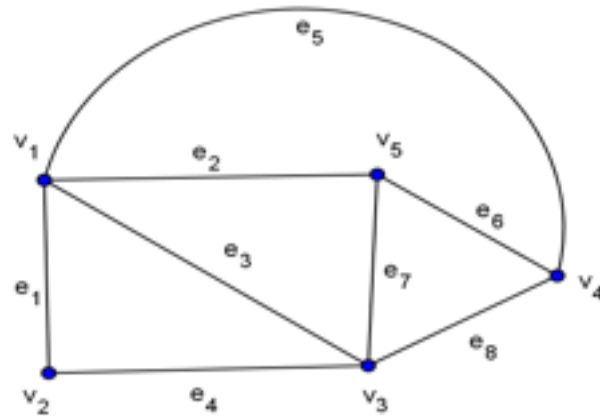
Matriz de adjacência e matriz de incidência.

Matriz de adjacência. Seja G um multigrafo com vértices $v_1, v_2, \dots, v_n$. A matriz de adjacência de G é a matriz $A=[a_{ij}]$, de ordem $n \times n$, onde a_{ij} é o número de arestas que ligam o vértice v_i ao vértice v_j .

Matriz de incidência. Seja G um multigrafo com vértices $v_1, v_2, \dots, v_n$ e com arestas $e_1, e_2, \dots, e_m$. A matriz de incidência de G é a matriz $B=[b_{ij}]$, de ordem $n \times m$, onde:

$b_{ij}=1$ caso a aresta e_j seja incidente em v_i e $b_{ij}=0$ caso contrário.

Exemplo. Seja o grafo G que se segue:



A matriz de adjacência de G é:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

A matriz de incidência de G é:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Exemplo. Seja a matriz de adjacência

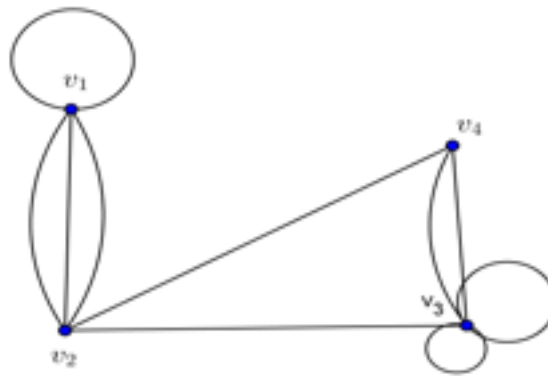
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

dum multigrafo G.

A partir desta matriz pode-se obter o diagrama do respectivo multigrafo:

- Como a matriz A é quadrada de ordem 4, então o multigrafo G tem 4 vértices;
- Como $a_{11}=a_{23}=a_{24}=a_{32}=a_{42}=1$, então existe uma lacete no vértice v_1 , existe uma aresta que incide com v_2 e v_3 e uma aresta que incide com v_2 e v_4 ;
- Como $a_{12}=a_{21}=3$, então existem três arestas que incidem com v_1 e v_2 ;
- Como $a_{13}=a_{14}=a_{22}=a_{31}=a_{41}=a_{44}=0$, então não existe lacete nos vértices v_2 e v_4 e não existe nenhuma aresta que incide com os vértices v_1 e v_3 , v_1 e v_4 ;
- Como $a_{33}=a_{34}=a_{43}=2$, então existem duas lacetes no vértice v_3 e duas arestas que incidem com os vértices v_3 e v_4 .

Então o diagrama do multigrafo G é



Características de matriz de incidência e de matriz adjacência:

- Toda matriz de adjacência é simétrica;
- Se o multigrafo não possui lacetes, então os elementos da diagonal principal da matriz da adjacência são todos iguais a zero;
- Se o multigrafo não possui arestas múltiplas, então os elementos da matriz de adjacências são uns e zeros;
- Toda matriz simétrica, cujas entradas são números naturais, determina um multigrafo;
- Se um multigrafo G tiver n vértices, existirá $n!$ matrizes de adjacência desse multigrafo;
- As matrizes de adjacência representam de forma completa os multigrafos, uma vez que é possível recuperar toda informação sobre um multigrafo a partir da sua matriz de adjacência;
- Uma matriz de incidência de um multigrafo sem lacetes, tem em cada coluna exactamente dois elementos não nulos. Se houver lacete, a coluna relativa a esse lacete tem um único elemento não nulo;
- Toda matriz com entradas no conjunto $\{0,1\}$, tal que cada coluna tem uma ou duas entradas não nulas, determina um multigrafo.

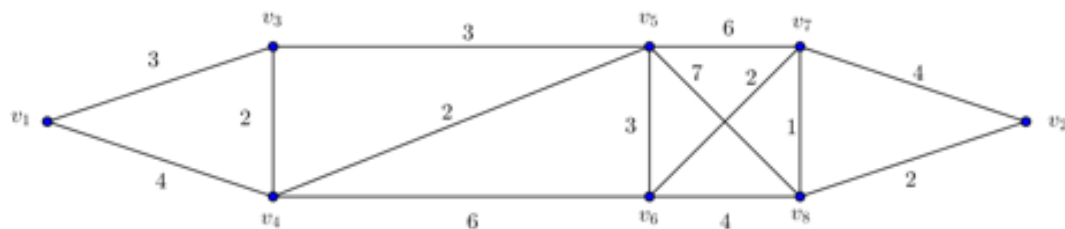
Teorema. Seja A a matriz de adjacência de um grafo G com n vértices, onde $n > 1$. Então, a entrada (i, j) da matriz A^m , $m \in \mathbb{N}$, é o número de caminhos de comprimentos m entre v_i e v_j .

Grafo com etiqueta (ou ponderado). Um grafo com etiqueta é um grafo cujos vértices ou arestas são associados a algum tipo de dados.

Se cada aresta e de um grafo G é associado a um número não negativo $l(e)$, então $l(e)$ é chamado de ponderação ou comprimento de e .

Problema do caminho mais curto. Sejam v_1 e v_2 vértices de um grafo G , com ponderação, ou comprimento, nas arestas. O problema do caminho mais curto, consiste em encontrar um caminho de menor comprimento entre v_1 e v_2 , onde o comprimento do caminho é a soma dos comprimentos das suas arestas. Nota-se que o caminho mais curto não tem repetição de arestas.

Exemplo. Seja o grafo abaixo:



O caminho mais curto entre v_1 e v_2 é $(v_1 \ v_3 \ v_5 \ v_7 \ v_8 \ v_2)$.

Árvores geradoras mínimas. Seja G um grafo conexo ponderado. Então, qualquer árvore geradora T de G está associado a um peso total obtido pela soma das ponderações das arestas em T . Uma árvore minimal geradora de G é uma árvore geradora cujo peso total é o menor possível.

Algoritmos para obter árvore minimal geradora T de um grafo conexo ponderado G , onde G tem n vértices. Neste caso T deve ter $n-1$ arestas.

Algoritmo I. A entrada é um grafo conexo G com n vértices:

Passo 1 Ordene as arestas de G por ordem decrescente das suas ponderações.

Passo 2 Na ordem estabelecida no passo 1, elimine cada aresta que não desconecta o grafo até que restem $n-1$ arestas.

Passo 3 Saia.

