

Universidade Virtual Africana

INFORMÁTICA APLICADA: MAT 1301

CÁLCULO APLICADO PARA COMPUTAÇÃO

António Fernandes

Prefácio

A Universidade Virtual Africana (AVU) orgulha-se de participar do aumento do acesso à educação nos países africanos através da produção de materiais de aprendizagem de qualidade. Também estamos orgulhosos de contribuir com o conhecimento global, pois nossos Recursos Educacionais Abertos são acessados principalmente de fora do continente africano.

Este módulo foi desenvolvido como parte de um diploma e programa de graduação em Ciências da Computação Aplicada, em colaboração com 18 instituições parceiras africanas de 16 países. Um total de 156 módulos foram desenvolvidos ou traduzidos para garantir disponibilidade em inglês, francês e português. Esses módulos também foram disponibilizados como recursos de educação aberta (OER) em oer.avu.org.

Em nome da Universidade Virtual Africana e nosso patrono, nossas instituições parceiras, o Banco Africano de Desenvolvimento, convido você a usar este módulo em sua instituição, para sua própria educação, compartilhá-lo o mais amplamente possível e participar ativamente da AVU Comunidades de prática de seu interesse. Estamos empenhados em estar na linha de frente do desenvolvimento e compartilhamento de recursos educacionais abertos.

A Universidade Virtual Africana (UVA) é uma Organização Pan-Africana Intergovernamental criada por carta com o mandato de aumentar significativamente o acesso a educação e treinamento superior de qualidade através do uso inovador de tecnologias de comunicação de informação. Uma Carta, que estabelece a UVA como Organização Intergovernamental, foi assinada até agora por dezenove (19) Governos Africanos - Quênia, Senegal, Mauritânia, Mali, Costa do Marfim, Tanzânia, Moçambique, República Democrática do Congo, Benin, Gana, República da Guiné, Burkina Faso, Níger, Sudão do Sul, Sudão, Gâmbia, Guiné-Bissau, Etiópia e Cabo Verde.

As seguintes instituições participaram do Programa de Informática Aplicada: (1) Université d'Abomey Calavi em Benin; (2) Université de Ougadougou em Burkina Faso; (3) Université Lumière de Bujumbura no Burundi; (4) Universidade de Douala nos Camarões; (5) Universidade de Nouakchott na Mauritânia; (6) Université Gaston Berger no Senegal; (7) Universidade das Ciências, Técnicas e Tecnologias de Bamako no Mali (8) Instituto de Administração e Administração Pública do Gana; (9) Universidade de Ciência e Tecnologia Kwame Nkrumah em Gana; (10) Universidade Kenyatta no Quênia; (11) Universidade Egerton no Quênia; (12) Universidade de Addis Abeba na Etiópia (13) Universidade do Ruanda; (14) Universidade de Dar es Salaam na Tanzânia; (15) Université Abdou Moumouni de Niamey no Níger; (16) Université Cheikh Anta Diop no Senegal; (17) Universidade Pedagógica em Moçambique; E (18) A Universidade da Gâmbia na Gâmbia.

Bakary Diallo

O Reitor

Universidade Virtual Africana

Créditos de Produção

Autor

António Fernandes

Par revisor(a)

João Horta

UVA - Coordenação Académica

Dr. Marilena Cabral

Coordenador Geral Programa de Informática Aplicada

Prof Tim Mwololo Waema

Coordenador do módulo

Florence Tushabe

Designers Instrucionais

Elizabeth Mbasu

Benta Ochola

Diana Tuel

Equipa Multimédia

Sidney McGregor

Michal Abigael Koyier

Barry Savala

Mercy Tabi Ojwang

Edwin Kiprono

Josiah Mutsogu

Kelvin Muriithi

Kefa Murimi

Victor Oluoch Otieno

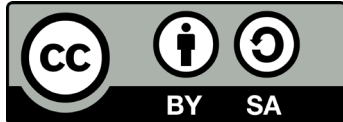
Gerisson Mulongo

Direitos de Autor

Este documento é publicado sob as condições do Creative Commons

[Http://en.wikipedia.org/wiki/Creative_Commons](http://en.wikipedia.org/wiki/Creative_Commons)

Atribuição <http://creativecommons.org/licenses/by/2.5/>



O Modelo do Módulo é copyright da Universidade Virtual Africana, licenciado sob uma licença Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 International. CC-BY, SA

Apoiado por



Projeto Multinacional II da UVA financiado pelo Banco Africano de Desenvolvimento.

Table of Contents

Prefácio	2
Créditos de Produção	3
Direitos de Autor	4
Apoiado por	4
Descrição Geral do Curso	8
Pré-requisitos	9
Materiais	9
Calendarização	11
Leituras e outros Recursos	11
Unidade 0. Diagnóstico	14
Introdução à Unidade	14
TERMOS-CHAVE	14
Actividades de Aprendizagem	15
Conclusão	20
Avaliação	20
Resumo da Unidade	26
Leituras e Outros Recursos	29
Unidade 1. Funções e Limites de funções em	30
Introdução à Unidade	30
Objetivos da Unidade	30
Termos-chave	30
Actividades de Aprendizagem	33
Conclusão	36
Conclusão	39
Valores assintóticos	57
Formas indeterminadas	59
Teoremas sobre limites	60
Conclusão	61

Resumo da Unidade	68
Avaliação da Unidade	68
Leituras e outros Recursos	91
Unidade 2. Cálculo diferencial em	92
Introdução à Unidade	92
Objetivos da Unidade	92
Termos-chave	92
Actividades de Aprendizagem	93
Descontinuidade de funções.	96
Conclusão	99
Derivada de funções compostas.	105
Derivadas de funções notáveis.	106
Traçado de gráfico de funções.	122
Diferencial de uma função, notação de Leibniz	123
Conclusão	125
Resumo da Unidade.	127
Critérios de avaliação	128
Leituras e outros Recursos	140
Unidade 3. Cálculo integral em	141
Introdução à Unidade	141
Objectivos da Unidade	141
Termos-chave	141
Actividades de Aprendizagem	142
Derivada exterior e forma diferencial	144
Técnicas de integração.	146
Conclusão	156
Condições de convergência	162
Natureza das séries	164
Resumo dos testes de convergência.	171
Conclusão	171

Conclusão	190
Resumo da Unidade 3.	193
Referências do Curso	204
Leituras e outros recursos opcionais:	204

Descrição Geral do Curso

Bem-vindo(a) a Cálculo aplicado para computação

O Cálculo pretende ser um método geral de resolução de problemas quantificáveis.

Na aplicação do método do Cálculo, ou como é mais conhecido do “método infinitesimal”, um problema é “dividido em partes infinitesimais” (diferenciação), analisado nas suas relações com as partes vizinhas e posteriormente “somado” (integração) até obter a solução.

As duas partes deste método: a análise e a síntese formam um modelo para métodos mais sofisticados baseados no Cálculo, usados em ciência aplicada.

Os conceitos que se aprendem no Cálculo permitem aos estatísticos, físicos e engenheiros criar modelos matemáticos de situações reais e de problemas concretos e simular suas resoluções sob diferentes condições de funcionamento.

O Cálculo foi inventado por Leibnitz (1684), mas os resultados da aplicação do método só tiveram impacto a partir da publicação do livro de Newton “Os Princípios Matemáticos da Filosofia Natural”, em 1687.

Consultar:

- http://en.wikipedia.org/wiki/Leibniz%E2%80%93Newton_calculus_controversy
- <http://archive.org/details/newtonspmathema00newtrich>

Este curso pretende ser uma iniciação a este método, uma entrada pela primeira porta da pesquisa e investigação científica.

São tratados os seguintes temas:

- Matemática básica: Números e funções simples, trigonometria, funções complexas e geometria analítica;
- Diferenciação: Derivadas de funções incluindo trigonométricas, exponenciais e logarítmicas;
- Métodos de diferenciação;
- Regras de diferenciação: regra do produto, regra do quociente, regra da cadeia; Derivadas de ordem superior à primeira;
- Aplicações da diferenciação: Máximos e mínimos, método para resolver equações;
- Cálculo integral: primitivação como operador inverso da diferenciação, formas diferenciais, integrais de Riemann, integrais definidas, fórmulas-padrão;
- Técnicas de integração: integração por partes, por substituição, frações parciais, elementos de integração numérica,
- Aplicações da integração: valor médio de uma função, cálculo de comprimento, área e volume;

Pré-requisitos

Noções básicas da álgebra (operações sobre conjuntos numéricos N, Z e Q) e trigonometria.

Materiais

Os materiais necessários para este curso incluem:

- O CÁLCULO COM GEOMETRIA ANALÍTICA, 3. ed. , Volume 1, Louis Leithold, Editora HARBRA Ltda, São Paulo, 1994
- CALCULUS WITH ANALYTIC GEOMETRY, 2. ed., Smmons, G, McGraw-Hill, 1996;
- <http://www.youtube.com/channel/UC4atV0sjMDVUW1v2ebQkCmQ>
- <http://www.wikipedia.org/>
- Software geogebra (<http://www.geogebra.org/>), wxMaxima (<http://sourceforge.net/projects/wxmaxima/>), (ou outro CAS disponível sob CC)

Objetivos do Curso

Após concluir este curso, o(a) aluno(a) deve ser capaz de:

- Determinar o comportamento geral de uma função através do seu gráfico, estudando o sinal da função entre os zeros, bordos do domínio e/ou pontos de descontinuidade;
- Determinar os pontos onde uma função atinge valores extremos;
- Calcular derivadas de funções elementares e calcular derivadas de funções implícitas;
- Calcular primitivas de funções elementares, integral de uma forma diferencial usando métodos de substituição e integração por partes;
- Calcular áreas de figuras planas delimitadas por gráfico de funções.
- Aplicar o método do Cálculo em problemas unidimensionais.

Unidades

- **Unidade 0: Diagnóstico**

Esta unidade apresenta uma revisão e faz o diagnóstico das noções básicas da álgebra (operações sobre conjuntos numéricos N, Z, Q e R) e da trigonometria, ao mesmo tempo que familiariza o estudante com a linguagem especializada da matemática.

- **Unidade 1: Funções e limites de funções em**

Esta unidade introduz os elementos básicos da topologia de $\mathbb{R}$, apresenta as funções reais elementares e desenvolve os métodos para resolver equações e inequações em $\mathbb{R}$;

Também introduz sequências em $\mathbb{R}$ (funções de $\mathbb{N}$ para $\mathbb{R}$), estuda a convergência de sequências em $\mathbb{R}$, e por fim estuda limites de funções reais quer em pontos reais quer no infinito.

- **Unidade 2: Cálculo diferencial em**

Esta unidade apresenta a continuidade de funções, derivadas de funções em $\mathbb{R}$, a interpretação geométrica da derivada, a derivada exterior, as formas diferenciais de funções em $\mathbb{R}^n$ e os elementos básicos das equações diferenciais de primeira ordem;

- **Unidade 3: Cálculo integral em**

Esta unidade apresenta as primitivas de funções elementares, a integral de uma forma diferencial, o teorema fundamental do cálculo, as técnicas de integração, a integral de Riemann, a interpretação geométrica do integral de Riemann e a aplicação do método do cálculo no cálculo de áreas e volumes de figuras e sólidos geométricos elementares;

Avaliação

Em cada unidade encontram-se incluídos instrumentos de avaliação formativa a fim de verificar o progresso do(a)s aluno(a)s.

No final de cada módulo são apresentados instrumentos de avaliação sumativa, tais como testes e trabalhos finais, que compreendem os conhecimentos e as competências estudadas no módulo.

A implementação dos instrumentos de avaliação sumativa fica ao critério da instituição que oferece o curso. A estratégia de avaliação sugerida é a seguinte:

1	Unidade 0 (avaliação formativa)	10%
2	Unidade 1 (avaliação formativa)	20%
3	Unidade 2 (avaliação formativa)	30%
4	Unidade 3 (avaliação formativa)	30%
5	Módulo (avaliação sumativa)	10%

Calendarização

Unidade	Temas e Atividades	Estimativa do tempo
Unidade 0	Exposição teórica + Prática + Aval. formativa	12 horas
Unidade 1	Exposição teórica + Prática + Aval. formativa	24 horas
Unidade 2	Exposição teórica + Prática + Aval. formativa	36 horas
Unidade 3	Exposição teórica + Prática + Aval. formativa	36 horas
Avaliação	Avaliação sumativa	12 horas

Leituras e outros Recursos

As leituras e outros recursos deste curso são:

Unidade 0

Leituras e outros recursos obrigatórios:

- PRECALCULUS, Cynthia Young, John Wiley & Sons Inc., 2010;
- ALGEBRA & TRIGONOMETRY, 3 Ed, Cynthia Young, John Wiley & Sons Inc., 2013;
- <https://pt.khanacademy.org/math/>

Leituras e outros recursos opcionais:

- <http://pt.wikipedia.org/wiki>
- <http://www.youtube.com/channel/UC4atV0sjMDVUW1v2ebQkCmQ>

Unidade 1

Leituras e outros recursos obrigatórios:

- O CÁLCULO COM GEOMETRIA ANALÍTICA, 3. ed. , Volume 1, Louis Leithold, Editora HARBRA Ltda, São Paulo, 1994
- CALCULUS WITH ANALYTIC GEOMETRY, 2. ed., Smmons, G, McGraw-Hill, 1996;
- CALCULUS, Gilbert Strang, Massachusetts Institute of Technology, Wellesley-Cambridge Press, 1991, <http://ocw.mit.edu/resources/res-18-001-calculus-online-textbook-spring-2005/textbook/>

Leituras e outros recursos opcionais:

- <https://pt.khanacademy.org/math/>
- <http://www.wikipedia.org/>
- <http://www.wolfram.com/>
- <http://www.youtube.com/channel/UC4atV0sjMDVUW1v2ebQkCmQ>

Unidade 2

Leituras e outros recursos obrigatórios:

- O CÁLCULO COM GEOMETRIA ANALÍTICA, 3.ed., Volume 1, Louis Leithold, Editora HARBRA Ltda, São Paulo, 1994
- CALCULUS WITH ANALYTIC GEOMETRY, 2.ed, Smmons, G, McGraw-Hill, 1996;
- CALCULUS, Gilbert Strang, Massachussets Institute of Technology, Wellesley-Cambridge Press, 1991, <http://ocw.mit.edu/resources/res-18-001-calculus-online-textbook-spring-2005/textbook/>

Leituras e outros recursos opcionais:

- <https://pt.khanacademy.org/math/>
- <http://www.wikipedia.org/>
- <http://www.wolfram.com/>
- <http://www.youtube.com/channel/UC4atV0sjMDVUW1v2ebQkCmQ>

Unidade 3

Leituras e outros recursos obrigatórios:

- O CÁLCULO COM GEOMETRIA ANALÍTICA, 3. ed., Volume 1, Louis Leithold, Editora HARBRA Ltda, São Paulo, 1994
- CALCULUS WITH ANALYTIC GEOMETRY, 2ª Ed, Smmons, G, McGraw-Hill, 1996;
- CALCULUS, Gilbert Strang, Massachussets Institute of Technology, Wellesley-Cambridge Press, 1991, <http://ocw.mit.edu/resources/res-18-001-calculus-online-textbook-spring-2005/textbook/>

Leituras e outros recursos opcionais:

- <https://pt.khanacademy.org/math/>
- <http://www.wikipedia.org/>
- <http://www.wolfram.com/>
- <http://www.youtube.com/channel/UC4atV0sjMDVUW1v2ebQkCmQ>

Unidade 0. Diagnóstico

Introdução à Unidade

Nesta unidade é levado a cabo uma revisão e um diagnóstico do conhecimento dos pré-requisitos básicos do Cálculo, nomeadamente da álgebra (operações sobre conjuntos numéricos N, Z, Q e R) e da trigonometria.

Objectivos da Unidade

Após a conclusão desta unidade, deverá ser capaz de:

- Executar operações algébricas nos conjuntos numéricos, em especial de potências, radicação e logaritmos em R ;
- Determinar os casos em que certas operações algébricas não estão definidas;
- Determinar os principais valores das funções trigonométricas, usando o círculo unitário.

TERMOS-CHAVE

Números: resultado de contagens ou medições

Números naturais: resultado de contagens

Indução matemática: método que comparar N com outros conjuntos

operação binária: resultado de operação de elementos do cj. ...fica dentro do cj.

Operandos: elementos que entram na operação

Soma: repetição sucessiva da unidade de contagem

Multiplicação: soma sucessiva de parcelas idênticas

Potenciação: multiplicação sucessiva de termos idênticos

Comutativa: a ordem de operandos pode ser trocada

Associativa: a associação de operandos pode ser trocada

Elemento neutro: deixa invariante o segundo operando

Base: primeiro operando da potenciação

Potencia: segundo operando da potenciação

Polinomial: variável x na base

Exponencial: variável x na potência

Radiciação: potenciação pelo inverso;

Logaritmo na base a de b: inverso da exponenciação;

Circunferencia unitária: locus de pontos onde se definem ângulos;

Ângulo: medida do deslocamento angular sobre a circunf. unitária;

Radiano: a unidade de medida do ângulo;

Graus: unidade de medida de ângulo (2π radiano $= 360^\circ$)

Fun. coseno: mede abcissa de um ponto na cir. unitária;

Fun. seno: mede ordenada de um ponto na cir. unitária;

Fun. tangente: mede a razão entre o seno e o coseno.

Actividades de Aprendizagem

Actividade 0.1 - Revisão de pré-requisitos da álgebra

Introdução

A primeira parte desta actividade trata os números, operações sobre conjuntos numéricos, operações inversas, operações não definidas em $\mathbb{R}$.

A segunda parte trata o círculo unitário e a definição de radiano como medida de um ângulo, as funções trigonometrias e as identidades trigonométricas.

Detalhes da actividade

Parte I - Álgebra de $\mathbb{R}$

Números resultam de contagens ou medições. Qualquer destas actividades é uma comparação de uma grandeza (a ser contada ou medida) com uma unidade (o padrão da contagem ou da medição).

No conjunto dos números naturais, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ define-se a operação soma como a "repetição sucessiva da unidade", a operação multiplicação como a "soma sucessiva de parcelas idênticas", e a operação potenciação como a "multiplicação sucessiva de termos idênticos".

As operações inversas nem sempre existem, sendo necessário estender o conjunto $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ para $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$, este para $\mathbb{Q} = \{\dots, -1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, \dots\}$ e por fim $\mathbb{Q}$ para $\mathbb{R}$ para garantir a existência de resultados das operações inversas.

Mesmo assim ainda existem excepções em que as operações inversas não são definidas em $\mathbb{R}$.

Operações com $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ são bastante conhecidas e não serão aqui revistas.

Qualquer elemento de $\mathbb{Q}$ pode ser representado por frações: (p/q) ou p/q com $p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0$, onde p é chamado numerador e q denominador da fração.

Definem-se:

igualdade de frações (no sentido de classes de equivalência):

$$(p/q) = (r/s) \iff ps = qr, q \neq 0, s \neq 0$$

inverso de frações: $(p/q)^{-1} = (q/p), q \neq 0, p \neq 0$

Para somar frações transformam-se as frações em outras equivalentes, com denominador comum: $(p/q) + (r/s) = (ps + qr) / (qs), q \neq 0, s \neq 0$

Qualquer fração pode ser reduzida à forma $(p/q), q \neq 0$ onde p, q são primos entre si (sem divisores comuns, excepto 1).

Regras de compatibilização dos elementos de $\mathbb{Q}$ com a potenciação, $n \in \mathbb{N}, q \neq 0, p \neq 0$:

$$(p/q)^n = (p^n) / (q^n)$$

$$(p/q)^{-n} = ((p/q)^{-1})^n = (q^n) / (p^n)$$

A radiciação é definida como "potenciação pelo inverso": $a^{1/n} = x \iff x^n = a$

para $a \geq 0$ se n é par

para $a \in \mathbb{Q}$ se n é ímpar

Usa-se também a notação: $a^{1/n} = [n]\sqrt[n]{a}$ e $[2]\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a}$

Respeitando as condições da definição, as regras de compatibilização dos elementos de $a, b \in \mathbb{Q}$ com a radiciação, para $n \in \mathbb{N}, a > 0, b > 0$, são:

$$[n]\sqrt[n]{a} [n]\sqrt[n]{b} = [n]\sqrt[n]{ab} = (ab)^{1/n}$$

$$[n]\sqrt[n]{a} [m]\sqrt[m]{a} = ([nm]\sqrt[nm]{a})^{1/(m+n)}$$

$$[n]\sqrt[n]{([m]\sqrt[m]{a})} = [nm]\sqrt[nm]{a} = a^{1/(nm)}$$

$$[n]\sqrt[n]{a^m} = ([n]\sqrt[n]{a})^m = a^{m/n}$$

$$(1 / ([n]\sqrt[n]{a})) = (([n]\sqrt[n]{a^{-1}})) / a \quad (\text{racionalização da fração})$$

Entretanto, a radiciação não é operação binária em $\mathbb{Q}$, por exemplo: $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

O logaritmo na base a de b define-se por: $\log_a b = x \iff a^x = b$, para qualquer $a > 0$ e $b > 0$.

Respeitando as condições de definição, as regras de compatibilização dos elementos de $\mathbb{Q}$ com logaritmo, para $a > 0, a \neq 0, q > 0, p > 0$, são:

$$\log_{\{a\}} pq = \log_{\{a\}} p + \log_{\{a\}} q$$

$$\log_{\{a\}} p^n = n \log_{\{a\}} p$$

$$\log_{\{a\}} (p/q) = \log_{\{a\}} p - \log_{\{a\}} q$$

$$\log_{\{a\}} p \log_{\{b\}} a = \log_{\{b\}} p$$

O logaritmo também não é uma operação binária em $\mathbb{Q}$, por exemplo, $\log_{\{3\}} 3 \notin \mathbb{Q}$.

No corpo real $\mathbb{R}$ podem ser levadas a cabo as seguintes operações, com garantia que o resultado existe, é um número real e é único:

adição;

subtração;

multiplicação;

divisão (excepto por zero);

potência real sobre qualquer base positiva ou potencia inteira sobre qualquer base real (excepto potencia zero da base zero);

radiciação inteira, para qualquer número real se o índice for ímpar mas apenas para números não negativos se o índice for par;

logaritmo de base positiva (diferente de 1) para qualquer número real positivo.

Não são definidas no corpo real as operações:

divisão por zero;

potencia zero da base zero;

radiciação par de números negativos;

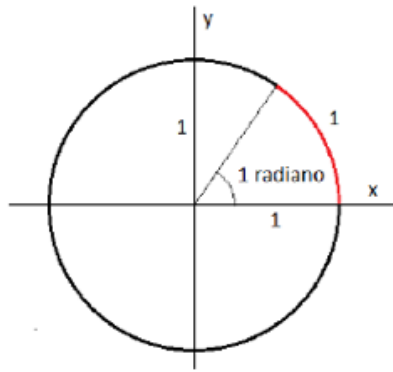
logaritmos de base igual a 1 ou de base positiva para números reais não positivos;

logaritmos de base negativa.

Part II - Trigonometria

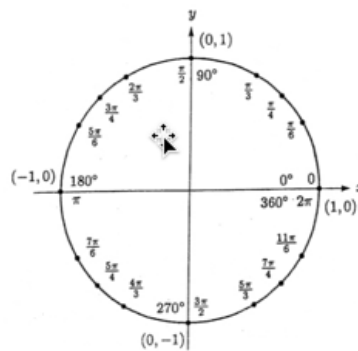
Considere um deslocamento, sobre uma circunferência unitária (raio 1) centrada num ponto (origem), a partir de uma direcção de referência (eixo das abcissas x).

A medida do deslocamento angular sobre a circunferência unitária chama-se ângulo, e o ângulo correspondente a uma unidade de deslocamento sobre a circunferência unitária chama-se radiano:

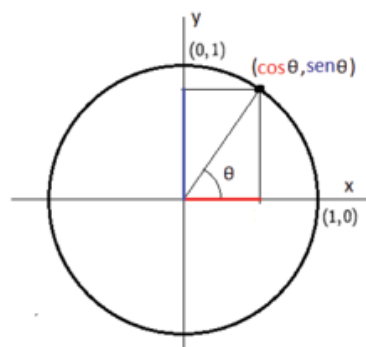


Uma outra unidade de medida de ângulo é o grau: 2π radiano = 360° .

Várias posições intermédias podem ser identificadas sobre a circunferência unitária (note a simetria da circunferência e as posições dos pontos nos quatro quadrantes):



As funções $\cos\theta$ e $\sin\theta$ são definidas como medidas da abcissa e da ordenada respectivamente de um ponto sobre a circunferência unitária, deslocado de um ângulo θ em relação ao eixo de referência x.



A relação trigonométrica mais importante advém desta definição e do teorema de Pitágoras aplicado ao triângulo de lados $\cos^2$ e $\sin^2$ e com hipotenusa igual à unidade:

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

A segunda fórmula bastante útil é $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$

As funções $\cos\theta$ e $\sin\theta$ são periódicas com período igual ao ângulo após uma volta completa (2π rad). Os gráficos das funções seno e cosseno, tomando x como valor do ângulo:

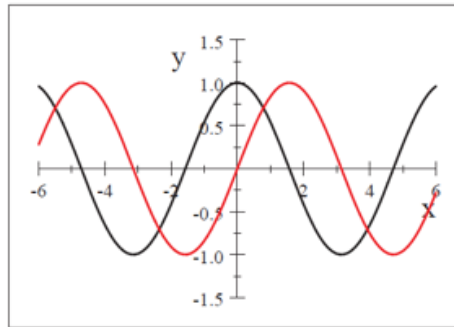
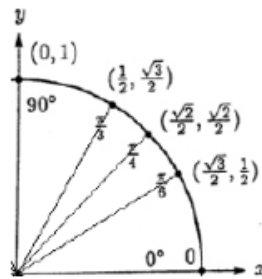


Gráfico de $\cos x$ e $\sin x$

Pela simetria da circunferência unitária, apenas é necessário conhecer os valores de $\sin \theta$ e $\cos \theta$ no primeiro quadrante:



Os valores nos outros quadrantes podem ser obtidos pelas relações:

- $\cos(\pi - \theta) = -\cos \theta$
- $\sin(\pi - \theta) = \sin \theta$
- $\cos(-\theta) = \cos \theta$ (coseno é uma função par)
- $\sin(-\theta) = -\sin \theta$ (seno é uma função ímpar)
- $\cos((\pi/2) - \theta) = \sin \theta$ (seno e coseno são complementares)
- $\sin((\pi/2) - \theta) = \cos \theta$

Algumas propriedades das funções trigonométricas elementares:

- os zeros de $\cos x$ são os valores $x = (\pi/2) + n\pi$ para $n \in \mathbb{Z}$
- os zeros de $\sin x$ são os valores $x = n\pi$ para $n \in \mathbb{Z}$
- ambas são periódicas com o mesmo período 2π : $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ e $\sin(x + 2\pi) = \sin x$
- ambas são translações uma da outra: $\cos(x + (\pi/2)) = \sin x$ e $\sin(x - (\pi/2)) = \cos x$

A função tangente é definida pela razão entre o seno e o cosseno: $\tan x = (\sin x)/(\cos x)$

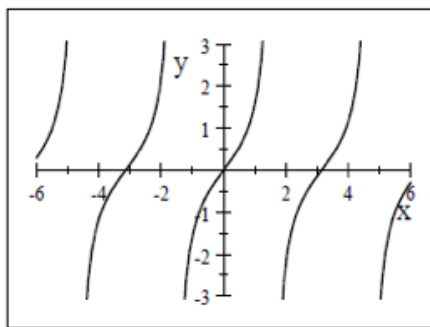


Gráfico de $\tan x$

Nota que a função não é definida nos zeros do cosseno.

Conclusão

Foram revistos os conceitos da álgebra de números (medidas sobre a recta real) e a trigonometria de ângulos (medidas sobre o círculo unitário).

Foram revistas as principais operações, suas operações inversas e as principais excepções/proibições.

Avaliação

Agrupe um mínimo de 5 e um máximo de 10 das perguntas seguintes em cada teste de avaliação de 1 hora, sem consultas.

Escolha perguntas-tipo diferentes na preparação de cada teste, mudando os parâmetros e dados de base para evitar colagens.

Cada pergunta vale entre 10% e 20%, conforme o número de perguntas seleccionadas.

1. **Problema:** No corpo R , para $a, b, c \in R$ provar que: $a+c=b+c \Leftrightarrow a=b$ (lei do corte da soma)

Resposta:

O recíproco resulta da "boa definição" da soma: para qualquer $a, b, c \in R$, tem-se que se $a=b$ então $a+c=b+c$.

Então se $a+c=b+c$, então

$$a+c+(-c)=b+c+(-c)$$

$$\Leftrightarrow a+(c+(-c))=b+(c+(-c))$$

$$\Leftrightarrow a=b$$

2. **Problema:** No corpo R , para $a, b, c \in R$ provar que: $a=b \Leftrightarrow a \cdot c = b \cdot c$, para qualquer c

Se $c=0$ então $a \cdot c = 0 = b \cdot c$

Se $c \neq 0$ então $c^{-1} \in R$ e $c \cdot c^{-1} = 1$

$$a=b$$

$$a(c^{-1}c) = b \cdot 1$$

$$(a \cdot c) \cdot c^{-1} = b$$

$$(a \cdot c) \cdot c^{-1} \cdot c = b \cdot c$$

$$(a \cdot c) \cdot (c^{-1} \cdot c) = b \cdot c$$

$$a \cdot c = b \cdot c$$

3. **Problema:** No corpo R , para $a, b, c \in R$ provar que: $a \cdot c = b \cdot c \Leftrightarrow a = b$ apenas se $c \neq 0$

Se $c \neq 0$ então $c^{-1} \in R$ e $c \cdot c^{-1} = 1$

$$a \cdot c = b \cdot c$$

$$a \cdot c \cdot c^{-1} = b \cdot c \cdot c^{-1}$$

$$a \cdot (c \cdot c^{-1}) = b \cdot (c \cdot c^{-1})$$

$$a = b$$

4. **Problema:** No corpo R , para $a, b, c \in R$ provar que: $x = b - a$ é a única solução de $a + x = b$

É **solução** pois $a + x = a + (b - a) = (a - a) + b = b$

É única pois se x' for solução então

$$a + x' = b$$

$$-a + (a + x') = -a + b$$

$$(-a + a) + x' = -a + b$$

$$x' = b - a$$

5. **Problema:** No corpo R , para $a, b, c \in R$ provar que: Se $a \neq 0$ então $y = (b/a)$ é a única **solução** de $a \cdot y = b$

Se $a \neq 0$ então $a^{-1} \in R$ e $b \cdot a^{-1} = (b/a)$

É solução pois $a \cdot y = a \cdot (b/a) = a \cdot (b \cdot a^{-1}) = (a \cdot a^{-1}) \cdot b = b$

É única pois se y' for solução então

$$a \cdot y' = b$$

$$a \cdot a^{-1} \cdot a \cdot y' = a \cdot a^{-1} \cdot b$$

$$y' = a \cdot a^{-1} \cdot b = (b/a)$$

6. **Problema:** No corpo R , para $a, b, c \in R$ provar que: Se $a \cdot b = 0$ então $a = 0$ ou $b = 0$

Deixa $a \oplus b = 0 \wedge a \neq 0$ então $a \oplus 1 \in R$ e

$$a \oplus 1 \oplus (a \oplus b) = a \oplus 1 \oplus 0$$

$$\oplus (a \oplus 1 \oplus a) \oplus b = 0$$

$$\oplus b = 0$$

Para $b \neq 0$ a demonstração é idêntica

7. **Problema:** No corpo R , para $\forall a, b, c \in R$ provar que: $-(-a) = a$

$$-(-a) + (-a) = 0 = a + (-a) \text{ logo } -(-a) = a$$

8. **Problema:** No corpo R , para $\forall a, b, c \in R$ **provar que:** $-(a+b) = (-a) + (-b) = -a-b$

$$-(a+b) + (a+b) = 0 = (-a) + a + (-b) + b = (-a) + (-b) + (a+b) \text{ logo } -(a+b) = (-a) + (-b)$$

$$-a-b = (-a) + (-b)$$

9. **Problema:** No corpo R , para $\forall a, b, c \in R$ provar que: $-(a \oplus b) = (-a) \oplus b = a \oplus (-b)$

$$-(a \oplus b) + (a \oplus b) = 0 = 0 \oplus b = ((-a) + a) \oplus b = (-a) \oplus b + (a \oplus b) \text{ logo } -(a \oplus b) = (-a) \oplus b$$

10. **Problema:** No corpo R , para $\forall a, b, c \in R$ **provar que:** $(-a) \oplus (-b) = a \oplus b$

$$(-a) \oplus (-b) - (a \oplus b) = (-a) \oplus (-b) + (-a) \oplus b = (-a) \oplus ((-b) + b) = 0 = (a \oplus b) - (a \oplus b) \text{ logo}$$

$$(-a) \oplus (-b) = a \oplus b$$

11. **Problema:** No corpo R , para $\forall a, b, c \in R$ **provar que:** Se $b \neq 0$ então

$$-(b \oplus 1) = (-b) \oplus 1$$

Se $b \neq 0$ então $b \oplus 1 \in R$ e $b(b \oplus 1) = 1$

$$(-b) \oplus 1 \cdot b = (-b) \oplus 1 \cdot (-(-b)) = -((-b) \oplus 1 \cdot (-b)) = -1 = -(b \oplus 1 \cdot b) = (- (b \oplus 1)) \cdot b$$

$$\text{Logo } (-b) \oplus 1 = - (b \oplus 1)$$

12. **Problema:** No corpo R , para $\forall a, b, c \in R$ provar que: Se $b \neq 0$ então $b \oplus^n = (b \oplus 1)^n$

$$^n \text{ Se } b \neq 0 \text{ então } b \oplus 1 \in R \text{ e } b \oplus b \oplus 1 = 1$$

Indução:

$$b \oplus 1 = (b \oplus 1)^1 = b \oplus 1$$

$$\text{Asumindo } b \oplus^n = (b \oplus 1)^n$$

$$b \oplus^{n+1} = b \oplus^n \oplus 1 = b \oplus^n \cdot b \oplus 1 = (b \oplus 1)^n \cdot b \oplus 1 = (b \oplus 1)^n \oplus 1$$

13. **Problema:** No corpo R , para $\forall a, b, c \in R$ **provar que:** $(a/b) \neq 0$ se e só se $a \neq 0$

$$\text{Se } (a/b) \neq 0 \text{ então } ((a/b)) \oplus 1 = ((b/a)) \in R \text{ logo } a \neq 0$$

Suponha que $a \neq 0 \wedge (a/b) = 0$ então $a \oplus 1 \cdot (a/b) = 0 \oplus 1 \cdot (1/b) = 0$ contradição do facto que 0 não possui inverso

$$\text{Logo } \neg (a \neq 0 \wedge (a/b) = 0) \Leftrightarrow a \neq 0 \wedge (a/b) \neq 0$$

14. **Problema:** No corpo R , para $a, b, c \in R$ provar que: $(b/b)=1$ para qualquer $b \neq 0$. Se $b \neq 0$ então $b^{-1} \in R$ e $b \cdot b^{-1} = (b/b) = 1$

15. **Problema:** No corpo R , para $a, b, c \in R$ **provar que:** $(a/b) \pm (c/d) = ((ad \pm bc) / (bd))$, para $b, d \neq 0$

Se $b, d \neq 0$ então $b^{-1}, d^{-1} \in R$ e $b \cdot b^{-1} = d \cdot d^{-1} = 1$

$$\begin{aligned} ((ad \pm bc) / (bd)) &= ((ad \pm bc) / (bd)) (bd) (bd)^{-1} \\ &= (ad \pm bc) (d^{-1} b^{-1}) \\ &= ad(d^{-1} b^{-1}) \pm bc(d^{-1} b^{-1}) \\ &= ab^{-1} \pm cd^{-1} \\ &= (a/b) \pm (c/d) \end{aligned}$$

16. **Problema:** No corpo R , para $a, b, c \in R$ **provar que:** $(a/b) \cdot (c/d) = ((ac) / (bd))$, para $b, d \neq 0$

Se $b, d \neq 0$ então $b^{-1}, d^{-1} \in R$ e $b \cdot b^{-1} = d \cdot d^{-1} = 1$

$$\begin{aligned} ((ac) / (bd)) &= ((ac) / (bd)) (bd) (bd)^{-1} \\ &= ac (bd)^{-1} \\ &= ac (d^{-1} b^{-1}) \\ &= (ab^{-1}) (cd^{-1}) \\ &= (a/b) \cdot (c/d) \end{aligned}$$

17. **Problema:** No corpo R , para $a, b, c \in R$ **provar que:** Se $(c/d) \neq 0$ então $((a/b) / (c/d)) = ((a \cdot d) / (b \cdot c))$

Se $b, d \neq 0$ então $b^{-1}, d^{-1} \in R$ e $b \cdot b^{-1} = d \cdot d^{-1} = 1$

$$\begin{aligned} ((a/b) / (c/d)) &= (a/b) (c/d)^{-1} \\ &= (ab^{-1}) (cd^{-1})^{-1} \\ &= (ab^{-1}) (c^{-1} d) \\ &= (ad) (b^{-1} c^{-1}) \\ &= (ad) (bc)^{-1} \\ &= ((ad) / (bc)) \end{aligned}$$

18. **Problema:** Ache a medida equivalente em radianos

(a) $60^\circ = (\pi/3)$

(b) $135^\circ = ((3\pi)/4)$

(c) $210^\circ = ((7\pi)/6)$

- (d) $-150^\circ = - (5\pi) / 6$
- (e) $20^\circ = (\pi/9)$
- (f) $450^\circ = (5\pi) / 2$
- (g) $-75^\circ = - (5\pi) / (12)$
- (h) $100^\circ = (5\pi) / 9$

19. **Problema:** Ache a medida equivalente em graus para os valores dados em radianos

- (a) $(1/6)\pi = 30$
- (b) $(3/4)\pi = 135$
- (c) $(4/3)\pi = 240$
- (d) $-5\pi = -900$
- (e) $(1/3) = ((180) / (3\pi))$
- (f) $-5 = - ((5 \times 180) / \pi)$
- (g) $((11) / (12))\pi = ((165) / 2)$
- (h) $0.2 = ((36) / \pi)$

20. **Problema:** Determine o valor exacto da função

- (a) $\sin(4/3)\pi = -(1/2)\sqrt{3}$
- (b) $\cos(-(1/6)\pi) = (1/2)\sqrt{3}$
- (c) $\sin 7\pi = 0$
- (d) $\cos(-(5/2)\pi) = 0$

21. **Problema:** Use periododicidade e valores no intervalo $0 \leq t \leq 2\pi$ para determinar o valor exacto da função:

- (a) $\sin(-(5/4)\pi) = (1/2)\sqrt{2}$
- (b) $\cos(-(5/4)\pi) = -(1/2)\sqrt{2}$
- (c) $\sec(-(5/4)\pi) = -\sqrt{2}$
- (d) $\csc(-(5/4)\pi) = \sqrt{2}$

22. **Problema:** Use periododicidade e valores no intervalo $0 \leq t \leq 2\pi$ para determinar o valor exacto da função:

- (a) $\sin((7/2)\pi) = -1$
- (b) $\cos((5/2)\pi) = 0$
- (c) $\sec(((11)/2)\pi)$ não determinado
- (d) $\csc((9/2)\pi) = 1$

23. **Problema:** Use periododicidade e valores no intervalo $0 \leq t \leq 2\pi$ para determinar o valor exacto da função:

- (a) $\tan((4/3)\pi) = \sqrt{3}$
- (b) $\cot((4/(32))\pi) = \sqrt{2}+1$
- (c) $\tan(-(1/6)\pi) = -(1/3)\sqrt{3}$
- (d) $\cot(-(1/6)\pi) = -\sqrt{3}$

24. **Problema:** Encontre todos os valores de t no intervalo $[0, 2\pi[$

- (a) $\sin t = -1, t = ((3\pi)/2)$
- (b) $\cos t = 1, t = 0$
- (c) $\tan t = -1, t \in \{((3\pi)/4), ((7\pi)/4)\}$
- (d) $\csc t = 1, t = (\pi/2)$

25. **Problema:** Encontre todos os valores de t no intervalo $[0, 2\pi[$

- (a) $\sin t = -(1/2), t \in \{((7\pi)/6), ((11\pi)/6)\}$
- (b) $\cos t = (1/2), t \in \{(\pi/3), ((5\pi)/3)\}$
- (c) $\cot t = 1, t = (\pi/4)$
- (d) $\sec t = 2, t \in \{(\pi/3), ((5\pi)/3)\}$

26. **Problema:** Encontre todos os valores de t no intervalo $[0, 2\pi[$

- (a) $\sin t = (1/2)\sqrt{2}, t \in \{(\pi/4), ((3\pi)/4)\}$
- (b) $\cos t = -(1/2)\sqrt{2}, t \in \{((3\pi)/4), ((5\pi)/4)\}$
- (c) $\tan t = -(1/3)\sqrt{3}, t = ((11\pi)/6)$
- (d) $\cot t = (1/3)\sqrt{3}, t \in \{(\pi/3), ((4\pi)/3)\}$

27. **Problema:** Encontre $\tan \theta$ se θ for o ângulo entre as rectas com as inclinações dadas

- (a) $(1/2)$ e $-(3/4)$

$$\arctan((1/2)) = 0.46365((180)/\pi) = 26.565$$

$$\arctan(-(3/4)) = -0.6435((180)/\pi) = -36.870$$

$$\theta = 26.565 - (-36.870) = 63.435$$

$$\tan(63.435((\pi/(180)))) = 2.0$$

- (b) $(2/7)$ e $(7/2)$

$$\arctan((2/7)) = 0.27830((180)/\pi) = 15.945$$

$$\arctan((7/2)) = 1.2925((180)/\pi) = 74.055$$

$$\theta = 74.055 - (15.945) = 58.11$$

$$\tan(58.11((\pi/(180)))) = 1.6072 (= (8/5))$$

28. **Problema:** Encontre $\tan\theta$ se θ for o ângulo entre as rectas com as inclinações dadas

(a) $-(3/5)$ e 2

$$\arctan(-(3/5)) = -0.54042((180)/\pi) = -30.964$$

$$\arctan(2) = 1.1071((180)/\pi) = 63.432$$

$$\theta = 63.432 - (-30.964) = 94.396$$

$$\tan(94.396((\pi/(180)))) = -13.008 (= -(13)/(100))$$

(b) $-(1/3)$ e $-(1/10)$

$$\arctan(-(1/3)) = -0.32175((180)/\pi) = -18.435$$

$$\arctan(-(1/10)) = -9.9669 \times 10^{-2}$$

$$\theta = (-9.9669 \times 10^{-2}) - (-18.435) = 18.335$$

$$\tan(18.335((\pi/(180)))) = 0.33140 (= (1/3))$$

29. **Problema:** Encontre com a aproximação de 1° a medida do ângulo entre as rectas com as inclinações dadas

(a) -3 e 2

$$\arctan(-3) = -1.249((180)/\pi) = -71.562$$

$$\arctan(2) = 1.1071((180)/\pi) = 63.432$$

$$\theta = 63.432 - (-71.562) = 134.99 \approx 135^\circ \text{ (complementar } 180 - 135 = 45^\circ)$$

(b) $(3/2)$ e $(1/4)$

$$\arctan((3/2)) = 0.98279((180)/\pi) = 56.310$$

$$\arctan((1/4)) = 0.24498((180)/\pi) = 14.036$$

$$\theta = 56.310 - 14.036 = 42.274 \approx 42^\circ$$

Resumo da Unidade

Nesta unidade foi levado a cabo uma revisão e um diagnóstico do conhecimento dos pré-requisitos básicos do Cálculo, nomeadamente da álgebra (operações sobre conjuntos numéricos N, Z, Q e R) e da trigonometria.

Na primeira parte desta actividade foram tratados os números, operações sobre conjuntos numéricos, operações inversas, operações não definidas em R .

Na segunda parte tratou-se o círculo unitário e a definição de radiano como medida de um ângulo, as funções trigonométricas e as identidades trigonométricas.

Avaliação da Unidade

Verifique a sua compreensão!

Avaliação sumativa da Unidade 0 - Diagnóstico

Instruções

Agrupe um mínimo de 5 e um máximo de 10 das perguntas seguintes em cada teste de avaliação de 1 horas, sem consultas.

Escolha perguntas-tipo diferentes na preparação de cada teste, mudando as parâmetros e dados de base para evitar colagens.

Critérios de Avaliação

Cada pergunta vale entre 10% e 20%, conforme o número de perguntas seleccionadas.

O total de pontos a atribuir é de 100;

Resultado entre 90 - 100 é excelente;

Resultado entre 70 - 89 é bom;

Resultado entre 50 - 69 é suficiente;

Resultado menos que 50 é insuficiente;

Avaliação

Resolva para a variável indicada, se não for possível diga porquê:

$$12 - [3 + 4m - 6(3m - 2)] = -7(2m - 8) - 3[(m - 2) + 3m - 5]$$

$$2m - 5m/8 = 3m/72 + 4/3$$

$$\sqrt{m+1} = -4$$

$$\square(m+1) = -4$$

$$(m+1)^{(1/3)} = -4$$

Aplica a propriedade do logaritmo para simplificar as expressões:

$$\log_3 3^7$$

$$7^{(-2\log_7 3)}$$

$$-19e^{(-2\ln x^2)}$$

Escreva cada expressão como um único logaritmo:

$$2\log_b u + 3\log_b v$$

$$\ln \sqrt{x-1} + \ln \sqrt{x+1} - 2\ln(x^2-1)$$

Use o círculo unitário para encontrar todos os valores exactos de θ que tornam verdadeira as equações dadas, nos intervalos indicados:

$$\cos \theta = \sqrt{3}/2, 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$\sin \theta = -1, 0 \leq \theta \leq 4\pi$$

$$\tan \theta = -1, 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

Reduza a função trigonométrica dada a uma função equivalente com argumento no primeiro quadrante, $0 \leq \theta \leq \pi/2$:

$$\cos(3\pi - \theta)$$

$$\sin(6\pi + \theta)$$

$$\tan(7\pi/2 - \theta)$$

Diga se é verdadeira ou falsa a seguinte afirmação: "O conjunto solução da equação $x = 1/(1/x)$ é o conjunto de todos os números reais".

Um médico prescreveu uma dose de 600 miligramas de amoxicillin. A farmácia tem apenas uma suspensão de amoxicillin com uma concentração de 125 miligramas por cada 5 mililitros. Quanta suspensão líquida deve ser dada ao doente?

Respostas:

1.

a. $m=2$

b. m não é inteiro

c. não é possível (raiz quadrada é positiva)

d. $m=-65$

e. $m=-65$

2.

a. 7

b. $1/9$

c. $-19/x^4$

3.

a. $\log_b u^2 v^3$

b. $-3/2 \ln(x^2 - 1)$

4.

a. $\pi/6$ e $11\pi/6$

b. $3\pi/2$

c. $3\pi/4$ e $7\pi/4$

5.

a. $-\cos(\theta)$

b. $\sin(\theta)$

c. $\tan(\pi/2 - \theta)$

Falso (excepto 0)

6. 24 ml

Leituras e Outros Recursos

As leituras e outros recursos desta unidade encontram-se na lista de "Leituras e Outros Recursos do curso".

Unidade 1. Funções e Limites de funções em

Introdução à Unidade

Esta unidade introduz os elementos básicos da topologia de $\mathbb{R}$, apresenta as funções reais elementares e desenvolve os métodos para resolver equações e inequações em $\mathbb{R}$;

Também introduz funções de $\mathbb{N}$ para $\mathbb{R}$ designadas de sequências, estuda a convergência de sequências em $\mathbb{R}$, e por fim estuda limites de funções reais quer em pontos reais quer no infinito.

Objetivos da Unidade

Após a conclusão desta unidade, deverá ser capaz de:

- Determinar domínio e imagem de funções reais elementares;
- Resolver equações e inequações envolvendo funções reais elementares, em particular o valor absoluto e determinar os intervalos da solução.
- Esboçar aproximadamente o gráfico de funções reais elementares;
- Calcular limites de sequências;
- Calcular limites de funções reais.

TERMOS-CHAVE

Menor que: relação de ordem em $\mathbb{R}$

Majorado: conj. com majorantes

Supremo: menor dos majorantes

Intervalo: subconj. de $\mathbb{R}$ que possui qualquer ponto entre seus pontos

Recta acabada: $\mathbb{R}$ unido com os símbolos $-\infty, +\infty$

Variável (var.): designação indeterminada de elementos de um conjunto;

Var. independente: livre para assumir valores arbitrários num conjunto;

Var. dependente: valor resulta do cálculo de uma expressão analítica;

Função (fun.): relação total e unívoca de um conjunto A para outro B ;

Ponto da função: par ordenado $(x, f(x)) \in A \times B$

Valor da função: designação de um elemento $f(x) \in B$

Domínio: todos os primeiros elementos da relação funcional;

Contradomínio: conjunto de chegada da relação funcional;

Imagem: cj. de todos valores da função;

Gráfico: cj. de todos os pontos da função;

Fun. real: domínio e conjunto de chegada são suconjuntos de $\mathbb{R}$;

Abcissa: eixo horizontal no plano $\mathbb{R}^2$;

Ordenada: eixo vertical no plano $\mathbb{R}^2$;

Translação: deslocamento do gráfico por mudança de variável;

Fun. par: propriedade $f(x) = f(-x)$

Fun. ímpar: propriedade $f(x) = -f(-x)$

Fun. periódica: propriedade $f(x) = f(x+T)$

Periodo: menor T de uma fun. periódica;

Fun. constante: quando $y=c, \forall x \in \text{dom}f$, onde c é uma constante;

Fun. nula: quando $y=0, \forall x \in \text{dom}f$

Fun. quase nula: nula excepto num cj. contável de pontos do domínio;

Zero: solução de $f(x) = 0$

Cj. de zeros: cj. dos pontos do domínio cuja imagem é zero;

Cj de nível zero: intersecção de f com a função nula 0

Fun. identidade: a imagem é a própria variável independente
 $f(x) = x$

Fun. linear: fun. da forma $f(x) = mx$

Fun. afim: fun. da forma $f(x) = mx+b$

Fun. quadrática: fun. da forma $f(x) = ax^2+bx+c$

Fun. polinomial: fun. da forma $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$

Grau: maior expoente de x na expressão de $f(x)$

Coefficientes: constantes multiplicativas dos termos do polinómio;

Recta: gráfico de uma fun. afim:

Declive: inclinação da recta em relação à horizontal;

Interseção-y: ordenada da interseção da recta com o eixo vertical;

Discriminante: expressão envolvendo os coeficientes da fun. quadrática

Fun. racionais: $f(x)$ como razão entre polinómios

Assíntotas verticais: recta vertical $x=a$ em pontos de anulação do denominador;

Fun. com radicais: $f(x)$ com radicais;

Conjugados: formas $a+\sqrt{2}$ e $a-\sqrt{b}$

Vizinhança- ε : pontos a distancia menor que ε

Aderente : qualquer vizinhança intercepta conj.

Acumulação: qualquer vizinhança intercepta conj. excepto próprio ponto

Aberto: igual ao seu interior

Fechado: igual ao seu fecho;

Limite no infinito +: a função entra eventualmente em qualquer vizinhança de L se $x \rightarrow +\infty$

Limite num ponto: a função entra eventualmente em qualquer vizinhança de L se $x \rightarrow a$

Limite infinito: não existe qualquer número real com a propriedade de limite;

Assintota horizontal: a recta $y=L$, onde L é um limite no infinito;

Funções assintóticas: a diferença tende para zero.