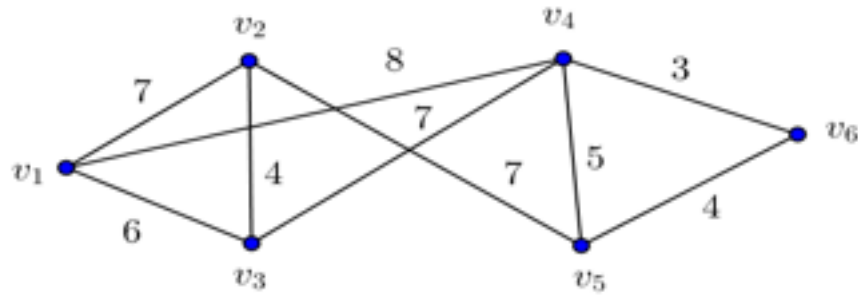
Algoritmo II. A entrada é um grafo conexo G com n vértices.

Passo 1 Ordene as arestas de G por ordem crescente das suas ponderações.

Passo 2 Começando apenas com vértices de G , na ordem estabelecida no passo 1, adicione cada aresta que não gera um ciclo até que $n-1$ arestas sejam adicionadas.

Passo 3 Saia.

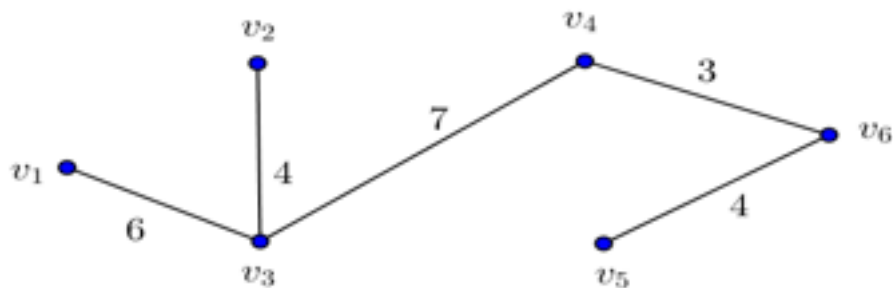
Exemplo. Seja o grafo conexo ponderado G :



Aplica-se o algoritmo I para obter a árvore minimal geradora do grafo G. Como o grafo G tem 6 vértices, então a árvore minimal geradora tem 5 arestas. O quadro que se segue mostra as arestas a serem eliminadas do grafo G, de modo que reste 5 arestas:

Arestas	$\{v_1, v_4\}$	$\{v_1, v_2\}$	$\{v_2, v_5\}$	$\{v_3, v_4\}$	$\{v_1, v_3\}$	$\{v_4, v_5\}$	$\{v_2, v_3\}$	$\{v_5, v_6\}$	$\{v_4, v_6\}$
Ponderações	8	7	7	7	6	5	4	4	3
Eliminadas	SIM	SIM	SIM	NÃO	NÃO	SIM	NÃO	NÃO	NÃO

Então, a árvore minimal geradora de G é:



Observação. Consoante a ordenação das arestas com iguais ponderações, pode-se obter distintas árvores minimais geradoras de G, mas no entanto todos eles têm o mesmo peso total.

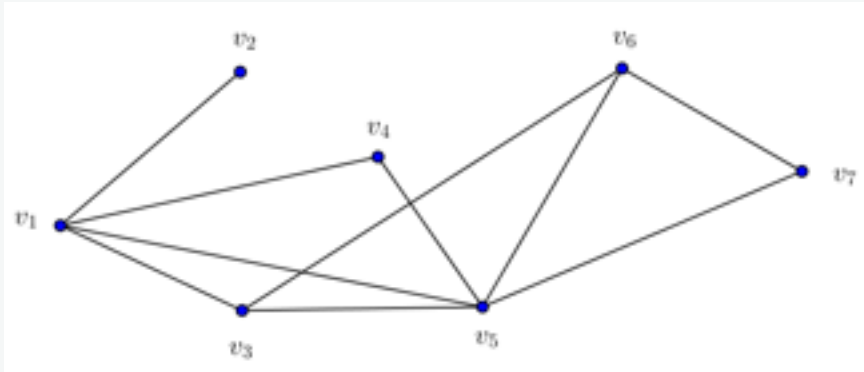
Exercício. Aplique o algoritmo II, para obter uma árvore minimal geradora do grafo G.

Conclusão

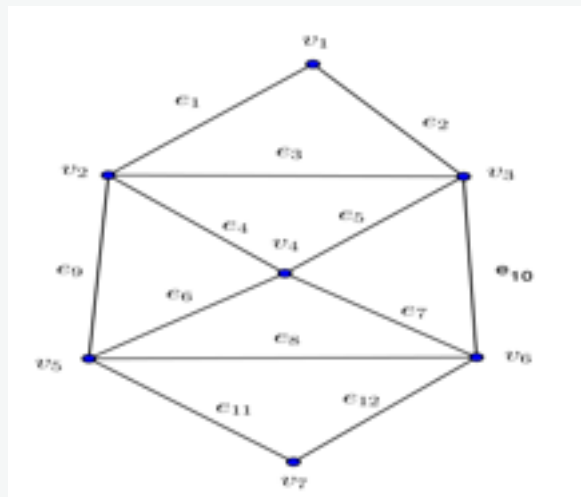
O conhecimento dos conceitos associados a grafos (ou multigrafos de uma forma geral) são muito importantes na resolução de problemas. Deve-se dar muita atenção às formas de representação de grafos: diagrama, descrição do conjunto dos vértices e do das arestas, matrizes. O grafo conexo (ponderado ou não) modela muitos problemas. A representação de um grafo por intermédio de uma matriz permite a obtenção de várias propriedades algébricas de grafos.

Avaliação

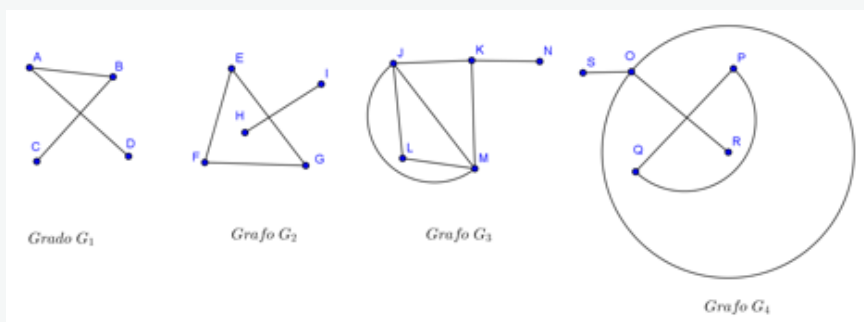
1. Considere o multigrafo G , onde $V(G)=\{A,B,C,D\}$ e $A(G)=\{\{A,D\},\{A,C\},\{B,B\},\{B,C\},\{C,A\},\{C,B\},\{D,B\},\{D,D\}\}$.
 - A. Determine o grau e a paridade de cada vértice.
 - B. Verifique que a soma dos graus dos vértices é um número par.
2. Seja o grafo H , que se segue:



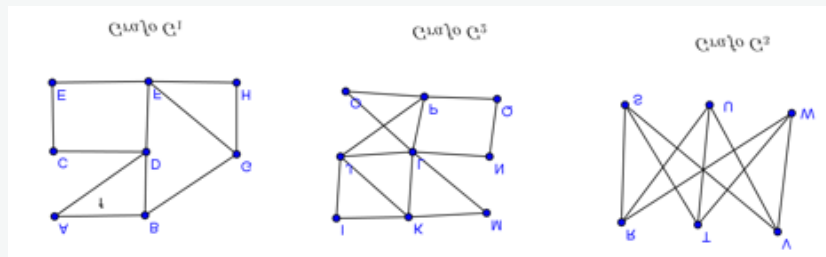
- A. Justifique que o grafo H é conexo.
 - B. Indique uma ponte em H .
3. Encontre um caminho euliano no grafo que se segue:



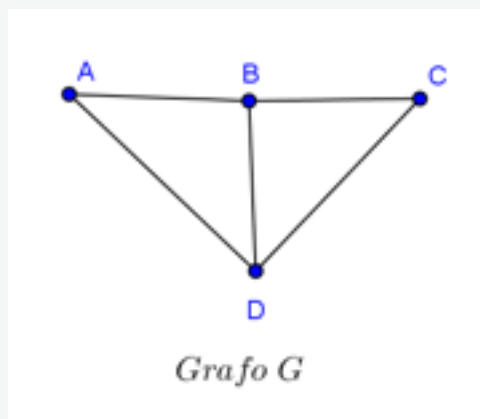
4. Sejam os seguintes multigrafos:



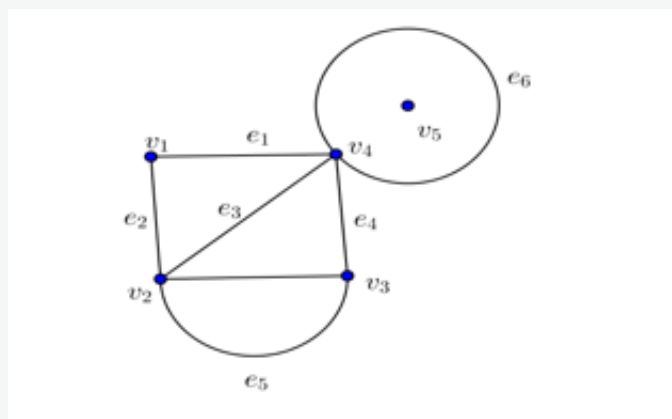
- A. Quais dentre eles são conexos?
- B. Se um deles não é conexo, axe seus componentes conexos.
- C. Quais são acíclicos?
- D. Quais são grafos (ou grafos simples)?
5. Considere os seguintes multigrafos:



- A. Quais deles são eulorianos?
- B. Para aqueles que não são eulorianos, explique as razões.
- C. Quais deles têm e não têm um ciclo hamiltoniano. Explique as razões.
6. Faça o diagrama de um grafo $K_{2,3}$.
7. Faça os diagramas de todas as árvores com seis vértices.
8. Ache todas as árvores geradoras do grafo que se segue:



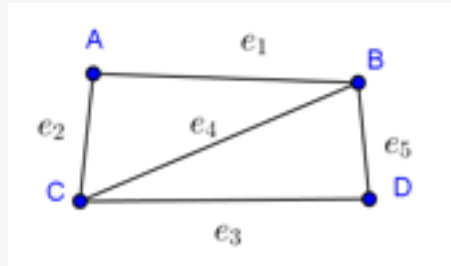
9. Determine a matriz de adjacência do multigrafo abaixo indicado:



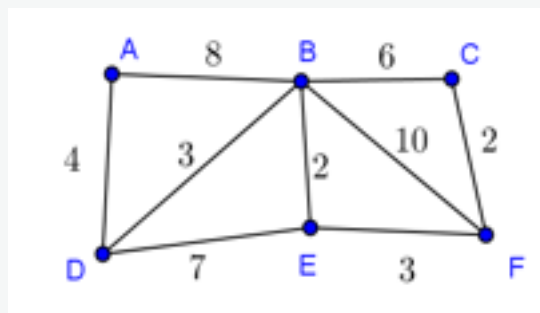
10. Determine o número de laços e arestas múltiplas num multigrafo G cuja matriz de adjacência é:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

11. Determine a matriz de incidência do grafo que se segue:



12. Considere o seguinte grafo ponderado:



- A. Determine a árvore geradora minimal deste grafo.

Actividade 1.2 - Grafo planar e coloração de grafos e mapas

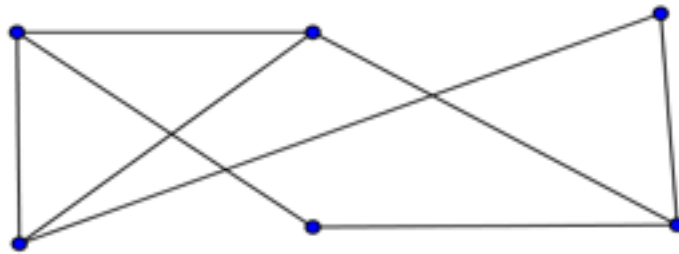
Introdução

Detalhes da atividade

Multigrafo planar. Um multigrafo planar é um multigrafo que pode ser desenhado num plano sem que as arestas se cruzem.

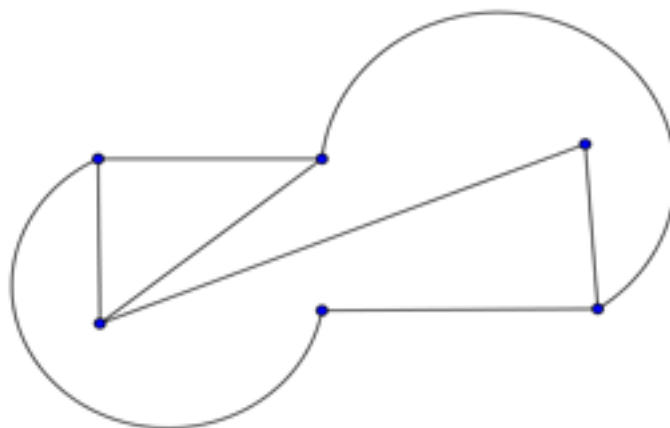
Exemplo. As árvores formam uma classe muito importante de grafos planares.

Exemplo. O grafo



é planar, pois admite uma representação plana sem que as arestas se cruzem. Por exemplo:

Mapas e regiões. Uma representação planar de um multigrafo planar denomina-se por mapa. Diz-se que um mapa é conexo se o multigrafo subjacente é conexo. Um determinado mapa divide o plano em várias regiões. Por exemplo, o mapa do multigrafo do exemplo anterior divide o plano em quatro regiões (r_1 , r_2 , r_3 e r_4):



A região r_1 é limitada por quatro arestas; a região r_2 é limitada por três arestas; a região r_3 é limitada por quatro arestas e a região r_4 não é ilimitada no plano inteiro. No entanto, pode-se imaginar o mapa inserido num rectângulo, por exemplo, e nesse caso a região r_4 será limitada e terá no seu bordo quatro arestas do mapa.

Regiões adjacentes. Duas regiões de um mapa M diz-se adjacentes se eles têm uma aresta em comum.