Assintota oblíqua: uma recta $y=mx+b$ assintótica a $f(x)$

Limites laterais: o limite quando x tende para um ponto lateralmente;

Assintota vertical: recta vertical no ponto onde o limite da função é infinito

Ordem de convergencia: relação de equivalencia em $c(\mathbb{R})$

Equivalencia assintótica: funções na mesma classe de equivalencia gerada pela ordem assintótica.

Actividades de Aprendizagem

Actividade 1.1 - Propriedades de ordem de $\mathbb{R}$

Introdução

Introduzem-se as propriedades de ordem de $\mathbb{R}$, a propriedade do supremo e deduzem-se algumas consequências.

A recta acabada, com a introdução dos símbolos $-\infty, +\infty$, e as operações e excepções com esses símbolos.

São apresentados alguns conceitos topológicos de $\mathbb{R}$ relativos a pontos e subconjuntos notáveis de $\mathbb{R}$.

Detalhes da actividade

Em $\mathbb{R}$ pode-se estabelecer uma ordem ($<$) chamada de "menor que" e a ordem inversa ($>$) chamada de "maior que" da seguinte maneira: dados dois números reais a, b apenas uma das condições pode ser verdadeira: $a < b \vee a = b \vee b < a$ (tricotomia) e se $a < b$ então $b - a > 0$.

Define-se ($\leq$) a ordem lata "menor ou igual" como sendo equivalente a menor ($<$) ou igual ($=$).

O modelo geométrico de $\mathbb{R}$ é um conjunto de pontos numa recta contínua e graduada, chamada recta real:



Um subconjunto A de $\mathbb{R}$ é majorado se $\exists b \in \mathbb{R}, \forall x \in A, x \leq b$; o elemento b chama-se majorante de A . Definição similar é dada para minorante de A .

Um subconjunto A de $\mathbb{R}$ é delimitado se tem majorante e minorante (usa-se o termo "delimitado" em vez de "limitado" para não sobrecarregar este último).

Ex: $[2, +\infty[$ possui minorantes mas não é limitado; 4 é um majorante de $] -3, 3[$; -2 é um minorante de $]1, +\infty[$

O menor majorante chama-se supremo do subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ e o maior minorante chama-se ínfimo do subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}$

Ex: β é supremo de A sse $x \leq \beta, \forall x \in A$ e se $\gamma < \beta$ então γ não é majorante de A .

O conjunto $\mathbb{R}$ possui a propriedade do supremo, ou seja, qualquer subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ delimitado por cima possui majorante (semelhante para os outros casos de delimitação)

Um intervalo de $\mathbb{R}$ é um subconjunto $I \subseteq \mathbb{R}$ com a seguinte propriedade (convexidade):

$$x, y \in I, x \leq a \leq y \Rightarrow a \in I$$

Nota que $x \leq a \leq y$ significa $x \leq a$ e $a \leq y$

Um intervalo pode ser

aberto: $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ ou $]a, b[$

fechado: $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$

semi-aberto: $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ e $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$

Os pontos a, b são chamados de bordos ou extremos do intervalo.

O conjunto $\mathbb{R}$, como subconjunto de si próprio, não é delimitado, ou seja, não possui majorante nem minorante.

Então, é conveniente introduzir dois símbolos $-\infty, +\infty$ com as seguintes propriedades:

qualquer número real é maior que $-\infty$;

qualquer número real é menor que $+\infty$;

e definir a recta acabada como o “fecho” da recta real: $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$



Os conjuntos $\mathbb{R}$ e $\overline{\mathbb{R}}$ podem ser escritos como intervalos: $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ e $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$.

Nota que os símbolos $-\infty, +\infty$ não são números reais, pois não satisfazem todas as propriedades de números reais, ($\overline{\mathbb{R}}$ não é um corpo algébrico).

Algumas operações deixadas indefinidas em $\mathbb{R}$ podem agora ser definidas em $\overline{\mathbb{R}}$: $1/0 = +\infty, (-1)/0 = -\infty$

e outras operações podem ser definidas em $\overline{\mathbb{R}}$:

$$1 / (+\infty) = 0$$

$$(-1) / (+\infty) = 0$$

$$+\infty + (+\infty) = +\infty, -\infty + (-\infty) = -\infty$$

$$+\infty \times (+\infty) = +\infty, -\infty \times (-\infty) = +\infty$$

$$x + (+\infty) = +\infty, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$x + (-\infty) = -\infty, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$x \times (+\infty) = +\infty \text{ se } x > 0$$

$$x \times (+\infty) = -\infty \text{ se } x < 0$$

Entretanto, algumas operações continuam indefinidas em $\mathbb{R}$: $\infty \times 0, \infty - \infty, 0/0, \infty/\infty, 0^0$.

Estas operações são indefinidas em $\mathbb{R}$ porque não possuem um único resultado, pelo contrário, podem ter qualquer resultado, dependendo de cada caso. Mais adiante saberemos como determinar esses valores para cada caso (levantar as indeterminações).

A distância entre dois pontos da recta $a, b \in \mathbb{R}$ é dada pelo valor absoluto da diferença entre os dois números, $|a - b|$.

As propriedades métricas da distância entre dois pontos, $a, b \in \mathbb{R}$ são:

$$|a - b| \geq 0, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

$$|a - b| = 0 \iff a = b$$

$$|a - b| = |b - a|$$

$$|a - b| \leq |a - c| + |c - b|, \quad c \in \mathbb{R}$$

A distância de qualquer ponto $x \in \mathbb{R}$ a zero é dada pelo valor absoluto $|x - 0| = |x|$

O conjunto de pontos que distam de a uma distância menor que ε designa-se por vizinhança- ε de a :

$$V_{\varepsilon}(a) = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \varepsilon\}$$

e corresponde a um intervalo aberto de centro em a e raio ε :

$$V_{\varepsilon}(a) =]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$$

Pontos notáveis de um subconjunto $E \subset \mathbb{R}$:

a é um ponto interior a E sse existir uma vizinhança de a incluída em E : Se existir $\varepsilon > 0$ tal que $V_{\varepsilon}(a) \subset E$

a é um ponto exterior a E sse existir uma vizinhança de a incluída no complemento de E : Se existir $\varepsilon > 0$ tal que $V_{\varepsilon}(a) \subset E^c$, onde $E^c = \mathbb{R} - E$

a é um ponto do bordo de E sse não for nem interior nem exterior.

a é um ponto aderente de E sse qualquer vizinhança de a possuir um elemento de E : Qualquer $\varepsilon > 0$, $V_{\varepsilon}(a) \cap E \neq \emptyset$

a é um ponto de acumulação de E sse qualquer vizinhança de a possuir um elemento de E diferente de a : Qualquer $\varepsilon > 0$, $(V_{\varepsilon}(a) - \{a\}) \cap E \neq \emptyset$

a é um ponto isolado de E sse $\{a\}$ for uma vizinhança de a , para algum $\varepsilon > 0$

Ex: A diferença entre pontos aderentes e pontos de acumulação são os pontos isolados: qualquer ponto de acumulação é um ponto aderente mas existem pontos aderentes que não são pontos de acumulação: os pontos isolados.

Subconjuntos notáveis $E \subseteq \mathbb{R}$:

$\text{Int}E$: interior de E , é o conjunto de todos os pontos interiores de E

$\text{Ext}E$: exterior de E , é o conjunto de todos os pontos exteriores de E

∂E : bordo de E , é o conjunto de todos os pontos do bordo de E

$\bar{E}$: fecho de E , é o conjunto de todos os pontos aderentes de E

E' : derivado de E , é o conjunto de todos os pontos de acumulação de E

Caracterização de alguns subconjuntos:

E é aberto sse todos os seus pontos forem interiores a E

E é fechado sse o seu complemento E^c for aberto.

E é denso em $\mathbb{R}$ sse $\bar{E} = \mathbb{R}$ (o fecho é todo $\mathbb{R}$)

E é raro em $\mathbb{R}$ sse $\text{Int}(\bar{E}) = \emptyset$

E é perfeito se for fechado e sem pontos isolados.

Conclusão

Nesta unidade $\mathbb{R}$ ficou caracterizado como um corpo ordenado completo com a propriedade do supremo.

Qualquer outro conjunto com as mesmas propriedades é isomorfo a $\mathbb{R}$.

Foi definida a recta acabada, com a introdução dos símbolos $-\infty, +\infty$, e as operações e excepções com esses símbolos (indeterminações).

Foram apresentadas terminologia relativa a pontos e subconjuntos notáveis de $\mathbb{R}$.

Avaliação

Agrupe um mínimo de 5 e um máximo de 10 das perguntas seguintes em cada teste de avaliação de 1 horas, sem consultas.

Escolha perguntas-tipo diferentes na preparação de cada teste, mudando as parâmetros e dados de base para evitar colagens.

Cada pergunta vale entre 10% e 20%, conforme o número de perguntas seleccionadas.

Actividade 1.2 - Funções em $\mathbb{R}$

Introdução

Esta unidade introduz funções elementares em $\mathbb{R}$ e calcula seus domínios resolvendo determinadas inequações.

Também apresenta com algum detalhe o método de resolução de inequações pelo estudo do sinal de funções entre zeros ou pontos de descontinuidade.

Detalhes da actividade

Uma função é uma relação total e unívoca de um domínio A para um contradomínio B .

Total porque todos os elementos do domínio A tem de estar relacionados com algum elemento do contradomínio B e unívoca porque qualquer elemento do domínio A só pode estar relacionado com um único elemento do contradomínio B .

Uma função deve indicar objectivamente como é que os elementos do domínio $x \in A$ se relacionam com os elementos do contradomínio $y \in B$.

A maneira “clássica” de definir uma função é pela fórmula funcional $y=f(x)$, onde $f(x)$ é uma expressão analítica na variável x .

O domínio de uma função em $\mathbb{R}$, quando não é especificado, é definido como o maior subconjunto de $\mathbb{R}$ onde a expressão analítica $f(x)$ tem significado com as operações definidas em $\mathbb{R}$.

Recorde-se as excepções já mencionadas em unidades anteriores, para as operações em $\mathbb{R}$, são:

divisão por zero;

potencia zero da base zero;

radiciação par de números negativos;

logaritmos de qualquer base para números reais não positivos;

logaritmos de base negativa ou de base igual a 1.

Na determinação do domínio, as excepções dão origem a equações ou inequações:

Ex: Se uma função é dada por $y=\sqrt{g(x)}$, então o domínio é o conjunto de todos os valores onde $g(x) \geq 0$.

Um método de resolução de inequações em $\mathbb{R}$, i.e. $f(x) \geq 0$, consiste em:

encontrar os zeros e os pontos de descontinuidade da expressão analítica $f(x)$.

estudar o sinal de $f(x)$ entre os zeros e/ou descontinuidades, pois esses são os únicos pontos onde uma função real pode mudar de sinal;

determinar os intervalos em que o sinal da função satisfaz a inequação.

Recordam-se algumas propriedades de funções elementares:

polinomiais: $f(x)$

$f(x) = ax + b, a \neq 0$: a raiz (ou zero) é $-b/a$ e o sinal de a : $(+, -)$ informa se sobre o sinal da função: $(-, +)$ antes da raiz;

$f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$: o sinal do discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$ informa se existe raiz em $\mathbb{R}$ e a fórmula resolvente (ou casos notáveis) fornecem o valor das raízes. O sinal de a : $(+, -)$ informa sobre o sinal da função: $(-, +)$ antes e entre as raízes. Quando existir apenas um zero o sinal antes e depois são iguais. Para cúbicas e ordens mais elevadas, estimar um zero e factorizar para encontrar os outros. O número de zeros em $\mathbb{R}$ é sempre igual ou inferior ao grau do polinómio. De qualquer forma o teorema fundamental da álgebra garante pelos menos n raízes numa equação polinomial de grau n .

racionais: $(f(x)) / (g(x))$ onde $f(x)$ e $g(x)$ são polinómios

existem zeros quando o dividendo for nulo (aplica-se o caso anterior)

existe descontinuidade quando o divisor for nulo (aplica-se o caso anterior)

radicais: $\sqrt[n]{g(x)}$

radiciação é potenciação por fracções;

calcular o domínio de x como o maior subconjunto de $\mathbb{R}$ para o qual a expressão é definida, restringido $g(x) \geq 0$ quando n for par (quando n for ímpar, não existe essa restrição).

na procura de zeros tenta-se isolar o termo com o radical num dos lados da equação, para elevar os dois lados à potência n . (o resultado deve ser verificado pois podem surgir valores que não fazem parte da solução)

em caso de fracção com denominador do tipo $a + \sqrt{b}$, multiplica-se por $(a - \sqrt{b}) / (a - \sqrt{b})$ desde que $b \neq a^2$ (nota que esta multiplicação é sempre possível por estamos de facto a multiplicar por $+1$)

valor absoluto: $|g(x)|$

por definição, o valor absoluto é equivalente à seguinte disjunção de conjunções: $(|g(x)| = g(x) \iff g(x) \geq 0) \vee (-g(x) \iff g(x) < 0)$

Nota: não confundir chavetas da álgebra linear (e) com chaveteas da definição de módulo (ou);

substituir o valor absoluto por expressões simples e aplicar o caso anterior.

se a função possuir múltiplas expressões com valor absoluto, o método é aplicado para cada uma das expressões e o resultado é a conjunção nas regiões de sobreposição.

sistematizar o trabalho num quadro de sinal apropriado.

exponencial: a

o domínio apenas depende de $g(x)$

não possui raízes e é sempre positiva

quando a base $a > 1$, a função é monótona crescente e preserva a ordem: $x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

com a base entre zero e um, $0 < a < 1$, a função inverte a ordem.

Quando $a = e$ tem-se o caso especial de expoente natural.

logaritmo (natural): $\log_b g(x)$

A base b tem que ser positiva e diferente de 1

$\log_b g(x)$ é definida apenas no domínio $0 < g(x) < +\infty$

possui zero em $g(x) = 1$

é negativa (-) quando $0 < g(x) < 1$

é positiva (+) para $g(x) > 1$.

Quando a base $b = e$ tem-se o logaritmo natural

trigonométrica (elementares):

$\cos g(x)$ possui raízes $g(x) = n\pi, n \in \mathbb{Z}$, e o valor da função oscila entre -1 e +1;

$\sin g(x)$ possui raízes $g(x) = (n - (1/2))\pi, n \in \mathbb{Z}$ e o valor da função oscila entre -1 e +1;

$\tan g(x) = (\sin g(x)) / (\cos g(x))$ possui zeros em $g(x) = (n - (1/2))\pi, n \in \mathbb{Z}$, e possui descontinuidades em $g(x) = n\pi, n \in \mathbb{Z}$, é sempre crescente entre "bordos"

Conclusão

Uma função é uma relação unívoca de um domínio para um contradomínio e a fórmula funcional $y = f(x)$ relaciona elementos x do domínio com elementos y do contradomínio.

A determinação de domínio de uma função em $\mathbb{R}$ pode dar origem a equações ou inequações, que são condições restritivas sobre a expressão analítica $f(x)$ de uma função;..Um dos métodos de resolução de uma inequação encontra primeiro os zeros ou descontinuidades da expressão analítica e depois estuda o sinal dessa expressão entre os zeros ou descontinuidades.

As expressões analíticas elementares são polinomiais, racionais, com radicais, exponenciais e logarítmicas.

Avaliação

Agrupe um mínimo de 5 e um máximo de 10 das perguntas seguintes em cada teste de avaliação de 1 horas, sem consultas.

Escolha perguntas-tipo diferentes na preparação de cada teste, mudando as parâmetros e dados de base para evitar colagens.

Cada pergunta vale entre 10% e 20%, conforme o número de perguntas seleccionadas.

1. **Problema:** Determine domínio, imagem e esboço do gráfico da função $G(x)=5-x^2$

Resposta:

$$\text{Dom}(G) = \mathbb{R}$$

$$\text{Im}(G) =]-\infty, 5]$$

2. **Problema:** Determine domínio, imagem e esboço do gráfico da função $g(x) = \sqrt{9-x^2}$

Resposta:

$$\text{Dom}(g) = [-3, 3]$$

$$\text{Im}(g) = [0, 3]$$

3. **Problema:** Determine domínio, imagem e esboço do gráfico da função $H(x) = |x-1|$

Resposta:

$$\text{Dom}(H) = \mathbb{R}$$

$$\text{Im}(H) = [0, +\infty[$$

4. **Problema:** Determine domínio, imagem e esboço do gráfico da função $h(x) = |x| - 1$

Resposta:

$$\text{Dom}(h) = \mathbb{R}$$

$$\text{Im}(H) = [-1, +\infty[$$

5. **Problema:** Determine domínio, imagem e esboço do gráfico da função $F(x) = (4x^2 - 1) / (2x + 1) = 2x - 1$

Resposta:

$$\text{Dom}(F) = \mathbb{R} - \{-1/2\}$$

$$\text{Im}(F) = \mathbb{R} - \{-2\}$$

6. **Problema:** Determine domínio, imagem e esboço do gráfico da função $g(x) = (x^3 - 3x^2 - 4x + 12) / (x^2 - x - 6) = x - 2$

Resposta:

$$\text{Dom}(g) =]-\infty, -2[\cup]-2, 3[\cup]3, +\infty[$$

$$\text{Im}(g) =]-\infty, -4[\cup]-4, 1[\cup]1, +\infty[$$

7. **Problema:** Determine domínio, imagem e esboço do gráfico da função $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{se } x \neq -3, \text{ e } -2 \\ & \text{se } x = -3 \end{cases}$

Resposta:

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$$

$$\text{Im}(f) =]-4, +\infty[$$

8. **Problema:** Determine domínio, imagem e esboço do gráfico da função

$$\varphi(x) = \begin{cases} x+5 & \text{se } x < -5, \\ \sqrt{25-x^2} & \text{se } -5 \leq x \leq 5, \text{ e} \\ x-5 & \text{se } x > 5 \end{cases}$$

Resposta:

$$\text{Dom}(\varphi) = \mathbb{R}$$

$$\text{Im}(\varphi) = \mathbb{R}$$

9. **Problema:** Determine domínio, imagem e esboço do gráfico da função

$$g(x) = \begin{cases} 6x+7 & \text{se } x < -2, \\ 3 & \text{se } x = -2 \text{ e} \\ 4-x & \text{se } x > 5 \end{cases}$$

Resposta:

$$\text{Dom}(\varphi) = \mathbb{R}$$

$$\text{Im}(\varphi) =]-\infty, 6]$$

10. **Problema:** Determine domínio, imagem e esboço do gráfico da função

$$G(x) = \left((x^2+3x-4)(x^2-5x+6) \right) / \left((x^2-3x+2)(x-3) \right) = x+4$$

Resposta:

$$\text{Dom}(\varphi) =]-\infty, 1[\cup]1, 2[\cup]2, 3[\cup]3, +\infty[$$

$$\text{Im}(\varphi) =]-\infty, 5[\cup]5, 6[\cup]6, 7[\cup]7, +\infty[$$

11. **Problema:** Determine domínio, imagem e esboço do gráfico da função

$$h(x) = \sqrt{x^2-5x+6}$$

Resposta:

$$\text{Dom}(\varphi) =]-\infty, 2] \cup [3, +\infty[$$

$$\text{Im}(\varphi) = [0, +\infty[$$

12. **Problema:** Determine domínio, imagem e esboço do gráfico da função

$$f(x) = \left((x^3+3x^2+x+3) / (x+3) \right) = x^2+1$$

$$\text{Dom}(\varphi) =]-\infty, -3] \cup [-3, +\infty[$$

$$\text{Im}(\varphi) = [1, +\infty[$$

13. **Problema:** Determine domínio, imagem e esboço do gráfico da função

$$F(x) = \left((x^4+x^3-9x^2-3x+18) / (x^2+x-6) \right) = x^2-3$$

Resposta:

$$\text{Dom}(\varphi) =]-\infty, -3] \cup [-3, 2[\cup]2, +\infty[$$

$$\text{Im}(\varphi) = [-3, +\infty[$$

14. **Problema:** Determine domínio, imagem e esboço do gráfico da função $g(x) = |x| \cdot |x-1|$

Resposta:

Estudo de sinal no quadro seguinte:

x	0	1
x	-x	0
x-1	-x+1	-x+1
x · x-1	-x(-x+1) = x ² -x	0
		x(-x+1) = -x ² +x

$$\text{Dom}(\varphi) = \mathbb{R}$$

$$\text{Im}(\varphi) = [0, +\infty[$$

15. **Problema:** Determine se o conjunto dado é uma função $y=f(x)$. Se for qual o seu domínio?

(a) $\{(x, y) : y = \sqrt{x+1}\}$

É uma função. $\text{Dom}f = \{x \in \mathbb{R} : x+1 \geq 0\} = [-1, +\infty[$

(b) $\{(x, y) : y = \sqrt{x^2-1}\}$

É uma função. $\text{Dom}f = \{x \in \mathbb{R} : x^2-1 \geq 0\} =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$

(c) $\{(x, y) : y = \sqrt{1-x^2}\}$

É uma função. $\text{Dom}f = \{x \in \mathbb{R} : 1-x^2 \geq 0\} = [-1, 1]$

(d) $\{(x, y) : x^2+y^2=1\}$

Não é uma função, pois a endorelação (x,y) não é unívoca, por exemplo $((1/2), ((\sqrt{3})/2))$ e $((1/2), -((\sqrt{3})/2))$ ambos pertencem à endorelação.

16. **Problema:** Determine se o conjunto dado é uma função. se for qual o seu domínio?

(a) $\{(x, y) : y = (x-1)^2 + 2\}$

É uma função. $\text{Dom}f = \mathbb{R}$

(b) $\{(x, y) : x = (y-2)^2 + 1\}$

Não é uma função, pois a endorelação (x,y) não é unívoca, por exemplo $(2,1)$ e $(2,3)$ ambos pertencem à endorelação.

(c) $\{(x, y) : y = (x+2)^2 - 1\}$

É uma função. $\text{Dom}f = \mathbb{R}$

(d) $\{(x, y) : x = (y+1)^3 - 2\}$

É uma função. $\text{Dom} f = \mathbb{R}$

17. **Problema:** Dada $g(x) = 3x^2 - 4$ ache

(a) $g(-4) = 3(-4)^2 - 4 = 44$

(b) $g(1/2) = 3(1/2)^2 - 4 = -(13/4)$

(c) $g(x^2) = 3(x^2)^2 - 4 = 3x^4 - 4$

(d) $g(3x^2 - 4) = 3(3x^2 - 4)^2 - 4 = 27x^4 - 72x^2 + 44$

(e) $g(x-h) = 3(x-h)^2 - 4 = 3h^2 - 6hx + 3x^2 - 4$

(f) $g(x) - g(h) = (3(x)^2 - 4) - (3(h)^2 - 4) = 3x^2 - 3h^2$

(g) $((g(x+h) - g(x)) / h) = ((3(x+h)^2 - 4) - (3(x)^2 - 4)) / h = 6x + 3h$
para $h \neq 0$

18. **Problema:** Sendo $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = x^2 + 1$, determine as funções e o domínio da função resultante:

(a) $(f+g)(x) = \sqrt{x} + x^2 + 1$, e $\text{Dom}(f+g) = [0, +\infty[$

(b) $(f-g)(x) = \sqrt{x} - x^2 - 1$, e $\text{Dom}(f-g) = [0, +\infty[$

(c) $(fg)(x) = \sqrt{x}(x^2 + 1)$, e $\text{Dom}(fg) = [0, +\infty[$

(d) $((f/g))(x) = (\sqrt{x} / (x^2 + 1))$, $\text{Dom}((f/g)) = [0, +\infty[$

(e) $((g/f))(x) = ((x^2 + 1) / \sqrt{x})$, $\text{Dom}((g/f)) =]0, +\infty[$

19. **Problema:** Sendo $f(x) = |x|$ e $g(x) = |x-3|$, determine as funções e o domínio da função resultante:

(a) $(f+g)(x) = |x| + |x-3|$, e $\text{Dom}(f+g) = \mathbb{R}$

(b) $(f-g)(x) = |x| - |x-3|$, e $\text{Dom}(f-g) = \mathbb{R}$

(c) $(fg)(x) = |x||x-3|$, e $\text{Dom}(fg) = \mathbb{R}$

(d) $((f/g))(x) = (|x| / |x-3|)$, e $\text{Dom}((f/g)) = \mathbb{R} - \{3\}$

(e) $((g/f))(x) = (|x-3| / |x|)$, e $\text{Dom}((g/f)) = \mathbb{R} - \{0\}$

20. **Problema:** Sendo $f(x) = \sqrt{x+4}$ e $g(x) = x^2 - 2$, determine as funções e o domínio da função resultante:

(a) $(f+g)(x) = \sqrt{x+4} + x^2 - 2$, e $\text{Dom}(f+g) = \{x \in \mathbb{R} : x+4 \geq 0\} = [-4, +\infty[$

(b) $(f-g)(x) = \sqrt{x+4} - x^2 + 2$, e $\text{Dom}(f-g) = \{x \in \mathbb{R} : x+4 \geq 0\} = [-4, +\infty[$

(c) $(fg)(x) = \sqrt{x+4}(x^2 - 2)$, e $\text{Dom}(fg) = \{x \in \mathbb{R} : x+4 \geq 0\} = [-4, +\infty[$

(d) $((f/g))(x) = (\sqrt{x+4} / (x^2 - 2))$, e $\text{Dom}((f/g)) = \{x \in \mathbb{R} : x+4 \geq 0 \text{ e } x^2 - 2 \neq 0\} = [-4, -\sqrt{2}] \cup]\sqrt{2}, +\infty[$

$$(e) \quad ((g/f))(x) = ((x^2 - 2) / (\sqrt{x+4})), \text{ e}$$

$$\text{Dom}((g/f)) = \{x \in \mathbb{R} : x+4 \geq 0 \wedge x+4 \neq 0\} =]-4, +\infty[$$

21. Problema: Sendo $f(x)=x-2$ e $g(x)=x+7$, determine as funções e o domínio da função composta:

$$(a) \quad (f \circ g)(x) = (x+7) - 2, \text{ e } \text{Dom}(f \circ g) = \mathbb{R}$$

$$(b) \quad (g \circ f)(x) = (x-2) + 7, \text{ e } \text{Dom}(g \circ f) = \mathbb{R}$$

$$(c) \quad (f \circ f)(x) = (x-2) - 2, \text{ e } \text{Dom}(f \circ f) = \mathbb{R}$$

$$(d) \quad (g \circ g)(x) = (x+7) + 7, \text{ e } \text{Dom}(g \circ g) = \mathbb{R}$$

22. Problema: Sendo $f(x)=x^2-1$ e $g(x)=(1/x)$, determine as funções e o domínio da função composta:

$$(a) \quad (f \circ g)(x) = ((1/x))^2 - 1, \text{ e } \text{Dom}(f \circ g) = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\} = \mathbb{R} - \{0\}$$

$$(b) \quad (g \circ f)(x) = (1 / ((x^2 - 1))), \text{ e}$$

$$\text{Dom}(g \circ f) = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 1 \neq 0\} =]-\infty, -1[\cup]-1, 1[\cup]1, +\infty[$$

$$(c) \quad (f \circ f)(x) = (x^2 - 1)^2 - 1, \text{ e } \text{Dom}(f \circ f) = \mathbb{R}$$

$$(d) \quad (g \circ g)(x) = (1 / ((1/x))) = x, \text{ e } \text{Dom}(g \circ g) = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\} = \mathbb{R} - \{0\}$$

23. Problema: Sendo $f(x)=\sqrt{x}$ e $g(x)=-(1/x)$, determine as funções e o domínio da função composta:

$$(a) \quad (f \circ g)(x) = \sqrt{-(1/x)}, \text{ e } \text{Dom}(f \circ g) = \{x \in \mathbb{R} : -(1/x) \geq 0 \wedge x \neq 0\} =]-\infty, 0[$$

$$(b) \quad (g \circ f)(x) = -(1/(\sqrt{x})), \text{ e } \text{Dom}(g \circ f) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0 \wedge x \neq 0\} =]0, +\infty[$$

$$(c) \quad (f \circ f)(x) = \sqrt{(\sqrt{x})} = [4] \sqrt{x}, \text{ e } \text{Dom}(f \circ f) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} = [0, +\infty[$$

$$(d) \quad (g \circ g)(x) = -(1/((-1/x))) = x, \text{ e } \text{Dom}(g \circ g) = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\} = \mathbb{R} - \{0\}$$

24. Problema: Sendo $f(x)=\sqrt{x^2-1}$ e $g(x)=\sqrt{x-1}$, determine as funções e o domínio da função resultante:

$$(a) \quad (f \circ g)(x) = \sqrt{(\sqrt{x-1})^2 - 1} = \sqrt{x-2}, \text{ e}$$

$$\text{Dom}(f \circ g) = \{x \in \mathbb{R} : x-1 \geq 0 \wedge x-2 \geq 0\} = [2, +\infty[$$

$$(b) \quad (g \circ f)(x) = \sqrt{(\sqrt{x^2-1}) - 1}, \text{ e } \text{Dom}(g \circ f) = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 1 \geq 0 \wedge \sqrt{x^2-1} - 1 \geq 0\}$$

$$= (]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[) \cap (]-\infty, -\sqrt{2}[\cup]\sqrt{2}, +\infty[)$$

$$= (]-\infty, -\sqrt{2}[\cup]\sqrt{2}, +\infty[)$$

$$(c) \quad (f \circ f)(x) = \sqrt{(\sqrt{x^2-1})^2 - 1} = \sqrt{x^2-2}, \text{ e}$$

$$\text{Dom}(f \circ f) = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 1 \geq 0 \wedge x^2 - 2 \geq 0\} = (]-\infty, -\sqrt{2}[\cup]\sqrt{2}, +\infty[)$$

$$(d) \quad (g \circ g)(x) = \sqrt{(\sqrt{x-1}) - 1}, \text{ e}$$

$$\text{Dom}(g \circ g) = \{x \in \mathbb{R} : x-1 \geq 0 \vee (x-1) - 1 \geq 0\} = [2, +\infty[$$

25 - Problema: Sendo $f(x) = (2/(x-1))$, determine as funções e o domínio da função resultante:

$$(a) \quad f(x^2) = (2/(x^2 - 1)), \quad \text{e} \\ \text{Dom} f = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 1 \neq 0\} =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$$

$$(b) \quad [f(x)]^2 = ((2/(x-1)))^2 = (4/((x-1)^2)), \quad \text{e} \\ \text{Dom} f^2 = \{x \in \mathbb{R} : x-1 \neq 0\} =]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$$

$$(c) \quad (f \circ f)(x) = (2/((2/(x-1)) - 1)) = -((2x-2)/(x-3)), \quad \text{e} \\ \text{Dom}(f \circ f) = \{x \in \mathbb{R} : x-1 \neq 0 \wedge x-3 \neq 0\} =]-\infty, 1[\cup]1, 3[\cup]3, +\infty[$$

26 - Problema: Dado $f(t) = (|3+t|-|t-3|)/t$, expresse $f(t)$ sem barras de valor absoluto, se t estiver no intervalo dado:

$$(a) \quad]0, +\infty[;$$

$$|3+t| = \{3+t \mid t \geq -3 \text{ e } -(3+t) \mid t < -3\}$$

$$\text{e } |t| = \{t \mid t \geq 0 \text{ e } -t \mid t < 0\}$$

Se $t \in]0, +\infty[$ então pode-se escrever:

$$f(t) = ((|3+t|-|t|-3)/t) = ((3+t-t-3)/t) = 0$$

$$(b) \quad [-3, 0[$$

$$\text{Se } t \in [-3, 0[\text{ então pode-se escrever: } f(t) = ((|3+t|-|t|-3)/t) = ((3+t-(-t)-3)/t) = 2$$

$$(c) \quad]-\infty, -3[$$

$$\text{Se } t \in]-\infty, -3[\text{ então pode-se escrever: } f(t) = ((|3+t|-|t|-3)/t) = ((-(3+t)-(-t)-3)/t) = -(6/t)$$

27 - Problema: Determine se a função dada é par, ímpar ou nenhuma das duas.

$$(a) \quad f(x) = 2x^2 - 3x^2 + 1$$

$$f(-x) = 2(-x)^2 - 3(-x)^2 + 1 = 2x^2 - 3x^2 + 1, \text{ logo a função é par.}$$

$$(b) \quad f(x) = 5x^3 - 7x$$

$$f(-x) = 5(-x)^3 - 7(-x) = -(5x^3 - 7x), \text{ logo a função é ímpar.}$$

$$(c) \quad f(s) = s^2 + 2s + 2$$

$$f(-s) = (-s)^2 + 2(-s) + 2 = s^2 - 2s + 2, \text{ nem par nem ímpar.}$$

$$(d) \quad g(x) = x^2 - 1$$

$$g(-x) = (-x)^2 - 1 = x^2 - 1, \text{ logo a função é par.}$$

$$(e) \quad h(t) = 5t^2 + 1$$

$$h(t) = 5(-t)^2 + 1 = 5t^2 + 1, \text{ nem par nem ímpar.}$$

$$(f) \quad f(x) = |x|$$

$f(-x) = |-x| = |x|$, logo a função é par.

$$(g) \quad f(y) = ((y^3 - y) / (y^2 + 1))$$

$f(-y) = (((-y)^3 - y) / ((-y)^2 + 1)) = -((y^3 + y) / (y^2 + 1))$, nem par nem ímpar.

$$(h) \quad g(z) = ((z-1) / (z+1))$$

$g(-z) = ((-z-1) / (-z+1)) = ((z+1) / (z-1))$, nem par nem ímpar (mas note que $g(-z) = (1 / (g(z)))$ ou seja $g(-z)g(z) = 1$)

25. Problema: Existe uma função que é ímpar e par? Qual é?

Se existe tem que satisfazer $f(x) = f(-x) \square f(x) = -f(-x)$ logo

$$f(-x) = -f(-x) \square 2f(x) = 0 \square f(x) = 0$$

26. Problema: Mostre que $f=2x-3$ e $g=((x+3)/2)$ são funções inversas

$$(f \square g)(x) = 2(((x+3)/2)) - 3 = x, \text{ e } \text{Dom}(f \square g) = \mathbb{R}$$

$$(g \square f)(x) = (((2x-3)+3)/2) = x, \text{ e } \text{Dom}(g \square f) = \mathbb{R}$$

Logo são funções inversas.

27. Problema: Mostre que $f=x^2$ e $g=\sqrt{x}$ são funções inversas

$$(f \square g)(x) = (\sqrt{x})^2 = x, \text{ e } \text{Dom}(f \square g) = [0, +\infty[$$

$$(g \square f)(x) = \sqrt{(x^2)} = x, \text{ e } \text{Dom}(g \square f) = [0, +\infty[$$

Logo são funções inversas.

28. Problema: Defina a função $f \square g$ e determine o seu domínio

$$(a) \quad f(x) = \cos x, \quad g(x) = x^2$$

$$(f \square g)(x) = \cos x^2, \text{ e } \text{Dom}(f \square g) = \mathbb{R}$$

$$(c) \quad f(x) = \csc x, \quad g(x) = 2x$$

$$(f \square g)(x) = \csc 2x, \text{ e } \text{Dom}(f \square g) = \{x \in \mathbb{R} : \sin 2x \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq (n\pi)/2\}$$

29. Problema: Defina a função $f \square g$ e determine o seu domínio

$$(a) \quad f(x) = \sin x, \quad g(x) = (1/(2x))$$

$$(f \square g)(x) = \sin(1/(2x)), \text{ e } \text{Dom}(f \square g) = \{x \in \mathbb{R} : 2x \neq 0\} = \mathbb{R} - \{0\}$$

$$(c) \quad f(x) = \tan x, \quad g(x) = x + \pi$$

$$(f \square g)(x) = \tan(x + \pi), \text{ e } \text{Dom}(f \square g) = \{x \in \mathbb{R} : \cos(x + \pi) \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x + \pi \neq ((2n-1)/2)\pi\} = \{x \in \mathbb{R} : x + \pi \neq ((2n-3)/2)\pi\}$$

Actividade 1.3 - Sequencias em R

Introdução

Nesta actividade são apresentadas sequencias e subsequencias, sequencias recursivas e alguns exemplos de sequencias notáveis. Define-se uma sequencia convergente, determina-se o limite de algumas sequencias e apresentam-se alguns teoremas sobre limites de sequencias.

Detalhes da actividade

Sequências em R

Um par ordenado de números reais é um conjunto ordenado de dois números reais: (x, y)

Um triplo ordenado de números reais: (x, y, z)

Um n-uplo ordenado de números reais: $(x_1, x_2, \dots, x_n)$

Uma sequência (ou sucessão) de números reais: $(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ é uma função de $\mathbb{N}$ para $\mathbb{R}$

$$(x_n) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$

Uma sequência representa-se por $(x_n) = (x_1, x_2, x_3, \dots)$, o conjunto dos seus termos por $\{x_n\}$, e o termo geral por x_n , onde $n \in \mathbb{N}$.

Ex: A sequência dada pelo termo geral $x_n = (-1)^n$ pode ser escrita por extenso como um conjunto ordenado $(-1, 1, -1, 1, \dots)$ enquanto que o conjunto dos termos da sequência é o conjunto $\{-1, 1\}$.

Uma sequência pode ser também definida recursivamente (ou indutivamente), indicando um ou mais elementos iniciais $x_1, x_2, \dots, x_k$ e a fórmula para x_{n+1} em função de $x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-k}$.

Ex. A sequência definida recursivamente por $x_1 = 5$ e $x_{n+1} = (x_n)/2$ pode ser escrita como $(x_n) = (5, 5/2, 5/4, 5/8, \dots)$. A sequência de Fibonacci, $x_1 = 1, x_2 = 1$ e $x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$ pode ser escrita como $(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots)$

Algumas sequências notáveis:

$$x_n = r, \text{ onde } r \text{ é uma constante (sequência constante)}$$

$$x_n = n \text{ (sequência natural)}$$

$$x_n = nr \text{ (sequência aritmética de primeiro termo e razão } r)$$

$$x_n = r^n \text{ (sequência geométrica de razão } r)$$

$$x_n = (1/n) \text{ (sequência harmónica)}$$

$$x_n = (1/n)^p \text{ onde } p > 0 \text{ (sequência p-harmónica)}$$

Como sequências são funções de $\mathbb{N}$ para $\mathbb{R}$, satisfazem à álgebra de funções:

a soma de sequências (termo a termo), $(x_n) + (y_n) = (x_n + y_n)$ é operação binária no conjunto $S(\mathbb{R})$ de todas as sequências em $\mathbb{R}$, é associativa, comutativa, o elemento neutro é a sequência constante $x_n = 0$ e todas as sequências com termo geral x_n possuem simétrico, com termo geral $-x_n$.

a multiplicação de sequências (termo a termo), $(x_n) \cdot (y_n) = (x_n \cdot y_n)$, é operação binária no conjunto $S(\mathbb{R})$ de todas as sequências em $\mathbb{R}$, é associativa, comutativa, o elemento neutro é a sequência constante $x_n = 1$ e apenas possuem inverso as sequências em que nenhum termo é nulo.

Convergência de sequências em $\mathbb{R}$

Uma sequência é limitada se o conjunto dos seus termos for limitado (se possuir majorante e minorante)

Ex: A sequência $x_n = n$ não é limitada pois o conjunto dos seus termos é $\mathbb{N}$ e não possui majorante. A sequência $x_n = (1/n)$ é limitada pois $\{x_n\} = \{1, 1/2, 1/3, \dots\}$ possui minorantes, i.e. 0, e majorantes, i.e. 1.

Uma sequência converge em $\mathbb{R}$ se existir um número $L \in \mathbb{R}$ que satisfaça a condição limite:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : n > N \Rightarrow |x_n - L| < \varepsilon$$

Se existir, o número L é chamado de limite da sequência e escreve-se:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = L \text{ ou } x_n \rightarrow L$$

O número natural $N(\varepsilon)$ é a ordem a partir do qual todos os termos da sequência passam a pertencer à vizinhança ε de L (pode depender de ε) :

$$x_n \in]L - \varepsilon, L + \varepsilon[\text{ para } n > N(\varepsilon)$$

Se L não for o limite de uma sequência então:

$$\exists \varepsilon > 0 : |x_n - L| \geq \varepsilon, \forall n \in \mathbb{N}$$

ou seja, existe uma vizinhança ε de L à qual os termos da sequência nunca pertencem.

Se não existir qualquer $x \in \mathbb{R}$ que seja limite de uma sequência, esta diz-se divergente:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists \varepsilon > 0 : |x_n - x| \geq \varepsilon, \forall n \in \mathbb{N}$$

Alguns teoremas sobre limites de sequências em $\mathbb{R}$:

O limite de uma sequência, se existir, é único.

Qualquer sequência convergente é delimitada (A proposição contrária não é verdadeira, e a proposição recíproca também não é verdadeira)

Dadas as sequências $x_n \rightarrow a$ e $y_n \rightarrow b$, tem-se que:

$$x_n + y_n \rightarrow a + b$$

$$x_{\{n\}} \square y_{\{n\}} \rightarrow a \square b$$

$x_{\{n\}}/y_{\{n\}} \rightarrow a/b$ apenas se $(y_{\{n\}})$ for uma sequência sem termos nulos

Se eventualmente $x_{\{n\}} \leq y_{\{n\}}$ então $\lim x_{\{n\}} \leq \lim y_{\{n\}}$

Se eventualmente $p \leq x_{\{n\}} \leq q$ então $p \leq \lim x_{\{n\}} \leq q$

Se eventualmente $x_{\{n\}} \leq z_{\{n\}} \leq y_{\{n\}}$ então $a \leq \lim z_{\{n\}} \leq b$

$$\lim_{\{n \rightarrow \infty\}} |x_{\{n\}}| = |a|$$

$$\lim_{\{n \rightarrow \infty\}} \sqrt[n]{x_{\{n\}}} = \sqrt[n]{a}$$

Se $\lim(x_{\{n+1\}})/(x_{\{n\}}) < 1$ então $\lim x_{\{n\}} = 0$

Uma sequência $(x_{\{n\}})$ crescente $x_{\{n\}} \leq x_{\{n+1\}}$ ou decrescente $x_{\{n\}} \geq x_{\{n+1\}}$ diz-se monótona

Uma sequência monótona é convergente se for limitada (teorema da convergência monótona).

Uma subsequência $(x'_{\{k\}})$ é uma composição da sequência $(x_{\{n\}})$ em $\mathbb{R}$ com uma sequência $(n_{\{k\}})$ em $\mathbb{N}$ que preserva a ordem dos termos da sequência original:

$$x_{\{k\}}' = x_{\{n_{\{k\}}\}} : n_{\{k\}} < n_{\{j\}} \square k < j$$

Ex. $x_{\{k\}}' = 1$ é uma subsequência de $x_{\{n\}} = (-1)^n$, pois fazendo $n = 2k$ para $k \in \mathbb{N}$, a composição resulta na sequência

$$\begin{aligned} x_{\{k\}}' &= x_{\{n\}} \square 2k \\ &= x_{\{2k\}} \\ &= (-1)^{2k} \\ &= ((-1)^2)^k \\ &= 1^k \\ &= 1 \end{aligned}$$

Teoremas sobre subsequências :

Se uma sequência converge para um número real L então qualquer subsequência também converge para o mesmo número L .

Em particular, se $\lim_{\{n \rightarrow \infty\}} x_{\{n\}} = L$ então $\lim_{\{n \rightarrow \infty\}} x_{\{n+k\}} = L$, para qualquer $k \in \mathbb{N}$

Qualquer sequência possui uma subsequência monótona (teorema da subsequência monótona)

Teorema de Bolzano-Weierstrass (versão 1): Qualquer sequência delimitada em $\mathbb{R}$ possui uma subsequência convergente.

Teorema de Bolzano-Weierstrass (versão 2): Um subconjunto infinito e delimitado de

$\mathbb{R}$ possui um ponto de acumulação.

Uma sequência é Cauchy (ou fundamental) sse

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : m, n > N(\varepsilon) \Rightarrow |x_m - x_n| < \varepsilon$$

Teoremas sobre sequências Cauchy

Qualquer sequência Cauchy é limitada

Uma sequência em $\mathbb{R}$ é convergente se é Cauchy (Mais uma maneira de afirmar que $\mathbb{R}$ é completo)

Uma sequência é contrativa se existir uma constante $0 < C < 1$ tal que

$$|x_{n+2} - x_{n+1}| \leq C |x_{n+1} - x_n|$$

Como é que pode uma sequência divergir? Ou delimitada mas oscilante ou não é delimitada.

Se for delimitada mas oscilante, tem subsequências convergentes. O limite de uma subsequência convergente chama-se um sublimite.

Como a sequência é delimitada, o conjunto de todos os sublimites é um subconjunto não vazio e delimitado de $\mathbb{R}$ logo possui um ínfimo chamado de limite inferior, $\liminf x_n$, e um supremo chamado limite superior, $\limsup x_n$.

Se $\liminf x_n = \limsup x_n$ então a sequência converge.

Um subconjunto $E \subset \mathbb{R}$ é completo sse qualquer sequência Cauchy em E é convergente.

Ex: $\mathbb{R}$ é completo.

Um subconjunto $E \subset \mathbb{R}$ é (sequencialmente) compacto sse qualquer sequência em E possui uma subsequência convergente.

Ex: $\mathbb{R}$ não é compacto, mas qualquer subconjunto limitado e fechado de $\mathbb{R}$ é sequencialmente compacto.

Um subconjunto $E \subset \mathbb{R}$ é conexo sse for um intervalo (aberto, fechado ou misto)

Dada uma sequência (x_n) em $\mathbb{R}$ diz-se que $x_n \rightarrow +\infty$ e escreve-se $\lim x_n = +\infty$ se para qualquer $\varepsilon > 0$ existe um $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq N(\varepsilon)$, então $x_n > 1/\varepsilon$

As sequências não delimitadas passam a ter um $\liminf x_n$ ou um $\limsup x_n$ em $\mathbb{R}$ (entretanto, não se chamam estas sequências de convergentes).

Conclusão

Nesta actividade foram apresentadas sequencias e subsequências, sequências recursivas e alguns exemplos de sequências notáveis. Definiu-se uma sequencia convergente, determinou-se o limite de algumas sequências e apresentaram-se alguns teoremas sobre limites de sequencias.

Avaliação

Agrupe um mínimo de 5 e um máximo de 10 das perguntas seguintes em cada teste de avaliação de 1 hora, sem consulta.

Escolha perguntas-tipo diferentes na preparação de cada teste, mudando as parâmetros e dados de base para evitar colagens.

Cada pergunta vale entre 10% e 20%, conforme o número de perguntas seleccionadas.

1. **Problema:** Escreva os primeiros termos da sequência e tente intuir o limite:

$$\left(\left(\frac{2n^2+1}{3n^2-n} \right) \right) = \left(\left(\frac{3}{2} \right), \left(\frac{9}{10} \right), \left(\frac{19}{24} \right), \left(\frac{33}{44} \right), \dots \right);$$

2. **Problema:** Escreva os primeiros termos da sequência e tente intuir o limite:

$$\left(\left(\frac{2n^2+1}{3n^2-n} \right) \right) = \left(\left(2 + \left(\frac{1}{n^2} \right) \right) / \left(3 - \left(\frac{1}{n} \right) \right) \right) \rightarrow \left(\frac{2}{3} \right)$$

3. **Problema:** Escreva os primeiros termos da sequência e tente intuir o limite:

$$\left(\left(\frac{3n^2+1}{2n^2+n} \right) \right) = \left(\left(\frac{4}{3} \right), \left(\frac{13}{10} \right), \left(\frac{28}{21} \right), \left(\frac{49}{36} \right), \dots \right);$$

4. **Problema:** Escreva os primeiros termos da sequência e tente intuir o limite:

$$\left(\left(\frac{3n^2+1}{2n^2+n} \right) \right) = \left(\left(3 + \left(\frac{1}{n^2} \right) \right) / \left(2 + \left(\frac{1}{n} \right) \right) \right) \rightarrow \left(\frac{3}{2} \right)$$

5. **Problema:** Escreva os primeiros termos da sequência e tente intuir o limite:

$$\left(\left(\frac{e^n}{n} \right) \right) = \left(e, \left(\frac{e^2}{2} \right), \left(\frac{e^3}{3} \right), \left(\frac{e^4}{4} \right), \dots \right); \text{ diverge (a justificar mais tarde)}$$

6. **Problema:** Escreva os primeiros termos da sequência e tente intuir o limite:

$$\left(\left(\frac{\log_{\{b\}} n}{n} \right) \right) = \left(0, \left(\frac{\log_{\{b\}} 2}{2} \right), \left(\frac{\log_{\{b\}} 3}{3} \right), \left(\frac{\log_{\{b\}} 4}{4} \right), \dots \right);$$

$$\left(\frac{\log_{\{b\}} n}{n} \right) \rightarrow 0 \text{ (a justificar mais tarde)}$$

7. **Problema:** Escreva os primeiros termos da sequência e tente intuir o limite:

$$\left(\left(\frac{\sinh n}{\sin n} \right) \right) = (1.3966, 3.9886, 70.988, -36.059, \dots);$$

diverge

8. **Problema:** Escreva os primeiros termos da sequência e tente intuir o limite:

$$\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \right) = (0.41421, 0.31784, 0.26795, 0.23607, \dots); \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \right)$$

$$\left(\left(\frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \right) \right) = \left(\frac{(n+1)-n}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} \right) = \left(\frac{1}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} \right) \rightarrow 0$$

9. **Problema:** Escreva os primeiros termos da sequência e tente intuir o limite:

$$\left(\left(1 + \left(\frac{2}{n} \right) \right)^n \right) = (3, 4, 4.6296, 5.0625, \dots); \left(1 + \left(\frac{2}{n} \right) \right)^n = \left[\left(1 + \left(\frac{1}{\left(\frac{n}{2} \right)} \right) \right)^{\left(\frac{n}{2} \right)} \right]^2 \rightarrow e^2$$

10. **Problema:** Escreva os primeiros termos da sequência e tente intuir o limite:

$$(\cos n\pi) = (-1, 1, -1, 1, \dots); \text{ diverge}$$

11. **Problema:** Calcule o limite usando a definição:

$$\left| \left(\frac{1}{(2n-1)} \right) - 0 \right| < \varepsilon \iff 0 < \left(\frac{1}{(2n-1)} \right) < \varepsilon$$

$$\square 2n-1 > (1/\varepsilon) \square n > (1/\varepsilon)$$

então se $N(\varepsilon) = \max\{1, (1/\varepsilon)\}$ obtém-se a implicação $n > N(\varepsilon) \square |1/(2n-1)) - 0| < \varepsilon$ (do fim para o princípio da cadeia de implicações)

12. Problema: Calcule o limite usando a definição:

$$|(1/(\sqrt{n})) - 0| < \varepsilon \square 0 < (1/(\sqrt{n})) < \varepsilon \square \sqrt{n} > (1/\varepsilon) \square n > (1/(\varepsilon^2))$$

se $N(\varepsilon) = (1/(\varepsilon^2))$ então $n > N(\varepsilon) \square |1/(\sqrt{n})) - 0| < \varepsilon$ (percorrendo as equivalências em sentido inverso)

13. Problema: Calcule o limite usando a definição:

$$|((5-n)/(2+3n)) - (-1/3)| < \varepsilon \square |(3(5-n)+2+3n)/(3(2+3n))| < \varepsilon$$

$$\square 0 < ((17)/(9n+6)) < \varepsilon \square 9n+6 > ((17)/\varepsilon)$$

$$\square 9n > ((17)/\varepsilon) \square n > ((17)/\varepsilon)$$

se $N(\varepsilon) = ((17)/\varepsilon)$ então $n > N(\varepsilon) \square |((5-n)/(2+3n)) - (-1/3)| < \varepsilon$ (percorrendo as equivalências em sentido inverso)

14. Problema: Calcule o limite: $((1 - (1 - (1/n))^a) / (1 - (1 - (1/n))^b)) = ((1 - ((1 + ((-1)/n))^n)^{a/n}) / (1 - ((1 + ((-1)/n))^n)^{b/n})) \approx ((1 - e^{-a/n}) / (1 - e^{-b/n})) \rightarrow (a/b)$ (a justificar mais tarde)

15. Problema: Prove a unicidade de limites:

Suponha que $a_n \rightarrow L$ e $a_n \rightarrow M$. Tomando $\varepsilon = (1/2)|L-M|$ existe um índice p tal que $n > p \square |a_n - L| < (1/2)|L-M|$ e também existe um índice q tal que $n > q \square |a_n - M| < (1/2)|L-M|$. Tomando $N = \max\{p, q\}$ tem-se que $n > N \square |a_n - L| < (1/2)|L-M| \square |a_n - M| < (1/2)|L-M|$ logo $|a_n - L| + |a_n - M| < |L-M|$ e pela desigualdade triangular obtem-se que $|L-M| < |L-M|$, uma contradição, logo (a_n) não pode ter dois limites diferentes.