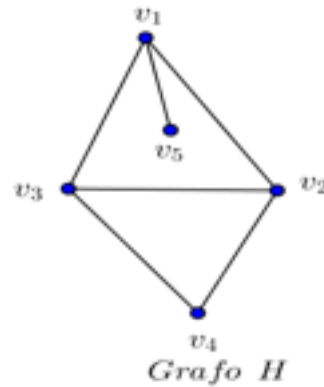
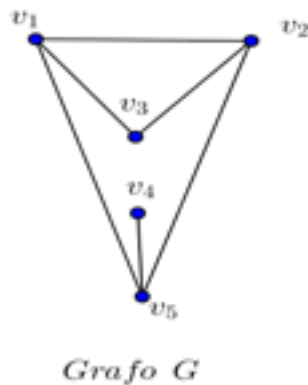
Exemplo. No grafo anterior a região r_2 é adjacente a r_1 , r_3 e r_4 .

Grau de uma região. O bordo de uma região r de um mapa M consiste de uma sequência de arestas formando um caminho fechado. Chama-se grau de uma região r , representa-se por $\deg(r)$, o comprimento do caminho fechado que forma o bordo de r .

Teorema. A soma dos graus das regiões de um mapa é igual a duas vezes o número das suas arestas.

Exemplo. No mapa anterior tem-se: $\deg(r_1)=5$; $\deg(r_2)=3$; $\deg(r_3)=4$ e $\deg(r_4)=4$. Nota-se que $5+3+4+4=16$ é igual ao dobro do número das arestas do mapa.

Exercício. Para cada um dos grafos que se seguem, determinar o bordo e o grau de cada região, e verificar a condição do teorema anterior.



Teorema. Seja M um mapa com V vértices, E arestas e R regiões. Então $V-E+R=2$.

Teorema. Seja G um grafo planar conexo com p vértices e q arestas, onde $p \geq 3$. Então $q \leq 3p-6$.

Grafo não planar.

Teorema. Um grafo é não planar se, e só se, contém um subgrafo homeomorfo a $K_{3,3}$ ou a K_5 .

Observação. O grafo K_5 é não planar. Pois tem 5 vértices e 10 arestas. Fosse planar, o dobro do número das suas arestas seria menor que a diferença entre o triplo do número dos seus vértices e seis. No entanto, isto não acontece, logo não é planar.

Exercício. O grafo $K_{3,3}$ é, também, não planar. Verificar este resultado.

Coloração de grafos. Seja um grafo G . Uma coloração de vértices de G , ou coloração de G , é uma atribuição de cores aos vértices de G , de forma que vértices adjacentes tenham cores distintas. Diz-se que G é n -colorável se existe uma coloração de G que usa n cores. O número mínimo de cores necessário para a coloração de um grafo G denomina-se por número cromático de G , e denota-se por $X(G)$.

Algoritmo para coloração de um grafo.

Algoritmo I. A entrada é um grafo G .

Passo 1 Ordene os vértices de G por ordem decrescente dos seus graus.

Passo 2 Atribua a primeira cor, C_1 , ao primeiro vértice e, então, sequencialmente, atribua C_1 a cada vértice que não é adjacente a algum vértice que o antecedeu e ao qual foi

atribuída a cor C_1 .

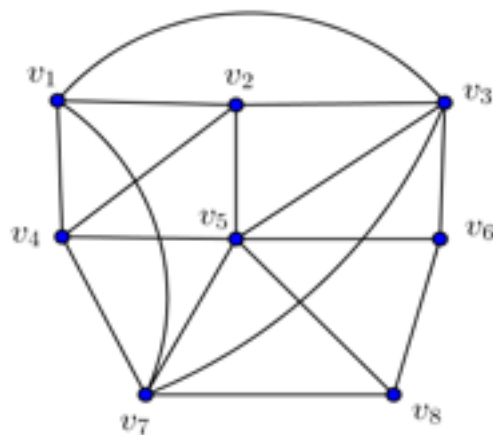
Passo 3 Comece de novo no passo 1 colorando os vértices que ainda não foram colorados com a segunda cor, C_2 .

Passo 4 Repita o passo 3 com a terceira cor, C_3 , depois com a quarta cor, C_4 , e assim por diante, até que todos os vértices sejam colorados.

Passo 5 Saia.

Observação. Este algoritmo é muito eficaz na coloração de um grafo G . No entanto, nem sempre dá o número cromático de G .

Exemplo. Seja o seguinte grafo:

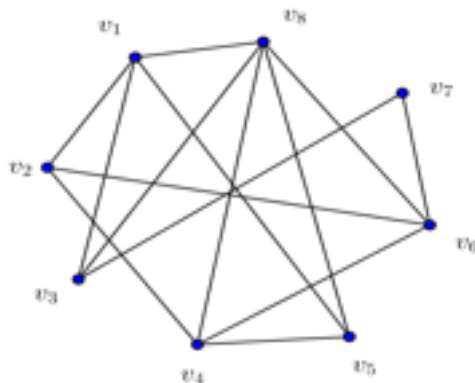


Vai utilizar-se o algoritmo anterior para obter uma coloração de G .

Ordenação dos vértices	v_5	v_3	v_7	v_1	v_2	v_4	v_6	v_8
Coloração dos vértices	C_1	C_2	C_3	C_1	C_3	C_2	C_2	C_3

Sendo assim, o grafo G é 3-colorável. Nota-se aqui que o número cromático de G é 3, pois G não é 2-colorável uma vez que para colorar v_1 , v_4 e v_7 é necessário 3 cores, daí que o número mínimo de cores para colorar o grafo G é três.

Exercício. Seja o grafo que se segue:



Usar o algoritmo acima descrito, para colorar este grafo. Justificar que o seu número cromático é três.

Coloração de um grafo bipartido. Recorda-se que um grafo bipartido é um grafo cujo conjunto dos vértices se divide em dois subconjuntos de modo que cada vértice de um subconjunto se conecte com cada vértice do outro subconjunto e os vértices do mesmo subconjunto não se conectam entre si. Desta feita, basta duas cores para colorar os vértices de um grafo bipartido (uma para colorar os vértices de um subconjunto e outra para colorar os vértices do outro subconjunto).

Teorema. Para um grafo G são equivalentes as seguintes afirmações:

- I. G é 2-colorável
- II. G é bipartido
- III. Todo ciclo de G tem comprimento par.

Observação. O teorema anterior caracteriza os grafos 2-coloráveis.

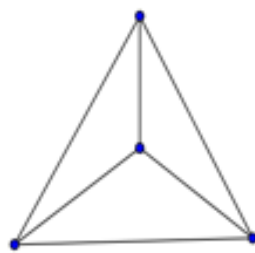
Coloração de grafos planares.

Teorema. Todo grafo planar G é 4-colorável.

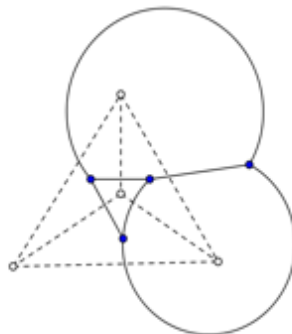
Coloração de mapas. Colorar um mapa M significa atribuir cores às regiões de M de modo que duas regiões adjacentes não tenham a mesma cor. Uma mapa M diz-se n -colorável se existe uma coloração de M com n cores.

Mapa dual. Seja um mapa M . Escolhe-se um ponto em cada região M . Se duas regiões são adjacentes os pontos correspondentes vão ser unidos por uma linha intersectando a aresta comum. Essas linhas podem ser traçadas sem se intersectarem. Assim, obtém-se uma nova mapa M^* , que se denomina por dual de M , de modo que cada vértice de M^* corresponde a uma região de M .