16. Problema: Suponha que $a_n \rightarrow L$. Considere a sequência $(|a_n|)$. Para qualquer $\varepsilon > 0$ existe N tal que $n > N \square ||a_n| - |L|| \leq |a_n - L| < \varepsilon$. Logo $|a_n| \rightarrow |L|$. O recíproco não é verdadeiro, por exemplo $|(-1)^n| \rightarrow 1$ mas $(-1)^n$ não converge. NOTA que para provar que $||a| - |b|| \leq |a-b|$ basta fazer $|a| = |a-b+b| \leq |a-b| + |b|$, fazer a mesma coisa para $|b| = |b-a+a| \leq |b-a| + |a|$ para obter $-|a-b| \leq (|a| - |b|) \leq |a-b|$ o que é equivalente a $||a| - |b|| \leq |a-b|$.

17. Problema: $((2n-1)/(4n-1)) = ((1/3), (3/7), (5/11), \dots)$; suponha que $((2n-1)/(4n-1)) \leq ((2(n+1)-1)/(4(n+1)-1))$

$$\square (2n-1)(4n+3) \leq (2n+1)(4n-1)$$

$$\square 8n^2 + 2n - 3 \leq 8n^2 + 2n - 1$$

$$\square -3 \leq -1$$

confirmando que $a_n \leq a_{n+1}$ para qualquer n , logo a sequência é crescente.

18. **Problema:** $(\sin n\pi) = (0, 0, 0, \dots)$ é monótona (crescente e decrescente logo constante)

19. **Problema:** $((n^3 - 1)/n) = (0, (7/2), ((26)/3), \dots)$; suponha que $((n^3 - 1)/n) \leq ((n+1)^3 - 1)/(n+1)$

$$\square (n^3 - 1)(n+1) \leq (n)((n+1)^3 - 1)$$

$$\square n^4 + n^3 - n - 1 \leq n^4 + 3n^3 + 3n^2$$

$$\square -1 \leq 2n^3 + 3n^2 + n$$

confirmando que $a_n \leq a_{n+1}$ para qualquer n , logo a sequência é crescente.

20. **Problema:** $((2^n)/(1+2^n)) = ((2/3), (4/5), (9/10), \dots)$; suponha que $((2^n)/(1+2^n)) \leq ((2^{n+1})/(1+2^{n+1}))$

$$\square (2^n)(1+2^{n+1}) \leq (1+2^n)(2^{n+1})$$

$$\square 2 \times 2^{2n} + 2^n \leq 2 \times 2^{2n} + 2 \times 2^n$$

$$\square 0 \leq 2^n$$

confirmando que $a_n \leq a_{n+1}$ para qualquer n , logo a sequência é crescente.

21. **Problema:** $((2n!)/(5^n)) = ((2/5), ((24)/(25)), ((720)/(125)), \dots)$; suponha que $((2n!)/(5^n)) \leq ((2(n+1)!)/(5^{n+1}))$

$$\square 5^{n+1}(2n!) \leq 5^n(2(n+1)!)$$

$$\square 5 \leq (2n+1)(2n+2)$$

confirmando que $a_n \leq a_{n+1}$ para qualquer n , logo a sequência é crescente.

22. **Problema:** $(n/(2^n)) = ((1/2), (1/2), (3/8), (1/4), \dots)$; suponha que $(n/(2^n)) \geq ((n+1)/(2^{n+1}))$

$$\square 2n2^n \geq n2^{n+1} + 2^n$$

$$\square 0 \geq (1-n)2^n$$

confirmando que $a_n \geq a_{n+1}$ para qualquer n , logo a sequência é decrescente.

23. **Problema:** $((1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1))/(2^n n!)) = ((1/2), (3/8), ((15)/(4 \cdot 8)), \dots)$; suponha que $((1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1))/(2^n n!)) \leq ((1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2(n+1)-1))/(2^{n+1} (n+1)!))$

$$((1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1))/(1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1))) \leq ((2^n n!)/(2^{n+1} (n+1)!))$$

$$2n+2 \leq 2n^2 + n$$

$$0 \leq 2n^2 - n - 2$$

confirmando que $a_n \geq a_{n+1}$ para qualquer $n > 1$, logo a sequência é decrescente para $n > 1$.

24. **Problema:** $(3 - (-1)^{n+1}) = (3, 4, 2, 4, 2, \dots)$; limitada

25. Problema: $((n/(3^{n+1}))) = (1/9), (2/27), (3/81), \dots)$; suponha que $(n/(3^{n+1})) \leq ((n+1)/(3^{n+2}))$

$$n3^{n+2} \leq (n+1)3^{n+1}$$

$$0 \leq 3^{n+1} - n$$

confirmando que $a_n \geq a_{n+1}$ para qualquer n , logo a sequência é decrescente. Por outro lado a sequência é limitada:

$$0 \leq n \leq 3^{n+1}$$

$$0 \leq (n/(3^{n+1})) \leq 1$$

logo a sequência é convergente.

26. Problema: $((2^n)/(1+2^n))$ já tinha sido verificada que é crescente. Como

$$0 \leq 2^n \leq 2^{n+1}$$

$$0 \leq (2^n)/(2^{n+1}) \leq 1$$

a sequência é também limitada, logo é convergente.

27. Problema: $(n/(2^n))$ já foi verificada que é decrescente. Como é também limitada,

$$0 \leq n \leq 2^n$$

$$0 \leq (n/(2^n)) \leq 1$$

então a sequência é convergente.

28. Problema: $((1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1))/(2^n n!))$ já tinha sido verificada que é decrescente para $n > 1$. Como também é limitada,

$$0 \leq 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1) \leq 2^n n!$$

$$0 \leq ((1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1))/(2^n n!)) \leq 1$$

então a sequência é convergente.

NOTA:

$$\begin{aligned} ((1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1))/(2^n n!)) &= (1/(2^n)) \prod_{k=1}^n ((2k-1)/k) \\ &= \prod_{k=1}^n ((2k-1)/(2k)) < 1 \end{aligned}$$

Verifica-se que $\lim_{n \rightarrow \infty} ((1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1))/(2^n n!)) = 0$

$$|((1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1))/(2^n n!)) - 0| < \varepsilon \iff ((1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1))/(2^n n!)) < \varepsilon$$

$$\iff ((2^n n!)/(1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1))) > (1/\varepsilon) \iff 2^n > (1/\varepsilon)$$

$$\iff n > \log_2(1/\varepsilon)$$

então se $N(\varepsilon) = \max\{1, \log_2(1/\varepsilon)\}$ obtem-se a implicação $n > N(\varepsilon) \implies ((1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1))/(2^n n!)) < \varepsilon$

$(2^n n!) - 0| < \varepsilon$ (do fim para o princípio da cadeia de implicações)

29. Problema: Prove por definição: $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 / (\sqrt[n]{n+1})) = 0$

$$|(1 / (\sqrt[n]{n+1})) - 0| < \varepsilon \iff 0 < (1 / (\sqrt[n]{n+1})) < \varepsilon \iff 0 < (1 / (n+1)) < \varepsilon^2$$

$$\iff 0 < n+1 < \varepsilon^2 \iff n > \varepsilon^2$$

se $N(\varepsilon) = \varepsilon^2$ então $n > N(\varepsilon) \implies |(1 / (\sqrt[n]{n+1})) - 0| < \varepsilon$ (do fim para o princípio da cadeia de implicações)

30. Problema: Prove por definição: $\lim_{n \rightarrow \infty} (n+1)^2 = +\infty$

Por definição $\forall M \in \mathbb{R} \exists N \in \mathbb{N} : n > N \implies (n+1)^2 > M$

Seja $M \in \mathbb{R}$ um número arbitrário

$$(n+1)^2 > M \iff 0 < n+1 < \sqrt{M} \iff n+1 > \sqrt{M} \iff n > \sqrt{M}$$

Deixe $N = \sqrt{M}$ então $n > N \implies (n+1)^2 > M$

31. Problema: Prove que: Se $x_n \rightarrow x$ e $y_n \rightarrow y$ então $\forall \varepsilon > 0 \exists N, M$ tal que $n > N \implies |x_n - x| < (\varepsilon/2)$ e $n > M \implies |y_n - y| < (\varepsilon/2)$. Então, se $n > \max\{N, M\}$

$$|(x_n - y_n) - (x - y)| = |(x_n - x) + (y - y_n)|$$

$$\leq |x_n - x| + |y - y_n|$$

$$< (\varepsilon/2) + (\varepsilon/2) = \varepsilon$$

Logo $(x_n - y_n) \rightarrow (x - y)$

32. Problema: Prove que: Se $x_n \rightarrow x$ e $y_n \rightarrow y$ para $y_n \neq 0$ e $y \neq 0$ então $\forall \varepsilon > 0 \exists N, M$ tal que $n > N \implies |x_n - x| < (\varepsilon / (2\alpha))$ e $n > M \implies |y_n - y| < (\varepsilon / (2\beta))$, como sequências convergentes são limitadas $|((x_n) / (y_n y))| < \alpha$ e $|((y_n) / (y_n y))| > \beta$. Então, se $n > \max\{N, M\}$

$$|((x_n) / (y_n)) - (x/y)| = |((x_n y - x y_n) / (y_n y))|$$

$$= |((x_n y + (-x_n) y_n + x_n y_n) - x y_n) / (y_n y)|$$

$$= |((x_n (y - y_n)) + (x_n - x) y_n) / (y_n y)|$$

$$\leq |((x_n) / (y_n y))| |y - y_n| + |((y_n) / (y_n y))| |x_n - x|$$

$$< \alpha (\varepsilon / (2\alpha)) + \beta (\varepsilon / (2\beta)) = \varepsilon$$

Logo $((x_n) / (y_n)) \rightarrow (x/y)$

33. Problema: Prove o Teorema de Bolzano-Weierstrass: qualquer sequência limitada (a_n) possui subsequência convergente (a_{n_k}) .

Considere uma sequência limitada arbitrária (a_n) . Então $\exists M \in \mathbb{R} : |a_n| \leq M$ ou seja $-M \leq a_n \leq M, \forall n$. Deixe $E = [-M, M]$. O conjunto E possui um número infinito de termos da sequência. deixe E' ser a metade do conjunto E , ou $[-M, 0]$ ou $[0, M]$, que possua um número infinito de termos.

Divide-se E_0 em metade para obter E_1 e assim sucessivamente. Obtém-se dessa forma uma sequência de intervalos encaixados

$$E_0 \supset E_1 \supset E_2 \supset \dots$$

em que o diâmetro dum intervalo seguinte é sempre metade do intervalo anterior:

$$\text{Diam} E_0 = 2M > \text{Diam} E_1 = (2M)/2 > \dots > \text{Diam} E_n = (2M)/(2^{n+1}) = (M/(2^{n+2}))$$

Como consequência desta construção obtém-se que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Diam} E_n = 0$$

Escolhendo um termo $x_{n_k} \in E_{n_k}$ de cada um dos intervalos encaixados obtém-se da sequência (x_n) uma subsequência $(x_{n_k}) = (x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, \dots)$ que é Cauchy:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N: p, q > N \Rightarrow |x_{n_p} - x_{n_q}| < \varepsilon$$

porque como os intervalos são encaixados, se $|x_{n_p} - x_{n_q}| < \varepsilon$ Então existe um E_N tal que $x_{n_p}, x_{n_q} \in E_N$ e $\text{Diam} E_N = (M/(2^{N+2})) < \varepsilon$. Logo

$$(M/(2^{k+2})) < \varepsilon \Rightarrow (2^{N+2})/M > (1/\varepsilon)$$

$$\Rightarrow 2^{N+2} > (M/\varepsilon)$$

$$\Rightarrow N > 2 + \log_2(M/\varepsilon)$$

Fazendo $N(\varepsilon) = 2 + \log_2(M/\varepsilon)$ conclui-se que se

$$p, q > N(\varepsilon) \Rightarrow x_{n_p}, x_{n_q} \in E_N \Rightarrow |x_{n_p} - x_{n_q}| < \varepsilon$$

Como $\mathbb{R}$ é completo, ou seja qualquer sequência Cauchy converge, então a subsequência (x_{n_k}) também converge.

Actividade 1.4 - Limites de funções em $\mathbb{R}$

Introdução

Esta actividade trata o cálculo de limites de funções na recta acabada $\mathbb{R}$ fazendo uso dos símbolos $+\infty, -\infty$ para simplificar a notação. São tratados os quinze tipos diferentes de limites que uma função real pode ter. Os teoremas sobre limites, depois de provados servem como ferramenta para resolução de problemas. As formas indeterminadas são esclarecidas e levantadas em casos-tipo.

Detalhes da actividade

Limites no infinito

O cálculo de limites de funções em $\mathbb{R}$ realiza-se na recta acabada $\mathbb{R}$.

O limite no infinito de uma sequência pode ser generalizado para uma função arbitrária $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ com domínio não delimitado por cima.

O número real $L \in \mathbb{R}$ é o limite no infinito positivo de uma função f se

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{R} : x > N \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Diz-se que $f(x) \rightarrow L$ quando $x \rightarrow +\infty$, e escreve-se:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$$

Da mesma maneira, o número real $L \in \mathbb{R}$ é o limite no infinito negativo de uma função f se:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{R} : x < N \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Diz-se então que $f(x) \rightarrow L$ quando $x \rightarrow -\infty$, e escreve-se:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$$

Quando L é o limite no infinito (positivo ou negativo) de uma função f então a recta $y=L$ diz-se uma assíntota horizontal de f .

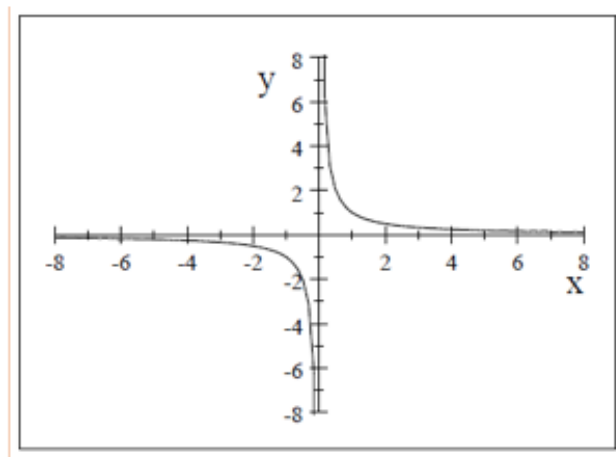
Ex: No caso de $f(x)=(1/x)$ verifica-se que $L=0$ pois para qualquer $\varepsilon > 0$, se $N=(1/\varepsilon)$, sempre que $x > N=(1/\varepsilon) \Rightarrow x > (1/\varepsilon) \Rightarrow (1/(|x|)) < \varepsilon$, obtém-se

$$|f(x) - 0| = |1/x| = (1/(|x|)) < \varepsilon$$

Ex: Se $L=0$, para qualquer $\varepsilon > 0$, se $N=-(1/\varepsilon)$, sempre que $x < N=-(1/\varepsilon) \Rightarrow x < -(1/\varepsilon) \Rightarrow (1/(|x|)) < \varepsilon$, obtém-se

$$|f(x) - 0| = |1/x| = (1/(|x|)) < \varepsilon$$

O gráfico da função $f(x)=(1/x)$ mostra a assíntota horizontal $y=0$



Valores assintóticos

Os valores limites de uma função no bordo do domínio denominam-se como valores assintóticos.

Duas funções f, g em $\mathbb{R}$ são assintóticas ou assintoticamente equivalentes (no infinito positivo) se

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f-g)(x) = 0$$

Uma assíntota oblíqua de uma função $f(x)$ é uma recta $y=mx+b$ assintoticamente equivalente a $f(x)$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - y) = 0$$

A assíntota horizontal é um caso particular da assíntota oblíqua, onde $m=0$ logo $y=b$

Ex: Para determinar a assíntota oblíqua de $f(x) = (x^2 - 1) / (x + 1)$ verifica-se que $f(x) = (x - 2) + (3 / (x + 1))$ logo $f(x) - (x - 2) = (3 / (x + 1))$. Como $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3 / (x + 1)) = 0$ e também $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3 / (x + 1)) = 0$, resulta que a assíntota oblíqua de $f(x)$ é a recta $y=x-2$.

Limites de uma função num ponto de acumulação do domínio

Para além de limites no infinito, como no caso de sequencias, podem-se calcular limites de uma função em qualquer dos pontos de acumulação do domínio.

Um ponto de acumulação a do domínio de f pode ser arbitrariamente aproximado de dois lados, se for o caso:

- do lado direito $(a + (1/n)) \rightarrow a$ quando $n \rightarrow \infty$
- do lado esquerdo $(a - (1/n)) \rightarrow a$ quando $n \rightarrow \infty$

Definem-se limites laterais de uma função num ponto de acumulação do domínio::

- L é limite lateral à direita de f se satisfaz a condição:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : 0 < x - a < \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon$$

escreve-se:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$$

- L é limite lateral à esquerda de f se satisfaz a condição:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : 0 < a - x < \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon$$

escreve-se:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$$

Se os limites laterais de $f(x)$ quando x tende para a pela direita coincidir com o limite de $f(x)$ quando x tende para a pela esquerda, então esse será referido apenas como o limite de $f(x)$ no ponto a , e as duas condições anteriores podem ser reunidas numa só:

L é o limite de uma função f num ponto $a \in \mathbb{R}$ sse existir um número real $L \in \mathbb{R}$ que satisfaz a condição:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon$$

Escreve-se:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

Nota que o limite de uma função num ponto $a \in \mathbb{R}$ pode existir mesmo se $f(a)$ não existe.

Limites infinitos

Pode acontecer que os limites laterais existam mas o limite de uma função num ponto não existe porque não são coincidentes ou simplesmente porque não existe qualquer número real com essa propriedade.

Neste último caso diz-se que a função possui um limite infinito ou uma assíntota vertical no ponto a .

- Limite infinito positivo:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \quad N \in \mathbb{R}, \quad \delta > 0 : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > N$$

- Limite infinito negativo:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty \quad N \in \mathbb{R}, \quad \delta > 0 : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) < -N$$

Consideram-se também os limites laterais infinitos (positivos ou negativos) à esquerda ou à direita do ponto $a \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$$

Quadro resumo dos tipos de limite de funções em $\mathbb{R}$

	Limite real	Limite infinito (+)	Limite infinito (-)
Limite no ponto a	$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$	$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$
Limite à direita de a	$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$	$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$
Limite à esquerda de a	$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$	$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$
Limite no infinito (+)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$
Limite no infinito (-)	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

Formas indeterminadas

As formas indefinidas ou indeterminadas na recta acabada $\mathbb{R}$, levam esse nome porque podem assumir qualquer valor, dependendo de cada caso.

Para cada caso particular é possível calcular o valor da “indeterminação”, i.e. “levantar a indeterminação”.

A técnica de “levantamento” de indeterminações encerra na sua essência a procura de valores limites da função no bordo do seu domínio.

indeterminações do grupo $(0/0)$, $((\pm\infty)/(\pm\infty))$ podem ser levantadas pondo em evidência o termo de maior grau.

indeterminações do grupo $\infty-\infty$ que envolvam raiz quadrada podem ser resolvidas multiplicando e dividindo pelo conjugado, para obter indeterminações do grupo $(0/0)$.

indeterminações dos grupos $0^\pm, 1^{+\infty}, 0^{\pm\infty}, (\pm\infty)^\pm$ que surgem no cálculo de limites de funções do tipo f^g , reduzem-se a indeterminações do grupo $(0/0)$, $((\pm\infty)/(\pm\infty))$ fazendo $f^g = e^{\ln(f^g)} = e^{g \ln(f)}$

Para outras funções gerais, Johann Bernoulli descobriu uma regra para o cálculo de limites de frações cujos numeradores e denominadores tendem para zero. A regra é conhecida atualmente como Regra de l'Hôpital, em homenagem ao marquês de l'Hôpital, que escreveu o primeiro texto introdutório de cálculo diferencial (1696), onde a regra apareceu pela primeira vez. A regra de l'Hôpital será estudada mais à frente.

Teoremas sobre limites

Os teoremas sobre limites são ferramentas de resolução de problemas.

Considerando funções reais f, g e números $a, b, c, L, L', L'', M, N \in \mathbb{R}$, verificam-se os seguintes teoremas:

Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L'$ então $L = L'$ (unicidade do limite)

$$\lim_{x \rightarrow a} c = c$$

$$\lim_{x \rightarrow a} x = a$$

Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$ então $\lim_{x \rightarrow a} (f+g)(x) = L+M$

Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ e $n \in \mathbb{N}$ então $\lim_{x \rightarrow a} (nf)(x) = nL$

Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$ então $\lim_{x \rightarrow a} (f \cdot g)(x) = L \cdot M$

Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ e $n \in \mathbb{N}$ então $\lim_{x \rightarrow a} f^n(x) = L^n$

Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$ então $\lim_{x \rightarrow a} (f/g)(x) = (L/M)$ para $g(x) \neq 0$ e $M \neq 0$ na vizinhança de a

Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ e $(p/q) \in \mathbb{Q}$ para $p \neq 0$, então $\lim_{x \rightarrow a} f^{(p/q)}(x) = L^{(p/q)}$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} (f(x) - L) = 0 \quad (\text{deslocação vertical})$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0} f(t+a) = L \quad (\text{deslocação horizontal})$$

Se $n \in \mathbb{N}$ então $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1/(x^n)) = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1/(x^n)) = \{-\infty$ se n for ímpar e $+\infty$ se n for par $\}$

Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c \neq 0$, então

$\lim_{x \rightarrow a} ((g(x))/(f(x))) = +\infty$ se $c > 0$ e se $f(x) \rightarrow 0$ por valores positivos de $f(x)$

$\lim_{x \rightarrow a} ((g(x))/(f(x))) = -\infty$ se $c > 0$ e se $f(x) \rightarrow 0$ por valores negativos de $f(x)$

$\lim_{x \rightarrow a} ((g(x))/(f(x))) = -\infty$ se $c < 0$ e se $f(x) \rightarrow 0$ por valores positivos de $f(x)$

$\lim_{x \rightarrow a} ((g(x))/(f(x))) = +\infty$ se $c < 0$ e se $f(x) \rightarrow 0$ por valores negativos de $f(x)$

o teorema continua válido se $x \rightarrow a$ for substituído por $x \rightarrow a^+$ ou por $x \rightarrow a^-$

Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$, então $\lim_{x \rightarrow a} (f+g)(x) = +\infty$ (idem para $x \rightarrow a^+$ ou por $x \rightarrow a^-$)

Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$, então $\lim_{x \rightarrow a} (f+g)(x) = -\infty$ (idem para $x \rightarrow a^+$ ou por $x \rightarrow a^-$)

Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c \neq 0$, então

$\lim_{x \rightarrow a} (f \cdot g)(x) = +\infty$ se $c > 0$

$\lim_{x \rightarrow a} (f \cdot g)(x) = -\infty$ se $c < 0$

o teorema continua válido se $x \rightarrow a$ for substituído por $x \rightarrow a^+$ ou por $x \rightarrow a^-$

Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c \neq 0$, então

$\lim_{x \rightarrow a} (f \cdot g)(x) = -\infty$ se $c > 0$

$\lim_{x \rightarrow a} (f \cdot g)(x) = +\infty$ se $c < 0$

o teorema continua válido se $x \rightarrow a$ for substituído por $x \rightarrow a^+$ ou por $x \rightarrow a^-$

Se $n \in \mathbb{N}$ então $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1/(x^n)) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} (1/(x^n)) = 0$

Conclusão

O cálculo de limites de funções reais $\mathbb{R}$ faz-se na recta acabada $\mathbb{R}$ fazendo uso dos símbolos $+\infty, -\infty$ para simplificar a notação. À semelhança de sequências, uma função pode ter limites no infinito, ou seja quando a variável x tende para infinito positivo (ou negativo), $x \rightarrow \pm\infty$.

Contrariamente a $\mathbb{N}$ que não possui pontos de acumulação, uma variável contínua pode aproximar-se de um ponto de acumulação do domínio de f pela esquerda ou pela direita, dando origem a limite lateral esquerdo ou direito. O limite de uma função num ponto só existe se os limites laterais coincidirem. O valor do limite pode ser um dos símbolos $+\infty, -\infty$, dizendo-se neste caso que o limite é infinito. Existem quinze tipos diferentes de limites que uma função real pode ter e são resumidos num quadro no corpo da ficha. Os teoremas sobre limites, depois de provados servem como ferramenta para resolução de problemas. As formas indeterminadas são esclarecidas e levantadas caso a caso.

Avaliação

Agrupe um mínimo de 1 e um máximo de 2 das perguntas seguintes em cada teste de avaliação de 1 hora, sem consulta.

Escolha perguntas de tipos diferentes na preparação de cada teste, mudando os parâmetros e dados de base para evitar colagens.