Exemplo. O dual do mapa M , abaixo,



é o mapa M^*



Observação. Nota-se que a coloração dos vértices do mapa dual M^* de um mapa M equivale a coloração das regiões do mapa M . Sendo assim, segue o teorema.

Teorema. Não é necessário mais do que quatro cores para colorar um mapa.

Coloração de uma árvore.

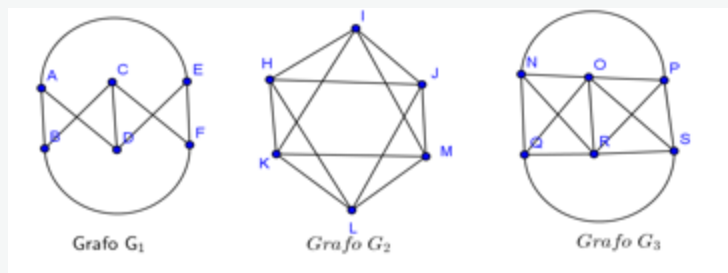
Teorema. Toda árvore é 2-colorável.

Conclusão

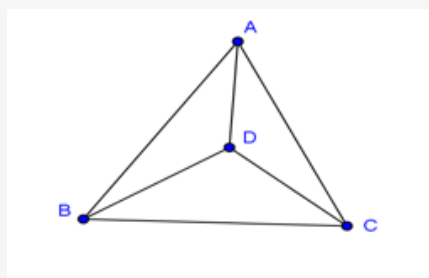
Esta actividade assentou-se sobre estudo dos grafos planares, com enfoque na coloração dos vértices e dos mapas. Todo grafo planar é 4-colorável. Consequentemente, todo mapa é também 4-colorável. Todo grafo 2-colorável é bipartido e vice-versa.

Avaliação

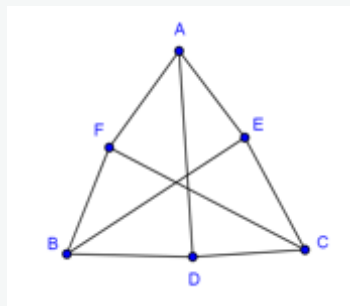
- Desenhe uma representação planar de cada um dos grafos que se seguem, caso seja possível:



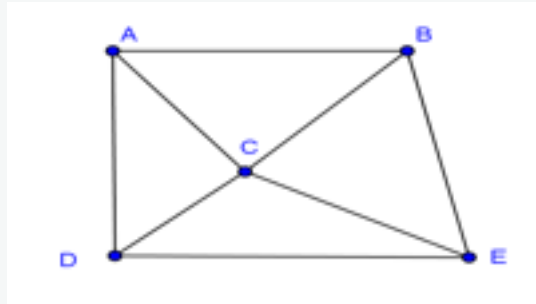
- Ache o menor número de cores necessárias para colorar o mapa seguinte:



- Ache uma coloração e o número cromático do grafo que se segue:



4. Ache o mapa dual ao seguinte mapa:



Atividade 1.3 - Grafo dirigido

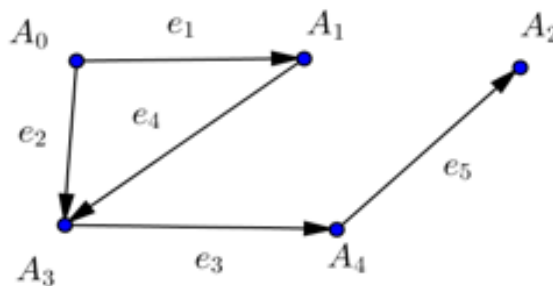
Introdução

Às vezes na modelação de um problema há necessidade de considerar-se um sentido para arestas, dando origem a um grafo dirigido, ou dígrafo, ou grafo orientado.. Alguns conceitos tratados aqui são semelhantes aos dos grafos simples, mas há diferenças em muitos aspectos.

Detalhes da atividade

Dígrafo, ou grafo dirigido, ou grafo orientado. Um dígrafo D é um par $(V(D), A(D))$, onde $V(D)$ é um conjunto não vazio de elementos chamados vértices e $A(D)$ é um conjunto de arestas orientadas (eventualmente múltiplas), chamadas arcos.

Exemplo.



Se o número de vértices em D é finito, diz-se que o dígrafo é finito.

Se as arestas em um dígrafo D estão associados a algum tipo de dados, diz-se que o dígrafo é ponderado.

Seja $e=(u,v)$ uma aresta orientada de um dígrafo. Diz-se então que:

- "u" é o ponto inicial, ou origem, de "e" e que "v" é a extremidade, ou o ponto final de "e";
- "v" é um sucessor de "u";
- "u" é adjacente para "v" e "v" é adjacente de "u".

O conjunto de todos os sucessores de um vértice "u" em um dígrafo $D=(V,A)$ é definido por:
 $\text{suc}(u)=\{v \in V: (u,v) \in A\}$.

Arestas paralelas em um dígrafo são aquelas que têm a mesma origem e a mesma extremidade.

Laço em um dígrafo é uma aresta cuja origem é igual à extremidade.

Subgrafo. Seja $D=(V,A)$ um dígrafo, e seja V' um subconjunto de V . Se A' é um subconjunto de A , de modo que as origens e as extremidades das arestas de A' pertençam a V' , diz-se que $D'=(V',A')$ é um subgrafo de D . Se A' contém todas as arestas em A , cujas origens e extremidades pertencem a V' , diz-se que o dígrafo $D'=(V',A')$ é um subgrafo de D gerado por V' .

Grau. O grau de saída de um vértice "v" em um dígrafo D , representa-se por $\text{outdeg}(v)$, é o número de arestas com origens em "v"; e o grau de entrada de uma aresta "v", representa-se por $\text{indeg}(v)$, é o número de arestas com extremidades em "v".

Sumidouro. um vértice v num dígrafo D diz-se um sumidouro se o seu grau de entrada é positiva, mas o seu grau de saída é zero.

Fonte. um vértice v num dígrafo D diz-se uma fonte se o seu grau de entrada é zero, mas o seu grau de saída é positiva.

Teorema. A soma dos graus de saída dos vértices de um dígrafo D é igual à soma dos graus de entrada desses vértices, e é igual ao número de arestas.

Caminho. Um caminho em um dígrafo D é uma sequência alternada de vértices e arestas orientadas, por exemplo,

$$C=(v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_n, v_n)$$

tal que cada aresta e_i tenha origem em $v_{(i-1)}$ e extremidade v_i .

Observação. Quando não há ambiguidade, representa-se um caminho pela sequência dos seus vértices ou das suas arestas.

O comprimento de um caminho é o número das suas arestas.

Um caminho simples é aquele que tem vértices distintos.

Uma trilha é um caminho com arestas distintas.

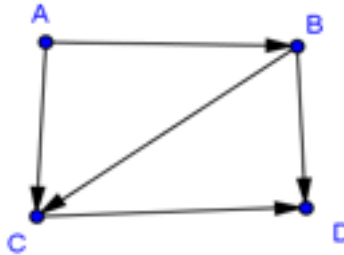
Um caminho fechado é aquele em que o primeiro vértice é igual ao último.

Um caminho gerador é aquele que tem todos os vértices do dígrafo em causa.

Um ciclo é um caminho fechado com todos os vértices distintos, excepto o primeiro e o último.

Teorema. Seja D um grafo acíclico, isto é, que não tem ciclo. Então, D tem um sumidouro e uma fonte.

Exemplo. Considere o dígrafo D abaixo indicado:

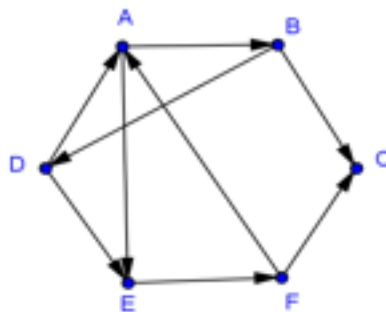


Este dígrafo é acíclico, logo pelo teorema acima, ele tem um sumidouro, o vértice D , e uma fonte, o vértice A .

Um vértice v é alcançável a partir de um vértice u , se existe um caminho de " u " para " v ".

Um semicaminho é o mesmo que um caminho, a não ser pelo facto de uma aresta e_i iniciar em $v_{(i-1)}$ ou em v_i , e terminar, respectivamente, em v_i ou em $v_{(i-1)}$. Semitrilhas e caminhos semi-simples são definidos de forma análoga.

Exemplo. Seja o dígrafo seguinte:



- $\text{outdeg}(A)=2$ e $\text{indeg}(F)=1$.
- O caminho (A,B,D) é um ciclo.
- O vértice C é alcançável a partir do vértice D , pois existe o caminho (D,E,F,A,B,C) . Nota-se que este caminho é um caminho gerador, é uma trilha e o seu comprimento é 5.

Exercício. Considere o dígrafo do exemplo anterior.

- Indique os outros ciclos.
- Determine $\text{outdeg}(E)$ e $\text{indeg}(C)$.
- Verifique se o vértice C é alcançável a partir do vértice E .

Conectividade.

- Um dígrafo $D=(V,A)$ é fortemente conexo se dado quaisquer par de vértices u e v , cada um deles for alcançável a partir do outro.
- Um dígrafo $D=(V,A)$ é unilateralmente conexo, ou unilateral, se dado quaisquer par de vértices u e v , um deles for alcançável a partir do outro.
- Um dígrafo $D=(V,A)$ é fracamente conexo, ou fraco, se existe um semicaminho entre quaisquer dois vértices u e v .

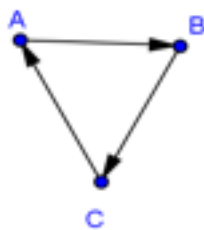
Observação.

- Seja G um grafo (não orientado) obtido do dígrafo G' considerando todas as arestas de G' como não orientadas. Então, G' é fracamente conexo se, e somente se, o grafo G é conexo.
- A conectividade forte implica a conectividade unilateral, e a conectividade unilateral implica a conectividade fraca.
- Diz-se que um dígrafo é estritamente unilateral se ele for unilateral, mas não forte.

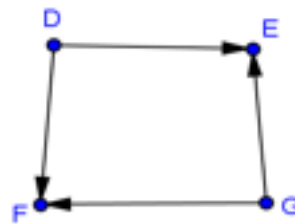
Teorema. Seja D um dígrafo orientado finito. Então:

- D é fortemente conexo se, e somente se, D tem um caminho gerador fechado.
- D é unilateralmente conexo se, e somente se, D tem um caminho gerador.

Exemplo. Considera-se os dígrafos abaixo indicados:



Dígrafo D_1



Dígrafo D_2

O dígrafo D_1 é fortemente conexo, pois qualquer vértice em D é alcançável a partir de qualquer dos restantes vértices.

o dígrafo D_2 não é unilateralmente conexo, consequentemente não é fortemente conexo, pois, por exemplo, nenhum dos vértices D e G é alcançável a partir do outro.

Exercício. Considere o dígrafo $D=(V,A)$, onde $V=\{A,B,C,D\}$ e $A=\{(A,B),(B,C),(C,D),(D,A),(A,D)\}$. Represente D através de um diagrama. Classifique D quanto a conectividade.

Representação de um dígrafo por intermédio de uma matriz. Seja D um dígrafo com vértices $v_1, v_2, v_3, \dots, v_m$. A matriz de D é uma matriz quadrada, de dimensão $m \times m$, $M_D=[m_{ij}]$, onde m_{ij} é o número de arestas como origem em v_i e extremidade v_j .

Se D não tiver arestas paralelas, as entradas de M_D são uns e zeros; caso contrário as entradas são números inteiros não negativos.

Também, toda matriz quadrada M de dimensão $m \times m$ com entradas não negativas, determina unicamente um dígrafo com m vértices.

Teorema. Seja M a matriz de um dígrafo D . Então, a entrada (i,j) da matriz M^n dá o número de caminhos de comprimento n de vértice v_i a vértice v_j .

Teorema. Seja M a matriz de um dígrafo D com m vértices. Seja $C = M + M^2 + M^3 + \dots + M^{(m-1)}$. Então, D é fortemente conexo se, e somente se, C não tem nenhuma entrada na diagonal principal igual a zero.

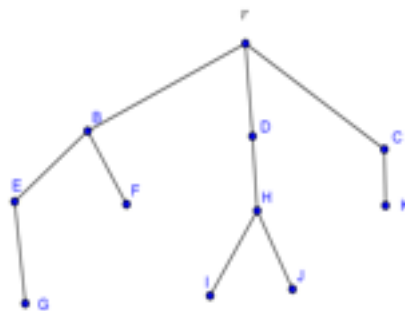
Árvore com raízes. Uma árvore com raiz, ou enraizada, é uma árvore T que contém um vértice chamado de raiz, que geralmente é designado por r .

Como existe um único caminho simples da raiz r para qualquer outro vértice v em T , então isto determina os sentidos das arestas de T . Sendo assim, T pode ser visto como um dígrafo.

Nível, ou profundidade. Numa árvore T com raiz r , o comprimento do caminho da raiz r para qualquer vértice v é dito nível, ou profundidade de v , e o maior nível é dito profundidade da árvore.

Folha e ramo. Numa árvore T com raiz r , um vértice com grau 1, diferente da raiz, é denominado folha de T , e o caminho orientado de um vértice até uma folha é dito um ramo.

Exemplo. Seja a seguinte árvore T com raiz r :

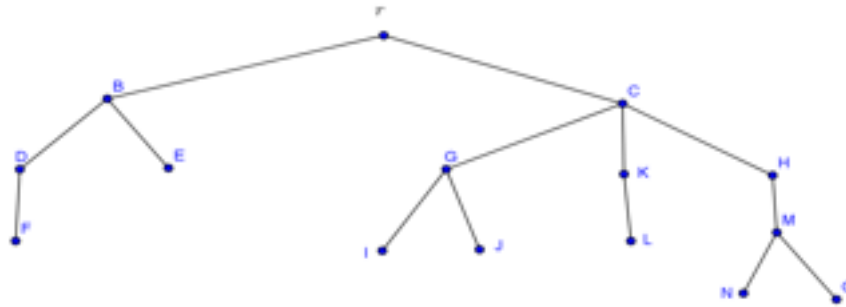


A profundidade desta árvore é três, pois é o maior nível entre os níveis dos vértices. Os vértices G , I , F , J e K são folhas. São ramos, por exemplo, os caminhos (r,C,K) e (D,H,I) .