Cada pergunta vale entre 50% e 100%, conforme o número de perguntas selecionadas.

1. **Pergunta:** Prove (ou disprove) por definição, os seguintes limites: $\lim_{x \rightarrow 1} (3x^2 - 7x + 2) = -2$

Resposta:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, 0 < |x - 1| < \delta \Rightarrow |(3x^2 - 7x + 2) - (-2)| < \varepsilon$$

$$|(3x^2 - 7x + 2) - (-2)| < \varepsilon \Leftrightarrow |3x^2 - 7x + 4| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow 3|x - 1| |x - (4/3)| < \varepsilon$$

$$0 < |x - 1| < \delta < 1 \Leftrightarrow -1 < x - 1 < 1 \Leftrightarrow x \neq 1$$

$$\Leftrightarrow 0 < x < 2 \Leftrightarrow x \neq 1$$

$$\Leftrightarrow -(4/3) < x - (4/3) < (2/3) \Leftrightarrow x \neq 1$$

$$\Leftrightarrow |x - (4/3)| < (4/3) \Leftrightarrow x \neq 1$$

$$3|x - 1| |x - (4/3)| < \varepsilon \Leftrightarrow 3|x - 1| (4/3) < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow |x - 1| < (\varepsilon/4) = \delta$$

escolhendo $\delta = \min\{1, (\varepsilon/4)\}$ a implicação é reconstruída. Logo se $\varepsilon = 0.02$ então $\delta = \min\{1, ((0.02)/4)\} = 0.005$

2. **Pergunta:** Prove (ou disprove) por definição, os seguintes limites: $\lim_{x \rightarrow 5} (-4) = -4$

Resposta:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, 0 < |x - 5| < \delta \Rightarrow |(-4) - (-4)| = 0 < \varepsilon$$

qualquer $\delta > 0$, por exemplo $\delta = 1$, satisfaz a definição logo qualquer função constante é contínua.

3. **Pergunta:** Prove (ou disprove) por definição, os seguintes limites: $\lim_{x \rightarrow 1} (4x + 3) = 7$

Resposta:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, 0 < |x-1| < \delta \Rightarrow |(4x+3)-7| < \varepsilon$$

$$|(4x+3)-7| < \varepsilon \Leftrightarrow |4x-4| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow 4|x-1| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow |x-1| < (\varepsilon/4) = \delta$$

se $\delta = (\varepsilon/4)$ a proposição é verdadeira logo 7 possui a propriedade exigida para o limite de $(4x+3)$ quando x tende para 1.

4. **Pergunta:** Prove (ou disprove) por definição, os seguintes limites: $\lim_{x \rightarrow 3} (3x-5) = 4$

Resposta:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, 0 < |x-3| < \delta \Rightarrow |(3x-5)-4| < \varepsilon$$

$$|(3x-5)-4| < \varepsilon \Leftrightarrow |3x-9| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow 3|x-3| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow |x-3| < (\varepsilon/3) = \delta$$

se $\delta = (\varepsilon/3)$ a proposição é verdadeira logo 4 possui a propriedade exigida para o limite de $(3x-5)$ quando x tende para 3.

5. **Pergunta:** Demonstre os seguintes teoremas sobre limites, considerando funções reais f, g e números reais $a, b, c, L, L', L'', M, N \in \mathbb{R}$, verificam-se os seguintes teoremas:

- a) Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ e $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L'$ então $L = L'$ (unicidade do limite)

$$0 = \lim_{x \rightarrow a} [f(x) - f(x)] = (L - L') \Rightarrow L = L'$$

- b) $\lim_{x \rightarrow a} c = c$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |c-c| = 0 < \varepsilon$$

logo a proposição é verdadeira para qualquer $\varepsilon > 0$ para qualquer valor de $\delta > 0$, por exemplo para $\delta = 1$

- c) $\lim_{x \rightarrow a} x = a$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |x-a| < \varepsilon$$

logo a proposição é verdadeira para qualquer $\varepsilon > 0$ se $\delta = \varepsilon$.

- d) Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$ então $\lim_{x \rightarrow a} (f+g)(x) = L+M$

Para qualquer $\varepsilon > 0$ deixe δ_1 garantir $|f(x)-L| < (\varepsilon/2)$ e deixe δ_2 garantir $|g(x)-M| < (\varepsilon/2)$. Então $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ garante

que

$$\begin{aligned} |(f+g)(x) - (L+M)| &= |f(x) + g(x) - L - M| \\ &= |(f(x) - L) + (g(x) - M)| \\ &\leq |f(x) - L| + |g(x) - M| \\ &< (\varepsilon/2) + (\varepsilon/2) = \varepsilon \end{aligned}$$

e) Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ e $n \in \mathbb{N}$ então $\lim_{x \rightarrow a} (nf)(x) = nL$

Para qualquer $\varepsilon > 0$ deixe δ garantir $|f(x) - L| < (\varepsilon/n)$. Então o mesmo δ garante que

$$\begin{aligned} |(nf)(x) - (nL)| &= |n| |f(x) - L| \\ &< (n\varepsilon)/n = \varepsilon \end{aligned}$$

f) Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$ então $\lim_{x \rightarrow a} (f \square g)(x) = L \square M$

Buscando a relação entre o que se pretende provar e as hipóteses:

$$\begin{aligned} |(f \square g)(x) - (LM)| &= |f(x)g(x) - Lg(x) + Lg(x) - LM| \\ &= |(f(x) - L)g(x) + L(g(x) - M)| \\ &\leq |g(x)| |f(x) - L| + |L| |g(x) - M| \end{aligned}$$

Como $g(x) \rightarrow M$, existe $\delta_g > 0$ que garante que $|g(x) - M| < 1$, usando a propriedade de valor absoluto, $|g(x)| - |M| < |g(x) - M| < 1$ obtem-se que $|g(x)| < 1 + |M|$, logo

$$|(f \square g)(x) - (LM)| < (1 + |M|) |f(x) - L| + |L| |g(x) - M|$$

Para qualquer $\varepsilon > 0$ deixe δ_f garantir $|f(x) - L| < (\varepsilon / (2(1 + |M|)))$ e deixe δ_g garantir $|g(x) - M| < (\varepsilon / (2|L|))$. Então $\delta = \min\{\delta_f, \delta_g, \delta\}$ garante que

$$\begin{aligned} |(f \square g)(x) - (LM)| &< (1 + |M|) |f(x) - L| + |L| |g(x) - M| \\ &< (1 + |M|) (\varepsilon / (2(1 + |M|))) + |L| (\varepsilon / (2|L|)) = (\varepsilon/2) + (\varepsilon/2) = \varepsilon \end{aligned}$$

g) Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ e $n \in \mathbb{N}$ então $\lim_{x \rightarrow a} f^n(x) = L^n$

Para $n=2$ tem-se pela proposição anterior que

$$\lim_{x \rightarrow a} f^2(x) = \lim_{x \rightarrow a} (f \square f)(x) = L \square L = L^2$$

Se a proposição for verdadeira para $n-1$ então

$$\lim_{x \rightarrow a} f^n(x) = \lim_{x \rightarrow a} (f^{n-1} \square f)(x) = L^{n-1} \square L = L^n$$

Logo a proposição é válida para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

h) Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$ então $\lim_{x \rightarrow a} ((f/g))(x) = (L/M)$ para $g(x) \neq 0$ numa vizinhança de a e $M \neq 0$

Então $g(x) \neq 0$ e $(1/(g(x)))$ existe numa vizinhança $\mathcal{U}_g$ de a e como $M \neq 0$, tem-se que

$$|(1/(g(x))) - (1/M)| = |((M - g(x)) / (Mg(x)))| = (1/(|M| |g(x)|)) |M - g(x)|$$

Agora é necessário delimitar $g(x)$ antes de prosseguir.

Como $M \neq 0$ então $(|M|/2)$ garante que a vizinhança $V_{\{(|M|) / 2 \}}(M)$, definida por $|g(x) - M| < (|M|) / 2$ é ou toda positiva ou toda negativa, dependendo se $M > 0$ ou se $M < 0$. Como $g(x) \rightarrow M$, para $\varepsilon = (|M|) / 2$ existe $\delta_{\{(|M|) / 2 \}} > 0$ que garante que $|g(x) - M| < (|M|) / 2$.

Usando a propriedade de valor absoluto, obtêm-se

$$- (|M|) / 2 < g(x) - M < (|M|) / 2$$

$$M - (|M|) / 2 < g(x) < M + (|M|) / 2$$

Caso $M > 0$ então $M - (|M|) / 2 = (|M|) / 2$ e $M + (|M|) / 2 = (3 |M|) / 2$ obtêm-se então que

$$(|M|) / 2 < |g(x)| < (3 |M|) / 2$$

Caso $M < 0$ então $M + (|M|) / 2 < 0$, pode-se então inverter as desigualdades e obter

$$0 < -M - (|M|) / 2 < -g(x) < -M + (|M|) / 2$$

$$0 < | -M - (|M|) / 2 | < | -g(x) | < | -M + (|M|) / 2 |$$

$$0 < || -M | - (|M|) / 2 || \leq | -M - (|M|) / 2 | < | -g(x) | < | -M + (|M|) / 2 | \leq |M| + (|M|) / 2$$

$$0 < ||M| - (|M|) / 2| < |g(x)| < |M| + (|M|) / 2$$

obtém-se de novo que

$$(|M|) / 2 < |g(x)| < (3 |M|) / 2$$

Resulta em qualquer caso, desde que $M \neq 0$, que

$$(|g(x) - M| < (|M|) / 2) \square ((|M|) / 2 < |g(x)| < (3 |M|) / 2)$$

e esta implicação não é reversível, o conjunto definido pela primeira desigualdade é um subconjunto do segundo.

Pode-se então voltar à equação ([inv](#)) com a delimitação de $|g(x)|$ obtida anteriormente obtém-se a delimitação para $(1/|g(x)|)$

$$(|M|) / 2 < |g(x)| < (3 |M|) / 2 \square (2 / (3 |M|)) < (1 / (|g(x)|)) < (2 / (|M|))$$

Então para qualquer $\varepsilon > 0$, existe $\delta_{\{g\}}$ que garante a existência de $(1/(g(x)))$, existe $\delta_{\square} > 0$ que garante $|g(x) - M| < ((\varepsilon |M|^2) / 2)$ e existe $\delta_{\square} > 0$ que garante $|g(x) - M| < (|M|) / 2$. Escolhendo $\delta = \min\{\delta_{\{g\}}, \delta_{\square}, \delta_{\square}\}$ garante-se simultaneamente essas três condições pelo que

$$| (1/(g(x))) - (1/M) | = (1/(|M| |g(x)|)) |M - g(x)| < (2/(|M|^2)) |M - g(x)| < (2/(|M|^2)) ((\varepsilon |M|^2) / 2) = \varepsilon$$

Logo

$$(1/(g(x))) \rightarrow (1/M) \text{ quando } x \rightarrow a$$

Pela proposição anterior,

$$\lim_{x \rightarrow a} ((f/g))(x) = \lim_{x \rightarrow a} (f \cdot (1/(g(x))))(x) = L(1/M) = (L/M)$$

i) Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ e $(p/q) \in \mathbb{Q}$ para $q \neq 0$, então $\lim_{x \rightarrow a} f^{(p/q)}(x) = L^{(p/q)}$

Prova-se primeiro a proposição mais simples que $\lim_{x \rightarrow a} f^{(1/n)}(x) = L^{(1/n)}$

Para isso relembra-se aqui a expressão

$$a-b = (a^{(1/n)} - b^{(1/n)}) \sum_{k=1}^n a^{((n-k)/n)} b^{((k-1)/n)}$$

cuja demonstração segue

$$\begin{aligned} & (a^{(1/n)} - b^{(1/n)}) \sum_{k=1}^n a^{((n-k)/n)} b^{((k-1)/n)} = \\ & a^{(1/n)} \sum_{k=1}^n a^{((n-k)/n)} b^{((k-1)/n)} - b^{(1/n)} \sum_{k=1}^n a^{((n-k)/n)} b^{((k-1)/n)} \\ & = \sum_{k=1}^n a^{((n-k+1)/n)} b^{((k-1)/n)} - \sum_{k=1}^n a^{((n-k)/n)} b^{(k/n)} \\ & = a + \sum_{k=2}^n a^{((n-k+1)/n)} b^{((k-1)/n)} - \sum_{k=1}^n a^{((n-k)/n)} b^{(k/n)} \\ & = a + \sum_{k=1}^{n-1} a^{((n-k)/n)} b^{(k/n)} - \sum_{k=1}^{n-1} a^{((n-k)/n)} b^{(k/n)} \\ & = a - b \end{aligned}$$

Note que quando n for ímpar $\text{Imf} \in \mathbb{R}$ mas quando n for par $\text{Imf} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Por isso considere o caso para n qualquer, logo $\text{Imf} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ e $L \geq 0$

$$|f^{(1/n)}(x) - L^{(1/n)}| = |(f(x) - L)| \left| \sum_{k=1}^n f^{((n-k)/n)}(x) L^{((k-1)/n)} \right|$$

Como $f(x) \rightarrow L$, numa vizinhança δ_1 de a é possível delimitar $\left| \sum_{k=1}^n f^{((n-k)/n)}(x) L^{((k-1)/n)} \right| < K(L)$ e numa vizinhança δ_2 de a é possível delimitar $|f(x) - L| < (\varepsilon / (K(L)))$, logo para $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ tem-se

$$|f^{(1/n)}(x) - L^{(1/n)}| = |(f(x) - L)| \left| \sum_{k=1}^n f^{((n-k)/n)}(x) L^{((k-1)/n)} \right| < (\varepsilon / (K(L))) K(L) = \varepsilon$$

Logo $\lim_{x \rightarrow a} f^{(1/n)}(x) = L^{(1/n)}$

Para provar que $\lim_{x \rightarrow a} f^{\{p/q\}}(x) = L^{\{p/q\}}$ observe que $f^{\{p/q\}}(x) = (f^{\{1/q\}})^{\{p\}}(x)$ pelo que $\lim_{x \rightarrow a} (f^{\{1/q\}})^{\{p\}} = (L^{\{1/q\}})^{\{p\}} = L^{\{p/q\}}$

j) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \iff \lim_{x \rightarrow a} (f(x) - L) = 0$ (deslocação vertical da origem)

$$|(f(x) - L) - 0| = |f(x) - L|$$

e a proposição está provada

h) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \iff \lim_{t \rightarrow 0} f(t+a) = L$ (deslocação horizontal da origem ou mudança de variável)

Fazendo a mudança de variável $t = x - a$ tem-se que $\lim_{x \rightarrow a} t = \lim_{x \rightarrow a} (x - a) = 0$, ou seja $t \rightarrow 0$ quando $x \rightarrow a$

Recíprocamente, se $x = t + a$ tem-se que $\lim_{t \rightarrow 0} x = \lim_{t \rightarrow 0} (t + a) = a$, ou seja $x \rightarrow a$ quando $t \rightarrow 0$

Então,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} f(t+a) &= \lim_{x \rightarrow a} f((x-a)+a) \\ &= \lim_{x \rightarrow a} f(x) \\ &= L \end{aligned}$$

Reciprocamente,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t+a) = L$$

i) Se $n \in \mathbb{N}$ então $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1/(x^n)) = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1/(x^n)) = \begin{cases} -\infty & \text{se } n \text{ for ímpar} \\ +\infty & \text{se } n \text{ for par} \end{cases}$

Como se $0 < x < (1/M) \iff (1/x) > M > 0$, escolhendo $\delta = (1/M)$ tem-se que

$$\delta > 0, 0 < x < \delta = (1/M) \iff (1/x) > M$$

logo

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (1/x) = +\infty$$

Pela proposição acima, e operando na recta acabada $\mathbb{R}$, resulta que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (1/(x^n)) = \lim_{x \rightarrow 0^+} ((1/x)^n) = (+\infty)^n = +\infty$$

Para o caso $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1/(x^n))$, como se $M < x < 0$ tem-se que $0 < -x < -M \iff (1/(-M)) < (1/(-x))$, escolhendo $\delta = (1/(-M))$ tem-se que

$$\delta < 0, -(1/(-M)) = -\delta < x < 0 \iff (1/M) < x < 0 \iff M < (1/x)$$

logo

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (1/x) = +\infty$$

Pela proposição acima, e operando na recta acabada $\mathbb{R}$, resulta que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (1/(x^n)) = \lim_{x \rightarrow 0^+} ((1/x)^n) = (+\infty)^n = \begin{cases} +\infty & \text{se } n \text{ for par} \\ -\infty & \text{se } n \text{ for ímpar} \end{cases}$$

$-\infty$ se n for ímpar

$+\infty$ se n for par

Resumo da Unidade

Nesta unidade $\mathbb{R}$ ficou caracterizado como um corpo ordenado completo com a propriedade do supremo.

Qualquer outro conjunto com as mesmas propriedades é isomorfo a $\mathbb{R}$.

Foi definida a recta acabada, com a introdução dos símbolos $-\infty, +\infty$, e as operações e excepções com esses símbolos.

Foram apresentados alguns conceitos topológicos de $\mathbb{R}$ relativos a pontos e subconjuntos notáveis de $\mathbb{R}$.

Foram introduzidas várias funções elementares pela sua expressão analítica na variável independente, nomeadamente polinomiais, racionais, com radicais, logarítmicas, exponenciais e logarítmicas.

Mostrou-se como resolver equações ou inequações que podem surgir quando se calcula o domínio de funções.

Foram apresentadas sequências e subsequências, sequências recursivas e alguns exemplos de sequências notáveis.

Definiu-se uma sequência convergente, determinou-se o limite de algumas sequências e apresentaram-se alguns teoremas sobre limites de sequências.

Foi introduzido o conceito de função contínua e apresentado o cálculo de limites de funções na recta acabada $\mathbb{R}$ fazendo uso dos símbolos $+\infty, -\infty$ para simplificar a notação. Foram apresentados os quinze tipos diferentes de limites que uma função real pode ter.

Por fim foram apresentados alguns teoremas sobre limites de funções reais.

Avaliação da Unidade

Instruções

Agrupe um mínimo de 5 e um máximo de 10 das perguntas seguintes em cada teste de avaliação de 1 hora, sem consulta.

Escolha perguntas de tipos diferentes na preparação de cada teste, mudando as parâmetros e dados de base para evitar colagens.

Critérios de avaliação

Cada pergunta vale entre 10% e 20%, conforme o número de perguntas seleccionadas.

Avaliação

Exercícios resolvidos sobre limites de funções:

1. Pergunta

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{([3]^{\sqrt{x}} - 1) / (x - 1)}{(x - 1)(x^2 + x + 1)} \right) &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{([3]^{\sqrt{x}} - 1)(x^2 + x + 1)}{(x - 1)(x^2 + x + 1)} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{([3]^{\sqrt{x}} - 1)}{(x - 1)(x^2 + x + 1)} \right) \\ &= (1/3)\end{aligned}$$

2. Pergunta

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{(x^2) / (\ln \cos x)}{(2x) / (-\tan x)} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{(2x) / (-\tan x)}{(2x) / (-x)} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{(2x) / (-x)}{(2x) / (-x)} \right) \\ &= -2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{(x^2) / (\ln \cos x)}{(\cos x - 1) / (\cos x + 1)} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{(x^2) / (\cos x - 1)}{(\cos x + 1) / (\cos x + 1)} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{(x^2 (\cos x + 1)) / (-\sin^2 x)}{(x / (\sin x)) / (x / (\sin x)) (\cos x + 1)} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{(x / (\sin x)) / (x / (\sin x)) (\cos x + 1)}{(x / (\sin x)) / (x / (\sin x)) (\cos x + 1)} \right) \\ &= -2\end{aligned}$$

3. Pergunta

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{(e^x - e^{-x} - 2x) / (x - \sin x)}{(e^x + e^{-x} - 2) / (1 - \cos x)} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{(e^x - e^{-x} - 2x) / (x - \sin x)}{(e^x + e^{-x} - 2) / (1 - \cos x)} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{(e^x - e^{-x}) / (\sin x)}{(e^x + e^{-x}) / (\cos x)} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{(e^x - e^{-x}) / (\sin x)}{(e^x + e^{-x}) / (\cos x)} \right) \\ &= 2\end{aligned}$$

4. Pergunta

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} (\tan x) \ln x &= \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{(\ln x)}{((1/x))} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{((1/x))}{((-1/(x^2)))} \right) \\ &= 0\end{aligned}$$

5. Pergunta

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} ((\sin x - x \cos x) / (x - \sin x)) &= \lim_{x \rightarrow 0} ((\cos x - (\cos x - x \sin x)) / (1 - \cos x)) \\&= \lim_{x \rightarrow 0} ((x \sin x) / (1 - \cos x)) \\&= \lim_{x \rightarrow 0} (((\sin x + x \cos x)) / (\sin x)) \\&= \lim_{x \rightarrow 0} (1 + ((x / (\sin x))) \cos x) \\&= 2\end{aligned}$$

6. Pergunta

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} ((1 / (\ln x)) - (1 / (x - 1))) &= \lim_{x \rightarrow 1} (((x - 1) - \ln x) / ((x - 1) \ln x)) \\&= \lim_{x \rightarrow 1} ((1 - (1/x)) / (\ln x + ((x - 1)) / x)) \\&= \lim_{x \rightarrow 1} ((x - 1) / (x \ln x + (x - 1))) \\&= \lim_{x \rightarrow 1} ((x - 1) / (x(x - 1) + (x - 1))) \\&= \lim_{x \rightarrow 1} (1 / ((x + 1))) \\&= (1/2)\end{aligned}$$

7. Pergunta

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} ((\tan x - \sin x) / (x^3)) &= \lim_{x \rightarrow 0} ((\tan x (1 - \cos x)) / (x^3)) \\&= \lim_{x \rightarrow 0} (((\tan x) / x)) (((1 - \cos x)) / (x^2)) \\&= \lim_{x \rightarrow 0} (((1 - \cos x)) / (x^2)) \\&= \lim_{x \rightarrow 0} ((\sin x) / (2x)) \\&= (1/2)\end{aligned}$$

8. Pergunta

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow (\pi/2)} (2x \tan x - \pi \sec x) &= \lim_{x \rightarrow (\pi/2)} (2x((\sin x) / (\cos x)) - \pi(1 / (\cos x))) \\&= \lim_{x \rightarrow (\pi/2)} ((2x \sin x - \pi) / (\cos x)) \\&= \lim_{x \rightarrow (\pi/2)} ((2 \sin x + 2x \cos x) / (-\sin x)) \\&= \lim_{x \rightarrow (\pi/2)} ((-2) + ((x / (\sin x))) \cos x) \\&= -2\end{aligned}$$

9. Pergunta

$$\lim_{x \rightarrow 0} ((1 / (x - 1)) - (2 / (x^2 - 1))) = 1$$

10. Pergunta

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} ((1/(x-1)) - (2/(x^2-1))) &= \lim_{x \rightarrow 1} ((x+1-2)/(x^2-1)) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} ((x-1)/(x^2-1)) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (((x-1))/((x-1)(x+1))) \\ &= (1/2)\end{aligned}$$

11. Pergunta

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} ((e^{-(1/x)})/x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (((1/x))/(e^{(1/x)})) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (((1/x))' / ((1/x)' e^{(1/x)})) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (1/(e^{(1/x)})) \\ &= 0\end{aligned}$$

12. Pergunta

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} ((\sin x - x \cos x)/(x^2 \sin x)) &= \lim_{x \rightarrow 0} ((\cos x - (\cos x - x \sin x))/(2x \sin x + x^2 \cos x)) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} ((x \sin x)/(2x \sin x + x^2 \cos x)) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} (1/(2 + (x/(\tan x)))) \\ &= (1/3)\end{aligned}$$

13. Pergunta

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} ((x - \arctan x)/(x^3)) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} ((1 - (1/(1+x^2)))/(3x)) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (((x^2)/(1+x^2))/(3x^2)) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (1/(3(1+x^2))) \\ &= (1/3)\end{aligned}$$

14. Pergunta

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + (1/x))^x &= \lim_{u \rightarrow 0} e^{\ln(1+u)^{(1/u)}} \\ &= e^{\lim_{u \rightarrow 0} (1/u) \ln(1+u)} \\ &= e^{\lim_{u \rightarrow 0} (u/u)} \\ &= e \\ \lim_{x \rightarrow \infty} (1 - (1/x))^x &= e^{\lim_{u \rightarrow 0} (1/u) \ln(1-u)} \\ &= e^{\lim_{u \rightarrow 0} ((-u)/u)} \\ &= e^{-1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + (\alpha/x))^x &= \lim_{u \rightarrow 0} e^{\ln(1+\alpha u)^{1/u}} \\ &= e^{\lim_{u \rightarrow 0} ((\alpha u)/u)} \\ &= e^{\alpha}\end{aligned}$$

15. Pergunta

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} ((1/x) + ((\ln(x+1))/(x^2))) &= \lim_{x \rightarrow \infty} ((x + \ln(x+1))/(x^2)) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} ((1 + (1/(x+1))))/(2x) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} (((x+2)/(x+1)))/(2x) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} ((x+2)/(2x(x+1))) \\ &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} ((1/x) + ((\ln(-x-1))/(x^2))) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} ((x + \ln(-x-1))/(x^2)) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} ((1 + ((-1)/(-x-1))))/(2x) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} (((-x-2)/(-x+1)))/(2x) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} ((-x-2)/(2x(-x-1))) \\ &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow \infty} ((1/x) + ((\ln|x+1|)/(x^2))) &= 0\end{aligned}$$

16. Pergunta

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} (1 - \sin(1/x))^{2x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} (1 - (2((\sin(1/x))/(1/x))))^{2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} (1 - (2/(2x)))^{2x} \\ &= e^{-2}\end{aligned}$$

17. Pergunta

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 e^{-x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} ((x^2)/(e^x)) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} ((2x)/(e^x)) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} (2/(e^x)) \\ &= 0\end{aligned}$$