Relação de precedência entre os vértices. Numa árvore T com raiz r , diz-se que um vértice u precede um vértice v , ou que vértice v segue o vértice u , se o caminho da raiz r a v inclui o vértice u . Diz-se que um vértice v segue imediatamente u , se (u,v) é uma aresta. Um vértice v é denominado pai de todos os vértices que o seguem imediatamente, e esses são denominados filhos desse vértice. Os filhos de um determinado vértice são chamados irmãos.

Exemplo. Na árvore do exemplo anterior, os filhos do vértice B são os vértices E e F , por conseguinte estes dois são irmãos.

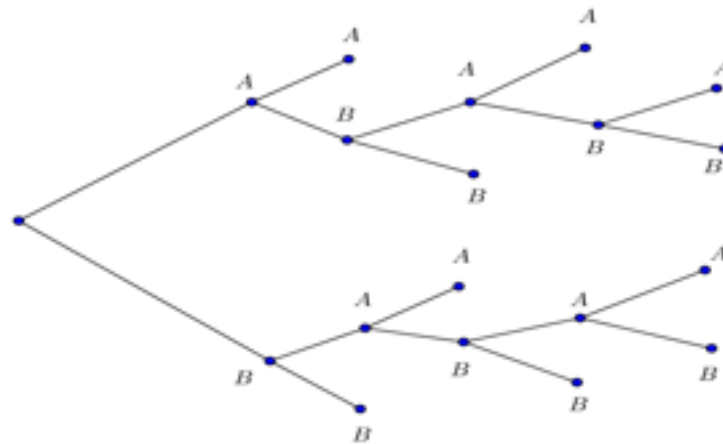
Exercício. Seja a seguinte árvore T com raiz r :



- A. Determine a profundidade de T.
- B. Indique os filhos do vértice C.
- C. Indique os irmãos do vértice K.

Aplicação da árvore enraizada. Uma árvore enraizada é um instrumento muito útil para enumerar todas as possibilidades lógicas de uma sequência de eventos, em que cada evento pode ocorrer em um número finito de maneiras.

Exemplo. Duas pessoas A e B estão a disputar um torneio de ténis tal que a primeira pessoa que ganhar dois jogos seguidos ou um total de três jogos ganha o torneio. Determina-se o número de maneiras pelas quais o torneio pode ocorrer, utilizando a árvore enraizada seguinte:



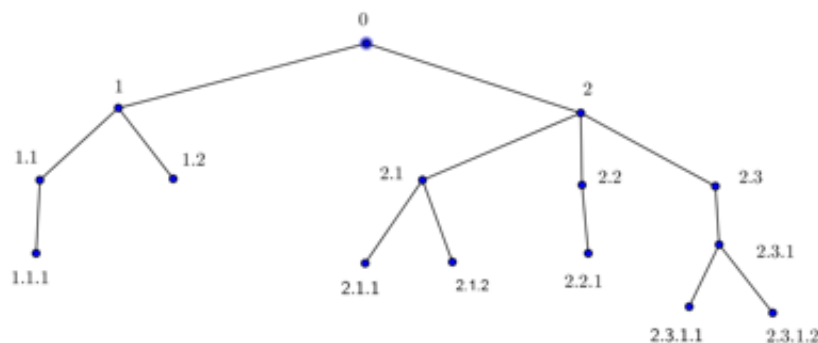
4. Em cinco partidas há quatro possibilidades, A vence a primeira, a terceira e a quinta partida, e B as restantes (ramo (A,B,A,B,A)), B vence a segunda, a quarta e a quinta partida, e A as restantes (ramo (A,B,A,B,B)), B vence a primeira, a terceira e a quinta partida, e A as restantes (ramo (B,A,B,A,B)), e A vence a segunda, a quarta e a quinta partida, e A as restantes (ramo (B,A,B,A,A)).

Árvore enraizada ordenada. Uma árvore enraizada T diz-se uma árvore ordenada se os filhos de cada vértice são ordenados. Tais árvores apresentam a raiz no topo, as arestas são direccionadas para baixo e os filhos são ordenados da esquerda para direita.

Sistema de endereçamento universal. Neste sistema, os vértices de uma árvore enraizada ordenada T (com raiz r) são rotulados da seguinte forma:

- Atribui-se 0 à raiz r e 1,2,3,... aos filhos de r , de acordo com a ordenação dos vértices;
- Os restantes vértices são ordenados da seguinte forma: se a é o rótulo do vértice v , então os filhos de v são rotulados com $a.1, a.2, a.3, \dots$, de acordo com a ordenação dos vértices.

Exemplo.



Ordem lexicográfica para uma árvore enraizada ordenada. O sistema de endereçamento universal constitui um importante instrumento para descrever linearmente (ou armazenar) uma árvore enraizada ordenada. Ou seja, dados os endereços a e b , diz-se que $a < b$ sempre que $b = a.c$ ou existem números inteiros positivos m e n tais que $a = r.m.s$ e $b = r.n.t$.

A ordem lexicográfica de uma árvore enraizada ordenada obtém-se lendo de cima para baixo o ramo mais à esquerda, depois o segundo ramo mais à esquerda, e assim por diante.

Exemplo. A ordem lexicográfica dos endereços da árvore ordenada do exemplo anterior, é o seguinte:

0,1,1.1,1.1.1,1.2,2,2.1,2.1.1,2.1.2,2.2,2.2.1,2.3,2.3.1,2.3.1.1,2.3.1.2.

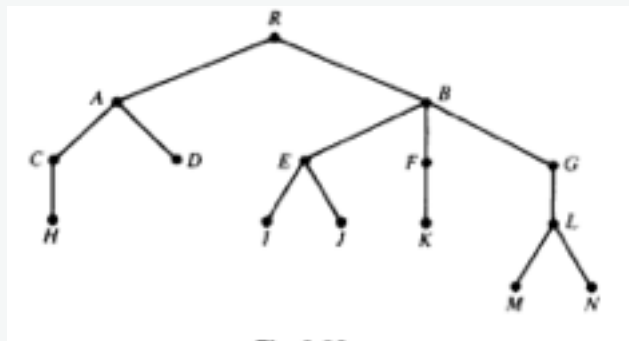
Exercício. Descreva a ordem lexicográfica dos endereços da árvore ordenada seguinte:

Conclusão

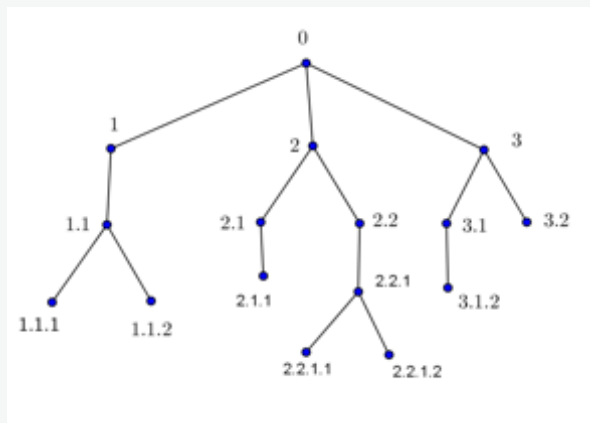
Nesta actividade abordou-se o conceito de dígrafo, e os conceitos associados a ele. Por ter as arestas sentidos, alguns conceitos são diferentes dos correspondentes em um multigrafo. A conectividade num dígrafo é caracterizada em termos de caminhos geradores. Uma árvore enraizada é um instrumento muito útil para enumerar todas as possibilidades lógicas de uma sequência de eventos, em que cada evento pode ocorrer em um número finito de maneiras. O estudo da ordem lexicográfica permite descrever linearmente os endereços de uma árvore enraizada ordenada.

Avaliação

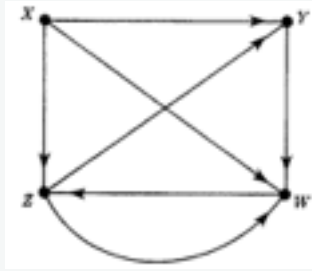
1. Considere a seguinte árvore enraizada T:



- a. Ache os irmãos de E.
 - b. Ache as folhas de T.
 - c. Indique o nível de cada um dos seguintes vértices: H, F, M.
2. Os seguintes endereços estão na ordem lexicográfica:
 $0, 1, 1.1, 2, 2.1, 2.1.1, 2.2, 2.2.1, 2.2.1.1, 2.2.1.2, 3, 3.1, 3.2.2.$
 - a. Esboce a correspondente árvore enraizada ordenada.
 3. Descreva a ordem lexicográfica dos endereços da árvore ordenada seguinte:



4. Considere o seguinte dígrafo G:



- Descreva formalmente o dígrafo G.
 - Ache todos os caminhos simples de X para Z.
 - Ache todos os caminhos simples de Y para Z.
 - Ache todos os ciclos em G.
 - G é unilateralmente conexo? G é fortemente conexo?
 - Ache o grau de entrada e o grau de saída de cada vértice de G.
 - Ache a lista de sucessores de cada vértice de G.
 - Existem fontes ou sumidouros?
 - Ache a matriz de adjacência A do dígrafo G.
 - Ache a matriz de caminhos P de G, usando a potência de A.
5. Considere o seguinte dígrafo G: $V(G) = \{a, b, c, d, e, f, g\}$; $A(G) = \{(a, a), (b, e), (a, e), (e, b), (g, c), (a, e), (d, f), (d, b), (g, g)\}$.
- Esboce o dígrafo G.
 - Identifique todos os laços e as arestas paralelas.
 - Existem sumidouros em G?

Resumo da Unidade

Nesta unidade estudou-se os multigrafos orientados e não orientados. Analisou-se os vários conceitos relativamente à teoria de grafos. Fez-se estudos do caminho euliano e do caminho hamiltoniano. Analisou-se a questão da coloração dos vértices de um multigrafo. Fez-se uma análise aos grafos conexos ponderados, com enfoque na determinação da árvore geradora mínima. Relacionou-se um multigrafo (dirigido e não dirigido) com matrizes. Estudou-se as árvores enraizadas.

Avaliação da Unidade

Testes Sumativo - Grafos

Instruções

O teste tem dez questões, e cada qual vale dez pontos. Deve apresentar todos os cálculos e todos os fundamentos que sustentam as resoluções feitas. O teste deve ser resolvido em duas horas.

CrITÉrios de Avaliação

São dez questões e cada uma delas vale 20 pontos, totalizando 200 pontos.

Escala de avaliação:

Insuficiente: 0 a 100 (exclusivo);

Suficiente: 100 a 140 (exclusivo);

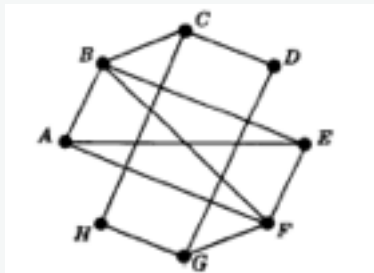
Bom: 140 a 170 (exclusivo);

Muito bom: 170 a 200.

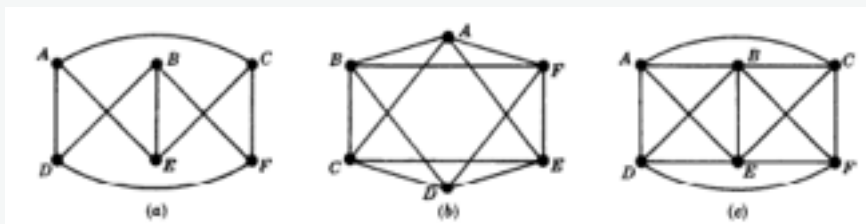
O aluno com Suficiente, Bom e Muito Bom considera-se com nível de conhecimentos suficientes para obter aprovação nesta unidade.

Avaliação

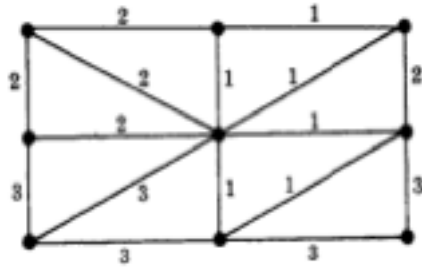
1. Ache o número cromático do seguinte grafo:



2. Esboce a representação planar, se possível, de cada um dos grafos abaixo:

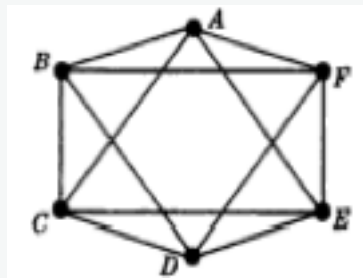


3. Ache todas as árvores geradoras T do grafo G que se segue:



a. Verifique se são árvores geradoras mínimas.

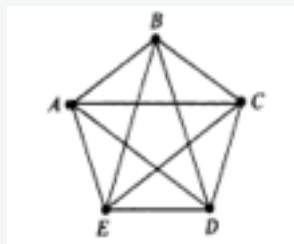
4. Obtenha a representação planar, e a respectiva coloração, do seguinte grafo:



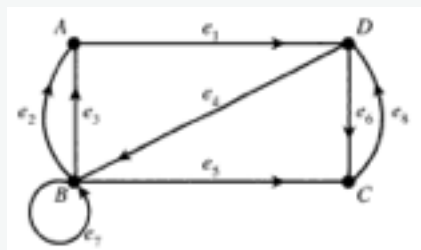
5. Desenhe o multigrafo G que corresponde a seguinte matriz de adjacência:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

6. Ache o número de circuitos hamiltonianos no grafo seguinte:



7. Determine a matriz G do seguinte dígrafo:



8. Considere os seguintes endereços que estão em ordem aleatória:

1,2,2,1,3,2,2,2,1,1,1,1,1,0,2,1,3,2,1,1,3,3,1,2,2,2,1,1,3,2,1,1,1,3,2,1,2,2,1,1,2.

- a. Coloque os endereços em ordem lexicográfica.
- b. Esboce a árvore enraizada ordenada com raízes correspondentes.

Leituras e outros Recursos

As leituras e outros recursos desta unidade encontram-se na lista de Leituras e Outros Recursos do curso.

Sede da Universidade Virtual africana

The African Virtual University
Headquarters

Cape Office Park

Ring Road Kilimani

PO Box 25405-00603

Nairobi, Kenya

Tel: +254 20 25283333

contact@avu.org

uer@avu.org

Escritório Regional da Universidade Virtual Africana em Dakar

Université Virtuelle Africaine

Bureau Régional de l'Afrique de l'Ouest

Sicap Liberté VI Extension

Villa No.8 VDN

B.P. 50609 Dakar, Sénégal

Tel: +221 338670324

bureauregional@avu.org