18. Pergunta

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} ((1/(\sin x)) - (1/x)) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} ((1/x) ((x/(\sin x)) - (1/x))) \\ &= 0\end{aligned}$$

19. Pergunta

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{\ln(x-1)} - \frac{1}{(x-2)} \right) &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{((x-2) - \ln(x-1))}{(x-2) \ln(x-1)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(1 - (1/(x-1)))}{(\ln(x-1) + ((x-2)/(x-1)))} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{((x-2)/(x-1))}{(((x-1) \ln(x-1) + (x-2))/(x-1)))} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)}{(x-1) \ln(x-1) + (x-2)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)}{(x-1)(x-2) + (x-2)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{((x-1)+1)} \\
 &= (1/2)
 \end{aligned}$$

20. Pergunta

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan x - x}{x - \sin x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sec^2 x - 1)}{(1 - \cos x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2 \sec x (\tan x \sec x))}{(\sin x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2 \sec x (\tan x \sec x))}{(\sin x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{(\cos^3 x)} \\
 &= 2
 \end{aligned}$$

21. Pergunta

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + 2x)^{1/(x^2)} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left((1 + (2/(1/x))) \right)^{(1/x)} \\
 &= e^{1/x} \\
 &= \infty
 \end{aligned}$$

22. Pergunta

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(1 - \sin 2x)}{x} &= \frac{(1 - 0)}{(0^+)} \\
 &= +\infty
 \end{aligned}$$

23. Pergunta

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} \ln x &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)}{(e^x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(x e^x)} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

24. Pergunta

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 - 2x)^{1/x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 - \frac{2}{((1/x))} \right)^{(1/x)} \\
 &= e^{-2}
 \end{aligned}$$

25. Pergunta

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos(\pi/2 - x)}{\arctan x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(\pi/2 - x)}{(1/(1+x^2))} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} (1+x^2) \sin(\pi/2 - x) \\ &= 1\end{aligned}$$

26. Pergunta

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} (1-2x)^{\cot x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \left(\frac{-2}{(1/x)} \right) \right)^{(1/x)} \\ &= e^{-2}\end{aligned}$$

27. Pergunta

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow (\pi/2)} \left(\frac{\sec x + 5}{3 \tan x} \right) &= \lim_{x \rightarrow (\pi/2)} \left(\frac{\tan x \sec x}{3 \sec^2 x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow (\pi/2)} \left(\frac{\sin x}{3} \right) \\ &= (1/3)\end{aligned}$$

28. Pergunta

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln(1 + (a/x)) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \ln(1 + (a/x))^x \\ &= \ln \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + (a/x))^x \\ &= \ln e^a \\ &= a\end{aligned}$$

29. Pergunta

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} x - \sqrt{x^2 - 10} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x - |x| \sqrt{1 - (10/x^2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x (1 - \sqrt{1 - (10/x^2)}) \left(\frac{(1 + \sqrt{1 - (10/x^2)})}{(1 + \sqrt{1 - (10/x^2)})} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{10x}{x^2 (1 + \sqrt{1 - (10/x^2)})} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{10}{x (1 + \sqrt{1 - (10/x^2)})} \right) \\ &= 0\end{aligned}$$

30. Pergunta

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} x - \sqrt{x^2 - 10x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x - |x| \sqrt{1 - (10/x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x (1 - \sqrt{1 - (10/x)}) \left(\frac{(1 + \sqrt{1 - (10/x)})}{(1 + \sqrt{1 - (10/x)})} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{10x}{x (1 + \sqrt{1 - (10/x)})} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{10}{(1 + \sqrt{1 - (10/x)})} \right) \\ &= 5\end{aligned}$$

31. Pergunta

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} (e^x + x)^{1/x} &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} ((\ln(e^x + x))/x)} \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} ((e^x + 1)/(e^x + x))} \\ &= e^2\end{aligned}$$

32. Pergunta

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin(1/x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} ((\sin(1/x))/(1/x)) \\ &= 1\end{aligned}$$

33. Pergunta

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow (\pi/2)} (\sec x - \tan x) &= \lim_{x \rightarrow (\pi/2)} ((1/(\cos x)) - ((\sin x)/(\cos x))) \\ &= \lim_{x \rightarrow (\pi/2)} ((1 - \sin x)/(\cos x)) \\ &= \lim_{x \rightarrow (\pi/2)} ((-\cos x)/(-\sin x)) \\ &= 0\end{aligned}$$

34. Pergunta

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} (x^x)^x &= \lim_{x \rightarrow 0} x^{x^2} \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \ln x} \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} ((\ln x)/(x^{-2}))} \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} (1/(-2x^{-3}))} \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} ((x^3)/(-2))} \\ &= 1\end{aligned}$$

35. Pergunta

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} ((e^x - e^{-x})/(\sin x)) &= \lim_{x \rightarrow 0} ((e^x - e^{-x})/(\sin x)) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} ((e^x + e^{-x})/(\cos x)) \\ &= 2\end{aligned}$$

36. Pergunta

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} ((1/x) + \ln x) &= \lim_{u \rightarrow +\infty} (u + \ln(1/u)) \\ &= \lim_{u \rightarrow +\infty} e^u e^{\ln(1/u)} \\ &= \lim_{u \rightarrow +\infty} ((e^u)/u) \\ &= \lim_{u \rightarrow +\infty} ((e^u)/1) \\ &= +\infty\end{aligned}$$

37. Pergunta

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + (1/(3x)))^x &= e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln(1 + (1/(3x)))} \\
 &= e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} ((\ln(1 + (1/(3x)))) / ((1/x)))} \\
 &= e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} (((-1/(3x^2)))) / ((-1/(x^2)) (1 + (1/(3x))))} \\
 &= e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} (1/(3(1 + (1/(3x)))))} \\
 &= e^{(1/3)} \\
 \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + (1/(3x)))^x &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + ((1/3)/x))^x \\
 &= e^{(1/3)}
 \end{aligned}$$

38. Pergunta

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} (1 - 2x)^{(2/x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} ((1 + ((-2)/((1/x))))^{(1/x)})^2 \\
 &= e^{\square\square}
 \end{aligned}$$

39. Pergunta

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0^+} ((e^{2x}) / (x \cos x)) &= (1 / (0^+)) \\
 &= +\infty
 \end{aligned}$$

40. Pergunta

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} ((x - \sin x) / (x - \tan x)) &= \lim_{x \rightarrow 0} ((1 - \cos x) / (1 - \sec^2 x)) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} ((-\sin x) / (2 \sin x \sec^3 x)) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} ((-1) / (2 \sec^2 x)) \\
 &= -(1/2)
 \end{aligned}$$

41. Pergunta

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \tan x)^{(1/x)} &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \ln(1 + \tan x)^{(1/x)}} \\
 &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} ((\ln(1 + \tan x)) / x)} \\
 &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} ((\sec^2 x) / ((1 + \tan x)))} \\
 &= e
 \end{aligned}$$

42. Pergunta

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \left(\left(\frac{1}{\ln x} \right) - \left(\frac{x}{\ln x} \right) \right) &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{(1-x)}{\ln x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{(-1)}{\left(\frac{1}{x} \right)} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (-x) \\ &= -1\end{aligned}$$

43. Pergunta

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\left(\frac{2}{\sin^2 x} \right) - \left(\frac{1}{(1-\cos x)} \right) \right) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\left(\frac{2}{(1-\cos^2 x)} \right) - \left(\frac{1}{(1-\cos x)} \right) \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\left(\frac{2}{(1-\cos^2 x)} \right) - \left(\frac{1}{(1-\cos x)} \right) \left(\frac{(1+\cos x)}{(1+\cos x)} \right) \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{(1-\cos x)}{(1-\cos^2 x)} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{(\sin x)}{(2 \cos x \sin x)} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{(2 \cos x)} \right) \\ &= (1/2)\end{aligned}$$

44. Pergunta

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \left(\frac{3}{x} \right) \right)^x = e^{-3}$$

45. Pergunta

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{(x^3)}{(e^x)} \right) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{(3x^2)}{(e^x)} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{(6x)}{(e^x)} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{6}{(e^x)} \right) \\ &= 0\end{aligned}$$

46. Pergunta

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\left(\frac{1}{(3x)} \right)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left((1 + \sin x)^{\left(\frac{1}{x} \right)} \right)^{\left(\frac{1}{3} \right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left((1 + x)^{\left(\frac{1}{x} \right)} \right)^{\left(\frac{1}{3} \right)} \\ &= e^{\left(\frac{1}{3} \right)}\end{aligned}$$

47. Pergunta

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{(e^{2x})}{(4 \tan x)} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{(x/(\tan x))}{(e^{2x}/4)} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{(e^{2x})}{4} \right) \\ &= (1/4)\end{aligned}$$

48. Pergunta

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} (\cot x - (1/x)) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} ((x \cot x - 1)/x) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (((x/(\sin x)) \cos x - 1)/x) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} ((\cos x - 1)/x) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} ((-\sin x)/1) \\ &= 0\end{aligned}$$

49. Pergunta

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} ((1/x)^{\sin x}) &= e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln((1/x)^{\sin x})} \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} -\sin x \ln x} \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} -((\ln x)/(\csc x))} \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} -(1/(x \cot x \csc x))} \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} -((\tan x \sin x)/x)} \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} -\tan x} \\ &= 1\end{aligned}$$

50. Pergunta

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} (((x+2)/x))^x &= \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + (2/x))^x \\ &= e^2\end{aligned}$$

51. Pergunta

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} ((1/x) - (1/(e^x - 1))) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (((e^x - 1) - x)/(x(e^x - 1))) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} ((e^x - 1)/((e^x - 1) + xe^x)) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} ((e^x)/(2e^x + xe^x)) \\ &= (1/2)\end{aligned}$$

52. Pergunta

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1^+} ((1/(\ln x)) + (1/(x-1))) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} ((\ln x + x - 1)/((x-1) \ln x)) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} (((1/x) + 1)/(\ln x + ((x-1)/x))) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} ((x+1)/(x \ln x + (x-1))) \\ &= +\infty\end{aligned}$$

53. Pergunta 53.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2\pi} (3 - (x/\pi))^{\csc x} &= e^{\lim_{x \rightarrow 2\pi} ((\ln(3 - (x/\pi))) / (\sin x))} \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 2\pi} (((-1) / (\pi(3 - (x/\pi)))) / (\cos x))} \\ &= e^{- (1/\pi)}\end{aligned}$$

54. Pergunta

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -(\pi/2)} ((\pi/2) + x) \sec x &= \lim_{x \rightarrow -(\pi/2)} (((\pi/2) + x) / (\cos x)) \\ &= \lim_{x \rightarrow -(\pi/2)} (1 / (-\sin x)) \\ &= 1\end{aligned}$$

55. Pergunta

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} ((1 - x + \ln x) / (1 + \cos \pi x)) &= \lim_{x \rightarrow 1} ((-1 + (1/x)) / (-\pi \sin \pi x)) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} ((x - 1) / (\pi x \sin \pi x)) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (1 / (\pi \sin \pi x + \pi^2 x \cos \pi x)) \\ &= -(1 / (\pi^2))\end{aligned}$$

56. Pergunta

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3x)^{\csc x} &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} ((\ln(1 + 3x)) / (\sin x))} \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} (3 / ((1 + 3x) \cos x))} \\ &= e^3\end{aligned}$$

57. Pergunta

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow (\pi/2)^+} (\sec x - \tan x) &= \lim_{x \rightarrow (\pi/2)^+} ((1 - \sin x) / (\cos x)) \\ &= \lim_{x \rightarrow (\pi/2)^+} ((1 - \sin^2 x) / ((1 + \sin x) \cos x)) \\ &= \lim_{x \rightarrow (\pi/2)^+} ((\cos x) / ((1 + \sin x))) \\ &= 0\end{aligned}$$

58. Pergunta

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow (\pi/2)^+} (\cos x) \ln \cos x &= \lim_{x \rightarrow (\pi/2)^+} ((\ln \cos x) / ((1 / (\cos x)))) \\ &= \lim_{x \rightarrow (\pi/2)^+} ((((-\sin x) / (\cos x))) / (- (1 / (\cos^2 x \sin x)))) \\ &= \lim_{x \rightarrow (\pi/2)^+} \cos x \sin^2 x \\ &= 0\end{aligned}$$

59. Pergunta

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} (1+8x^2)^{\{1/(x^2)\}} &= e^{\{\lim_{x \rightarrow \infty} ((\ln(1+8x^2))/(x^2))\}} \\ &= e^{\{\lim_{x \rightarrow \infty} ((16x)/(2x(1+8x^2)))\}} \\ &= e^{\{\lim_{x \rightarrow \infty} (8/((1+8x^2)))\}} \\ &= 1\end{aligned}$$

60. Pergunta

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} ((1/(\ln(1+x))) - (1/x)) &= \lim_{x \rightarrow 0} ((x - \ln(1+x)) / (x \ln(1+x))) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} ((1 - (1/((1+x)))) / (\ln(1+x) + (x/((1+x))))) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} (x / ((1+x) \ln(1+x) + x)) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} (x / ((1+x)x + x)) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} (1 / ((x+2))) \\ &= (1/2)\end{aligned}$$

61. Pergunta

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} ((1 - \cos 2x) / (x^2)) &= \lim_{x \rightarrow 0} ((2 \sin 2x) / (2x)) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} ((2 \cos 2x) / 1) \\ &= 2\end{aligned}$$

62. Pergunta

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\{1/x\}} &= e^{\{\lim_{x \rightarrow 0} ((\ln(1+x))/x)\}} \\ &= e^{\{\lim_{x \rightarrow 0} (x/x)\}} \\ &= e\end{aligned}$$

63. Pergunta

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow (\pi/2)} ((\cot x - \cos x) / (x^2)) &= ((0-0) / (((\pi/2))^2)) \\ &= 0\end{aligned}$$

64. Pergunta

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (1+2x)^{\{1/x\}} = e^2$$

65. Pergunta

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} ((\ln \tan 2x) / (\ln \sin 3x)) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} ((\ln((\tan 2x) / (2x))) / (\ln((\sin 3x) / (3x)))) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} ((\ln 2x) / (\ln 3x)) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (((2/(2x))) / ((3/(3x)))) \\ &= 1\end{aligned}$$

66. Pergunta

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} (e^x + x)^{1/x} &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} ((\ln(e^x + x))/x)} \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} ((e^x + 1)/(e^x + x))} \\ &= e^2\end{aligned}$$

67. Pergunta

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} \cos 3x \sec 7x &= \lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} ((\cos 3x)/(\cos 7x)) \\ &= \lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} ((-3\sin 3x)/(-7\sin 7x)) \\ &= (3/7)\end{aligned}$$

68. Pergunta

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + (3/x))^{2x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} ((1 + (3/x))^x)^2 \\ &= (e^3)^2 \\ &= e^6\end{aligned}$$

69. Pergunta

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} ((e^x - 1)/(\sin x)) &= \lim_{x \rightarrow 0} ((e^x)/(\cos x)) \\ &= 1\end{aligned}$$

70. Pergunta

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} ((\ln x)/(\csc x)) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (((1/x))/(-(\cos x)/(\sin^2 x))) \\ &= -\lim_{x \rightarrow 0^+} ((\sin^2 x)/(x \cos x)) \\ &= -\lim_{x \rightarrow 0^+} (((\sin x)/x))((\sin x)/(\cos x)) \\ &= -\lim_{x \rightarrow 0^+} \tan x \\ &= 0\end{aligned}$$

71. Pergunta

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{1/(\ln x)} &= e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} ((\ln x)/(\ln x))} \\ &= e\end{aligned}$$

72. Pergunta

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} (\cot x - \ln x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} ((1 - \tan x \ln x)/(\tan x)) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} ((-\sec^2 x \ln x - ((\tan x)/x))/(\sec^2 x)) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (-\ln x + \cos^2 x) \\ &= \infty\end{aligned}$$

73. Pergunta

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^x &= e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(\sin x)} \\
 &= e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} ((\ln(\sin x)) / ((1/x)))} \\
 &= e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} (((\cos x) / (\sin x)) / (-1/(x^2)))} \\
 &= e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} -((x/(\sin x))((x \cos x)/1))} \\
 &= e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} -((x \cos x)/1)} \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

74. Pergunta

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} (\tan x - \sec x) &= \lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} ((\sin x - 1) / (\cos x)) \\
 &= \lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} ((\cos x) / (-\sin x)) \\
 &= 0 \\
 &= \lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} ((\sin x - 1) / (\cos x)) ((\sin x + 1) / (\sin x + 1)) \\
 &= \lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} ((-\cos^2 x) / (\cos x (\sin x + 1))) \\
 &= \lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} ((-\cos x) / ((\sin x + 1))) \\
 &= 0 \\
 \lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} (\tan x - \sec x) &= \lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} ((\sin x - 1) / (\cos x)) \\
 &\quad ((\sin x + 1) / (\sin x + 1)) \\
 &= \lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} ((-\cos^2 x) / (\cos x (\sin x + 1))) \\
 &= \lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} ((-\cos x) / ((\sin x + 1))) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

75. Pergunta

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} ((x - \sin x) / (x - \tan x)) &= \lim_{x \rightarrow 0} ((x - \sin x) / (x - \tan x)) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} ((1 - \cos x) / (1 - \sec^2 x)) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} ((\sin x) / (-2((\sin x) / (\cos x)))) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} ((\cos x \sin x) / (-2 \sin x)) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} ((\cos x) / (-2)) \\
 &= -(1/2)
 \end{aligned}$$

76. **Pergunta:** Prove (ou disprove) por definição, os seguintes limites: $\lim_{x \rightarrow 2} (4x-5) = 3$

Resposta:

$$\square \varepsilon > 0, \square \delta > 0, 0 < |x-2| < \delta \square | (4x-5) - 3 | < \varepsilon$$

$$| (4x-5) - 3 | < \varepsilon \square | 4x-8 | < \varepsilon$$

$$\square 4 | x-2 | < \varepsilon$$

$$\square | x-2 | < (\varepsilon/4) = \delta$$

logo, se $\varepsilon = 0.001$ então $\delta = ((0.001)/4) = 0.00025$

77. **Pergunta:** Prove (ou disprove) por definição, os seguintes limites: $\lim_{x \rightarrow -2} (2+5x) = -8$

Resposta:

$$\square \varepsilon > 0, \square \delta > 0, 0 < |x - (-2)| < \delta \square | (2+5x) - (-8) | < \varepsilon$$

$$| (2+5x) - (-8) | < \varepsilon \square | 5x+10 | < \varepsilon$$

$$\square 5 | x+2 | < \varepsilon$$

$$\square | x+2 | < (\varepsilon/5) = \delta$$

logo, se $\varepsilon = 0.002$ então $\delta = ((0.002)/5) = 0.0004$

78. **Pergunta:** Prove (ou disprove) por definição, os seguintes limites: $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2-5) = -4$

Resposta:

$$\square \varepsilon > 0, \square \delta > 0, 0 < |x-1| < \delta \square | (x^2-5) - (-4) | < \varepsilon$$

$$| (x^2-5) - (-4) | < \varepsilon \square | x^2-1 | < \varepsilon$$

$$\square | x-1 | | x+1 | < \varepsilon$$

Buscando "controle" sobre $|x+1|$, majoramos $\delta < 1$ para facilitar as contas (mantendo a totalidade da vizinhança do lado positivo de R)

$$0 < |x-1| < \delta < 1 \square -1 < x-1 < 1 \square x \neq 1$$

$$\square 1 < x+1 < 3 \square x \neq 1$$

$$\square 1 < |x+1| < 3 \square x \neq 1$$

usamos o majorante (pois estamos a avançar pela implicação recíproca)

$$|x-1| |x+1| < \varepsilon \square |x-1| \square 3 < \varepsilon$$

$$\square |x-1| < (\varepsilon/3) = \delta$$

escolhendo $\delta = \min\{1, (\varepsilon/3)\}$ a implicação é reconstruída. Logo se $\varepsilon = 0.01$ então

$$\delta = \min\{1, ((0.01)/3)\} = 0.0033$$

79. **Pergunta:** Prove (ou disprove) por definição, os seguintes limites: $\lim_{x \rightarrow -4} (2x+7) = -1$

Resposta:

$$\square \varepsilon > 0, \square \delta > 0, 0 < |x - (-4)| < \delta \square | (2x+7) - (-1) | < \varepsilon$$

$$| (2x+7) - (-1) | < \varepsilon \square | 2x+8 | < \varepsilon$$

$$\square 2|x+4| < \varepsilon$$

$$\square |x+4| < (\varepsilon/2) = \delta$$

se $\delta = (\varepsilon/2)$ a proposição é verdadeira logo -1 possui a propriedade exigida para o limite de $(2x+7)$ quando x tende para -4.

80. **Pergunta:** Prove (ou disprove) por definição, os seguintes limites: $\lim_{x \rightarrow -2} (7-2x) = 11$

Resposta:

$$\square \varepsilon > 0, \square \delta > 0, 0 < |x - (-2)| < \delta \square | (7-2x) - 11 | < \varepsilon$$

$$| (7-2x) - 11 | < \varepsilon \square | -2x-4 | < \varepsilon$$

$$\square | -2 | |x+2| < \varepsilon$$

$$\square |x+2| < (\varepsilon/2) = \delta$$

se $\delta = (\varepsilon/2)$ a proposição é verdadeira logo 11 possui a propriedade exigida para o limite de $(7-2x)$ quando x tende para -2.

81. **Pergunta:** Prove (ou disprove) por definição, os seguintes limites: $\lim_{x \rightarrow 3} ((x^2-9)/(x-3)) = 6$

Resposta:

$$\square \varepsilon > 0, \square \delta > 0, 0 < |x-3| < \delta \square | ((x^2-9)/(x-3)) - 6 | < \varepsilon$$

$$| ((x^2-9)/(x-3)) - 6 | < \varepsilon \square | ((x-3)(x+3)/(x-3)) - 6 | < \varepsilon$$

$$\square | (x+3) - 6 | < \varepsilon$$

$$\square |x-3| < \varepsilon = \delta$$

se $\delta = \varepsilon$ a proposição é verdadeira logo 6 possui a propriedade exigida para o limite de $((x^2-9)/(x-3))$ quando x tende para 3.

82. **Pergunta:** Prove (ou disprove) por definição, os seguintes limites: $\lim_{x \rightarrow -1} (3+2x-x^2) = 0$

Resposta:

$$\exists \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, 0 < |x - (-1)| < \delta \Rightarrow |(3+2x-x^2) - 0| < \varepsilon$$

$$|(3+2x-x^2) - 0| < \varepsilon \Rightarrow |3+2x-x^2| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow |x+1| + |x-3| < \varepsilon$$

$$0 < |x+2| < \delta < 1 \Rightarrow -1 < x+2 < 1 \Rightarrow x \neq -1$$

$$\Rightarrow -6 < x-3 < -4 \Rightarrow x \neq -1$$

$$\Rightarrow |x-3| < 12 \Rightarrow x \neq -1$$

$$|x+1| + |x-3| < \varepsilon \Rightarrow |x+1| < 12 < \varepsilon$$

$$\Rightarrow |x+1| < (\varepsilon / (12)) = \delta$$

se $\delta = (\varepsilon / (12))$ a proposição é verdadeira logo 0 possui a propriedade exigida para o limite de $(3+2x-x^2)$ quando x tende para -1.

83. **Pergunta:** Calcule os seguintes limites usando teoremas: $\lim_{x \rightarrow 5} (3x-7)$

Resposta:

$$\lim_{x \rightarrow 5} (3x-7) = \lim_{x \rightarrow 5} (3x) - \lim_{x \rightarrow 5} (7)$$

$$= 3 \lim_{x \rightarrow 5} (x) - 7$$

$$= 3(5) - 7$$

$$= 8$$

84. **Pergunta:** Calcule os seguintes limites usando teoremas: $\lim_{x \rightarrow 3} (2x^2-4x+5)$

Resposta:

$$\lim_{x \rightarrow 3} (2x^2-4x+5) = \lim_{x \rightarrow 3} (2x^2) - \lim_{x \rightarrow 3} (4x) + \lim_{x \rightarrow 3} (5)$$

$$= 2 \lim_{x \rightarrow 3} (x) \lim_{x \rightarrow 3} (x) - 4 \lim_{x \rightarrow 3} (x) + 5$$

$$= 2(3)(3) - 4(3) + 5$$

$$= 11$$

85. **Pergunta:** Calcule os seguintes limites usando teoremas: $\lim_{y \rightarrow -1} (y^3-2y^2+3y-4)$

Resposta:

$$\lim_{y \rightarrow -1} (y^3-2y^2+3y-4) = \lim_{y \rightarrow -1} (y^3) - \lim_{y \rightarrow -1} (2y^2) + \lim_{y \rightarrow -1} (3y) - \lim_{y \rightarrow -1} (4)$$

$$= \lim_{y \rightarrow -1} (y) \lim_{y \rightarrow -1} (y) \lim_{y \rightarrow -1} (y) - 2 \lim_{y \rightarrow -1} (y) \lim_{y \rightarrow -1} (y) + 3 \lim_{y \rightarrow -1} (y) - 4$$

$$= (-1)(-1)(-1) - 2(-1)(-1) + 3(-1) - 4$$

$$= -1-2-3-4$$

$$= -10$$

86. **Pergunta:** Calcule os seguintes limites usando teoremas: $\lim_{x \rightarrow -1} ((2x+1)/(x^2-3x+4))$

Resposta:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} ((2x+1)/(x^2-3x+4)) &= (\lim_{x \rightarrow -1} (2x+1)) / (\lim_{x \rightarrow -1} (x^2-3x+4)) \\ &= ((\lim_{x \rightarrow -1} (2x) + \lim_{x \rightarrow -1} (1)) / (\lim_{x \rightarrow -1} (x^2) - \lim_{x \rightarrow -1} (3x) + \lim_{x \rightarrow -1} (4))) \\ &= ((2\lim_{x \rightarrow -1} (x) + 1) / (\lim_{x \rightarrow -1} (x) \lim_{x \rightarrow -1} (x) - 3\lim_{x \rightarrow -1} (x) + 4)) \\ &= ((2(-1) + 1) / ((-1)(-1) - 3(-1) + 4)) \\ &= ((-1) / 8) \end{aligned}$$

87. **Pergunta:** Calcule os seguintes limites usando teoremas: $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt[3]{((x^2+3x+4)/(x^3+1))}$

Resposta:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt[3]{((x^2+3x+4)/(x^3+1))} &= \sqrt[3]{(\lim_{x \rightarrow 2} ((x^2+3x+4)/(x^3+1)))} \\ &= \sqrt[3]{(\lim_{x \rightarrow 2} ((x^2+3x+4)/(x^3+1)))} \\ &= \sqrt[3]{((14)/9)} \end{aligned}$$

88. **Pergunta:** Calcule os seguintes limites usando teoremas: $\lim_{x \rightarrow -3} [3]\sqrt[3]{((5+2x)/(5-x))}$

Resposta:

89. **Pergunta:** Calcule os seguintes limites usando teoremas: $\lim_{x \rightarrow -3} [3]\sqrt[3]{((5+2x)/(5-x))}$

Resposta:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -3} [3]\sqrt[3]{((5+2x)/(5-x))} &= [3]\sqrt[3]{(\lim_{x \rightarrow -3} ((5+2x)/(5-x)))} \\ &= [3]\sqrt[3]{((-1)/8)} \\ &= -(1/2) \end{aligned}$$

90. **Pergunta:** Calcule os seguintes limites usando teoremas: $\lim_{x \rightarrow (3/2)} ((2x-3)/(4x^2-9))$

Resposta:

$$\lim_{x \rightarrow (3/2)} ((2x-3)/(4x^2-9)) = \lim_{x \rightarrow (3/2)} (2/4) ((x-(3/2))/(x^2-(9/4)))$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow (3/2)} \left\{ \frac{2}{4} \left(\frac{(x - (3/2))}{((x - (3/2))(x + (3/2)))} \right) \right\} \\
 &= \lim_{x \rightarrow (3/2)} \left\{ \frac{2}{4(x + (3/2))} \right\} \\
 &= (1/6) = 0.16667
 \end{aligned}$$

91. **Pergunta:** Calcule os seguintes limites usando teoremas: $\lim_{x \rightarrow (3/2)} \left\{ \frac{(2x-3)}{(4x^2-9)} \right\}$

Resposta:

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow (3/2)} \left\{ \frac{(2x-3)}{(4x^2-9)} \right\} &= \lim_{x \rightarrow (3/2)} \left\{ \frac{2}{4} \left(\frac{(x - (3/2))}{(x^2 - (9/4))} \right) \right\} \\
 &= \lim_{x \rightarrow (3/2)} \left\{ \frac{2}{4} \left(\frac{(x - (3/2))}{((x - (3/2))(x + (3/2)))} \right) \right\} \\
 &= \lim_{x \rightarrow (3/2)} \left\{ \frac{2}{4(x + (3/2))} \right\} \\
 &= (1/6) = 0.16667
 \end{aligned}$$

92. **Pergunta:** Calcule os seguintes limites usando teoremas: $\lim_{z \rightarrow -5} \left\{ \frac{(z^2-25)}{(z+5)} \right\}$

Resposta:

$$\begin{aligned}
 \lim_{z \rightarrow -5} \left\{ \frac{(z^2-25)}{(z+5)} \right\} &= \lim_{z \rightarrow -5} \left\{ \frac{((z+5)(z-5))}{(z+5)} \right\} \\
 &= \lim_{z \rightarrow -5} (z-5) \\
 &= -10
 \end{aligned}$$

93. **Pergunta:** Calcule os seguintes limites usando teoremas: $\lim_{x \rightarrow (1/3)} \left\{ \frac{(3x-1)}{(9x^2-1)} \right\}$

Resposta:

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow (1/3)} \left\{ \frac{(3x-1)}{(9x^2-1)} \right\} &= \lim_{x \rightarrow (1/3)} \left\{ \frac{3}{9} \left(\frac{(x - (1/3))}{(x^2 - (1/9))} \right) \right\} \\
 &= \lim_{x \rightarrow (1/3)} \left\{ \frac{3}{9} \left(\frac{(x - (1/3))}{((x - (1/3))(x + (1/3)))} \right) \right\} \\
 &= \lim_{x \rightarrow (1/3)} \left\{ \frac{3}{9(x + (1/3))} \right\} \\
 &= (1/2)
 \end{aligned}$$

94. **Pergunta:** Calcule os seguintes limites usando teoremas: $\lim_{x \rightarrow 4} \left\{ \frac{(3x^2-17x+20)}{(4x^2-25x+36)} \right\}$

Resposta:

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 4} \left\{ \frac{(3x^2-17x+20)}{(4x^2-25x+36)} \right\} &= \lim_{x \rightarrow 4} \left\{ \frac{(3(x-4)(x-(5/3)))}{(4(x-4)(x-(9/4)))} \right\} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 4} \left\{ \frac{(3(x-(5/3)))}{(4(x-(9/4)))} \right\} \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

95. **Pergunta:** Calcule os seguintes limites usando teoremas: $\lim_{s \rightarrow 1} ((s^3 - 1) / (s - 1))$

Resposta:

$$\begin{aligned}\lim_{s \rightarrow 1} ((s^3 - 1) / (s - 1)) &= \lim_{s \rightarrow 1} (((s - 1)(s^2 + s + 1)) / (s - 1)) \\ &= \lim_{s \rightarrow 1} (s^2 + s + 1) \\ &= 3\end{aligned}$$

96. **Pergunta:** Calcule os seguintes limites usando teoremas: $\lim_{t \rightarrow (3/2)} \sqrt{((8t^3 - 27) / (4t^2 - 9))}$

Resposta:

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow (3/2)} \sqrt{((8t^3 - 27) / (4t^2 - 9))} &= \sqrt{(\lim_{t \rightarrow (3/2)} ((8t^3 - 27) / (4t^2 - 9)))} \\ &= \sqrt{(\lim_{t \rightarrow (3/2)} (8/4) ((t^3 - (27/8)) / (t^2 - (9/4))))} \\ &= \sqrt{(\lim_{t \rightarrow (3/2)} (8/4) (((t - (3/2))(t^2 + (3/2)t + (9/4))) / ((t - (3/2))(t + (3/2)))))} \\ &= \sqrt{(\lim_{t \rightarrow (3/2)} (8/4) ((t^2 + (3/2)t + (9/4)) / ((t + (3/2)))))} \\ &= \sqrt{(9/2)}\end{aligned}$$

97. **Pergunta:** Calcule os seguintes limites usando teoremas: $\lim_{h \rightarrow -1} ((\sqrt{h+5} - 2) / (h+1))$

Resposta:

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow -1} ((\sqrt{h+5} - 2) / (h+1)) &= \lim_{h \rightarrow -1} ((\sqrt{h+5} - 2) / (h+1)) \\ &= ((\sqrt{h+5} + 2) / (\sqrt{h+5} + 2)) \\ &= \lim_{h \rightarrow -1} (((h+1)) / ((h+1)(\sqrt{h+5} + 2))) \\ &= \lim_{h \rightarrow -1} (1 / ((\sqrt{h+5} + 2))) \\ &= (1/4)\end{aligned}$$

98. **Pergunta:** Calcule os seguintes limites usando teoremas: $\lim_{x \rightarrow 1} (([3]\sqrt{x} - 1) / (x - 1))$

Resposta:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} (([3]\sqrt{x} - 1) / (x - 1)) &= \lim_{x \rightarrow 1} (([3]\sqrt{x} - 1) / ([3]\sqrt{x}^3 - 1)) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} ((([3]\sqrt{x} - 1) / (([3]\sqrt{x} - 1)([3]\sqrt{x}^2 + [3]\sqrt{x} + 1))) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (1 / (([3]\sqrt{x}^2 + [3]\sqrt{x} + 1))) \\ &= (1/3)\end{aligned}$$

99. **Pergunta:** Calcule os seguintes limites usando teoremas: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^3 - x^2 - x + 10)}{(x^2 + 3x + 2)}$

Resposta:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^3 - x^2 - x + 10)}{(x^2 + 3x + 2)} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{((x+2)(x^2 - 3x + 5))}{((x+2)(x+1))} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 - 3x + 5)}{(x+1)} \\ &= \frac{3}{2}\end{aligned}$$

100. **Pergunta:** Calcule os seguintes limites: $\lim_{t \rightarrow 2} \frac{(-t+2)}{(t-2)^2}$

Resposta:

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow 2} \frac{(-t+2)}{(t-2)^2} &= \lim_{t \rightarrow 2} \frac{(-(t-2))}{(t-2)^2} \\ &= \lim_{t \rightarrow 2} \frac{(-1)}{(t-2)} \\ &= +\infty\end{aligned}$$

101. **Pergunta:** Calcule os seguintes limites: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{3+x^2})}{x}$

Resposta:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{3+x^2})}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{3+x^2})}{x} \\ &= +\infty\end{aligned}$$

102. **Pergunta:** Calcule os seguintes limites: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{3+x^2})}{(x^2)}$

Resposta:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{3+x^2})}{(x^2)} = +\infty$$

103. **Pergunta:** Calcule os seguintes limites: $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{16-x^2})}{(x-4)}$

Resposta:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{16-x^2})}{(x-4)} &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{16-x^2})}{(-(4-x))} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(-\sqrt{((16-x^2)/((4-x)^2))})}{1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(-\sqrt{(((4-x)(4+x))/((4-x)(4-x))))})}{1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(-\sqrt{(((4+x))/((4-x))))})}{1} \\ &= -\infty\end{aligned}$$

104. **Pergunta:** Calcule os seguintes limites: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2-3)}{(x^3+x^2)}$

Resposta:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2-3)}{(x^3+x^2)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2-3)}{(x^2(x+1))} \\ &= -\infty\end{aligned}$$

105. **Pergunta:** Calcule os seguintes limites: $\lim_{s \rightarrow 2} \left(\frac{1}{(s-2)} - \frac{3}{(s^2-4)} \right)$

Resposta:

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 2} \left(\frac{1}{(s-2)} - \frac{3}{(s^2-4)} \right) &= \lim_{s \rightarrow 2} \left(\frac{(s+2)-3}{(s^2-4)} \right) \\ &= \lim_{s \rightarrow 2} \left(\frac{(s-1)}{(s^2-4)} \right) \\ &= -\infty \end{aligned}$$

106. **Pergunta:** Calcule os seguintes limites: $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{(2x^3-5x^2)}{(x^2-1)} \right)$

Resposta:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{(2x^3-5x^2)}{(x^2-1)} \right) &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{(x^2(2x-5))}{(x^2-1)} \right) \\ &= +\infty \end{aligned}$$

107. **Pergunta:** Calcule os seguintes limites: $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{(x^2-1)}{(x^2-1)} \right)$

Resposta:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{(x^2-1)}{(x^2-1)} \right) = +\infty$$

108. **Pergunta:** Calcule os seguintes limites: $\lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{(6x^2+x-2)}{(2x^2+3x-2)} \right)$

Resposta:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{(6x^2+x-2)}{(2x^2+3x-2)} \right) &= \lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{(6(x+(2/3))(x-(1/2)))}{(2(x+2)(x-(1/2)))} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{(x+(2/3))}{(x+2)} \right) \\ &= +\infty \end{aligned}$$

109. **Pergunta:** Calcule os seguintes limites: $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{(x-2)}{(2-\sqrt{4x-x^2})} \right)$

Resposta:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{(x-2)}{(2-\sqrt{4x-x^2})} \right) &= \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{(x-2)}{(2-\sqrt{4x-x^2})} \right) \\ &\quad \left(\frac{(2+\sqrt{4x-x^2})}{(2+\sqrt{4x-x^2})} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{((x-2)(2+\sqrt{4x-x^2}))}{(4-(4x-x^2))} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{((x-2)(2+\sqrt{4x-x^2}))}{((x-2)^2)} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{(2+\sqrt{4x-x^2})}{(x-2)} \right) \\ &= -\infty \end{aligned}$$

Leituras e outros Recursos

As leituras e outros recursos desta unidade encontram-se na lista de Leituras e Outros Recursos do curso.

Unidade 2. Cálculo diferencial em

Introdução à Unidade

Esta unidade apresenta o conceito de continuidade, a derivada de funções em $\mathbb{R}$, a interpretação geométrica da derivada, a derivada exterior e as formas diferenciais de funções em $\mathbb{R}^n$.

Estes são conceitos fundamentais do cálculo diferencial e permitem registrar informações sobre relações funcionais em $\mathbb{R}$, sob a forma de equações diferenciais.

Objetivos da Unidade

Após a conclusão desta unidade, deverá ser capaz de:

- Determinar se uma função real é contínua ou não num ponto ou num intervalo, usar os teoremas de Bolzano ou do valor intermédio para saber se existe ou não zero de uma função num determinado intervalo;
- Calcular derivadas de funções elementares usando os teoremas da derivada de funções compostas, da função implícita e da função inversa.
- Determinar os extremos locais e global, determinar a monotonia e a curvatura de gráficos de funções reais, com auxílio dos teoremas de Fermat, Cauchy, Rolle, Lagrange e l'Hospital.

TERMOS-CHAVE

Fun. contínua :	Se limite em $a \in \text{dom} f$ existe e é igual a $f(a)$
Cont. à direita :	Se limite à direita em a existe e é igual a $f(a)$
Cont. à esquerda :	Se limite à esquerda em a existe e é igual a $f(a)$
Cont. intervalo :	Contínua em qualquer ponto do intervalo
$C(E)$:	Conjunto de todas as fun. contínuas em $E \subseteq \mathbb{R}$
Fun. Dirichlet :	1 se $x \in \mathbb{Q}$ e 0 se $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (descont. todolugar)
Fun. descontínua :	Se existe vizinhança impenetrável de $f(a)$
Descont. simples :	Se qualquer limite lateral existe em a
Descont. infinita:	Se algum limite lateral não existe em a
Oscilação f em E :	$\omega(f; E) = \sup f(E) - \inf f(E)$
Oscilação f em x :	$\omega(f; x) = \inf \{ \text{diam } f(V_{\varepsilon}(x) \cap \text{dom} f) : \varepsilon > 0 \}$
Unif. cont. em E :	$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : (\forall y \in A \mid x - y < \delta) \implies f(x) - f(y) < \varepsilon$

Subconjunto compacto : fechado e delimitado de $\mathbb{R}$

Fun. crescente : $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$

Fun. decrescente : $x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$

Fn. Lipschitz cont. : $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|, \forall x, y \in \text{dom} f$, para algum $k > 0$

Derivada de f : $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f(x+h) - f(x))}{h}$

Fn. diferenciável : Em x_0 se a derivada existe

Regra da cadeia : $(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$

Taxas relacionadas : Se $E(x(t), y(t)) = c$ então $E'(x(t), y(t)) = 0$

Polinómio. Taylor : $f(x) \approx f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots$

Máximo local : Se existe $V_\epsilon(c)$ onde $f(c) \geq f(x)$

Mínimo local : Se existe $V_\epsilon(c)$ onde $f(c) \leq f(x)$

Máximo global : Se existe $c \in I$ onde $f(c) \geq f(x), \forall x \in I$

Mínimo global : Se existe $c \in I$ onde $f(c) \leq f(x), \forall x \in I$

Ponto crítico de f : $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ não exista

Ponto de inflexão : derivada muda de sinal

Incremento de y : Δy

Diferencial de y : Se $y = f(x)$ então $dy = f'(x) \Delta x$

Notação de Leibniz : $f'(x) = dy/dx$

Derivada exterior : $df = f'(x) dx$

Equação diferencial : relação entre diferenciais de variáveis

Actividades de Aprendizagem

Actividade 2.1 - Continuidade de funções em

Introdução

Continuidade de funções reais de variável real. Algumas propriedades locais de funções contínuas. Caracterização alternativa de continuidade. Exemplos notáveis de funções contínuas. Descontinuidade de funções. Propriedades globais de funções contínuas (Teorema de Bolzano ou do valor intermédio)

Detalhes da atividade

Uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua no ponto $a \in \mathbb{R}$ se

- (i) $f(a) \in \mathbb{R}$, a função é definida no ponto a ;
- (ii) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \in \mathbb{R}$, o limite da função no ponto a existe;
- (iii) $f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$

As três condições juntas equivalem à seguinte afirmação:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

Enquanto que na definição de limite num ponto é necessário apenas que a seja um ponto de acumulação de $\text{dom} f$, na definição de continuidade num ponto é necessário que $a \in \text{dom} f$.

Se $f(a)$ existe, o $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ existe e $f(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ diz-se que a função é contínua à direita de a .

Se $f(a)$ existe, o $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ existe e $f(a) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ diz-se que a função é contínua à esquerda de a .

Uma função contínua num ponto a tem de ser contínua à direita de (a^-) e à esquerda de (a^+) .

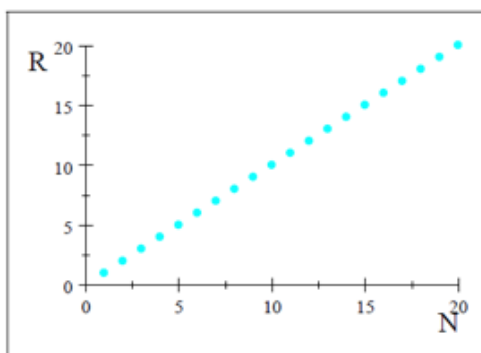
Uma função é contínua num intervalo aberto $]a, b[\subset \mathbb{R}$ se for contínua em todos os pontos desse intervalo.

Uma função é contínua num intervalo fechado $[a, b] \subset \mathbb{R}$ se for contínua em todos os pontos do intervalo $]a, b[$, contínua à direita de a e contínua à esquerda de b .

Definições correspondentes são dadas para continuidade de funções em intervalos mistos.

O conjunto de todas as funções contínuas num subconjunto $E \subset \mathbb{R}$ representa-se por $C(E)$ ou $C(E)$.

Por vezes ensina-se que uma função é contínua se o seu gráfico pode ser desenhado sem levantar o lápis do papel. Apesar de ser uma "imagem ilustrativa" de boa parte de funções contínuas, essa definição "tecnicamente" não é válida. Por exemplo, a função $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ dada pelo termo geral $f(x) = x$ é uma função contínua em qualquer ponto n do seu domínio e o seu gráfico só pode ser desenhado levantando o lápis do papel!



[Função contínua em pontos isolados]

Porque é esta função contínua? Aplicando a definição, para qualquer $\varepsilon > 0$ o valor $\delta = (1/2)\varepsilon > 0$ satisfaz a condição de continuidade em qualquer ponto $n \in \mathbb{N}$

$$|x - n| < (1/2)\varepsilon \implies (x = n) \implies |f(x) - f(n)| = 0 < \varepsilon$$

Aliás, como na demonstração nem foi preciso especificar a função f , qualquer função $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua!

A continuidade de uma função num ponto preserva o limite:

Se $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = b$ e f é uma função contínua em b então:

$$f(\lim_{x \rightarrow a} h(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(h(x))$$

A demonstração segue as seguintes linhas:

Como f é contínua em b então

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : |y - b| < \delta \implies |f(y) - f(b)| < \varepsilon$$

Por outro lado, como $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = b$ tem-se que em particular para

$$\delta > 0, \exists \delta' > 0 : |x - a| < \delta' \implies |h(x) - b| < \delta$$

Pela composição na vizinhança de a tem-se que $y = h(x)$, para algum x

Resulta que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta' > 0 : |h(x) - b| < \delta \implies |f(h(x)) - f(b)| < \varepsilon$$

Das duas condições anteriores obtém-se que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta' > 0 : |x - a| < \delta' \implies |f(h(x)) - f(b)| < \varepsilon$$

Donde segue que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(h(x)) = f(b)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(h(x)) = f(\lim_{x \rightarrow a} h(x))$$

Caracterização de continuidade:

1. Topológica: Uma função real f é contínua sse a pré-imagem de um aberto é um aberto.
2. Métrica: A função real f é contínua no ponto a se f estiver definida em algum intervalo aberto contendo a e para qualquer vizinhança V de $f(a)$ existir uma vizinhança δ de a tal que $f(V_\delta(a)) \subset V$
3. Sequencial: Uma função real f é contínua no ponto $a \in \mathbb{R}$ se para qualquer sequência (x_n) no dom f , convergente para a , a sequência $(f(x_n))$ na img f converge para $f(a)$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a)$$

Ex: A função de Dirichlet, definida como

$$f(x) = 1 \quad \text{se } x \in \mathbb{Q} \quad \text{e } f(x) = 0 \quad \text{se } x \notin \mathbb{Q}$$

é descontínua em qualquer ponto $a \in \mathbb{R}$ pois se (x_n) for uma sequência em $\mathbb{Q}$ e (y_n) for uma sequência em $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tal que $x_n \rightarrow a$ e $y_n \rightarrow a$ tem-se que $f(x_n) \rightarrow 1$ e $f(y_n) \rightarrow 0$

Como corolário do teorema da preservação de limites tem-se que se h é uma função contínua em a e f uma função contínua em $h(a)$ então a função composta $f \circ h$ é contínua em a .

A demonstração é feita da seguinte maneira: Se h é uma função contínua em a então $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = h(a)$, como f é contínua em $h(a)$, aplicando a proposição anterior obtem-se:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} (f \circ h)(x) &= \lim_{x \rightarrow a} f(h(x)) \\ &= f(\lim_{x \rightarrow a} h(x)) \\ &= f(h(a)) \\ &= (f \circ h)(a) \end{aligned}$$

logo $f \circ h$ é contínua em a

Exemplos notáveis de funções contínuas:

- Qualquer função polinomial $p(x)$ é contínua em todo $\mathbb{R}$;
- Qualquer função racional $f(x) = (p(x))/(q(x))$ é contínua em seu domínio (note que o domínio exceptua onde $q(x) = 0$);
- A função $f(x) = [n]\sqrt[n]{x}$ é contínua no seu domínio ($\mathbb{R}$ se n for ímpar e $\mathbb{R}_{>0}$ se n for par);
- As funções $f(x) = \sin(x)$ e $f(x) = \cos(x)$ são contínuas em todo $\mathbb{R}$;
- As funções $f(x) = \tan x$ é contínua no seu domínio;
- A função exponencial $f(x) = e^x$ é contínua em todo $\mathbb{R}$;
- A função logarítmica $f(x) = \ln x$ é contínua em $\mathbb{R}_{>0}$ uma vez que $\text{img}(e^x) = \mathbb{R}_{>0}$ e e^x é contínua em $\mathbb{R}$

Descontinuidade de funções

Se uma função não é contínua num ponto a do seu domínio $\text{dom} f \subseteq \mathbb{R}$, diz-se que ela é descontínua nesse ponto, isto é, existe uma vizinhança impenetrável centrada em $f(a)$, qualquer que seja a aproximação que se faça a a , no domínio:

$$\exists \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in \text{dom} f \mid |x - a| < \delta \mid f(x) - f(a) \geq \varepsilon$$

Os pontos de descontinuidade de uma função classificam-se segundo a existência ou não

de limites laterais.

Se $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função descontínua em $a \in \text{dom} f$ então diz-se que a é um ponto de descontinuidade:

1. de primeira espécie ou simples quando os limites laterais $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ existem;
2. de segunda espécie ou infinita quando pelo menos um dos limites laterais $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ não existir;

Uma descontinuidade de primeira espécie é removível quando o $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existir e é um salto quando os limites laterais existirem mas forem diferentes.

A oscilação de uma função real num subconjunto $E \subseteq \mathbb{R}$ é definida como a diferença entre o supremo e o ínfimo de f em E

$$\omega(f; E) = \sup_{x \in E} f(x) - \inf_{x \in E} f(x)$$

A oscilação $\omega(f; x)$ de uma função real f num ponto x é definida como

$$\omega(f; x) = \inf_{\varepsilon > 0} \{ \text{diam } f(V_\varepsilon(x) \cap \text{dom} f) \}$$

onde $\text{diam } f(V_\varepsilon(x) \cap \text{dom} f) = \sup \{ |a-b| : a, b \in V_\varepsilon(x) \cap \text{dom} f \}$

Alternativamente uma função real f é contínua em $x \in \text{dom} f$ sse a sua oscilação nesse ponto for nula, $\omega(f; x) = 0$

Propriedades globais de funções contínuas.

Uma função real f é uniformemente contínua num subconjunto $A \subseteq \text{dom} f$ sse a seguinte condição se verifica:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : (\forall x, y \in A, |x-y| < \delta) \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

A continuidade uniforme depende de f e do subconjunto $A \subseteq \text{dom} f$.

NOTA: Uma função contínua em todos os pontos de $A \subseteq \text{dom} f$ satisfaz a condição:

$$\forall y \in A, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

A diferença entre as duas definições reside “apenas” na troca da posição dos quantificadores $\dots \exists \delta, \forall y \dots$ (existe um δ para qualquer y) para $\dots \forall y, \exists \delta \dots$ (para qualquer y existe algum δ)

Ex: Uma função pode ser contínua em todos os pontos de $A \subseteq \text{dom} f$ sem ser uniformemente contínua em A . A função $f(x) = x^2$ é contínua em qualquer ponto de $\mathbb{R}$ mas não é uniformemente contínua em todo o $\mathbb{R}$: Tomando $x = n$ e $y = n - (\delta/2)$ então $|x-y| < \delta$ mas pode-se sempre encontrar algum δ tal que $|f(x) - f(y)| = n\delta + ((\delta/2))^2 > \varepsilon$, para qualquer δ dado, bastando para isso escolher um n suficientemente grande, o que está garantido pela propriedade arquimediana de $\mathbb{R}$.

Esta situação acontece porque $\mathbb{R}$ não é compacto.

Um subconjunto de $\mathbb{R}$ é compacto se e só se é fechado e delimitado.

(Continuidade preserva compacidade) Se $K \subseteq \mathbb{R}$ é um conjunto compacto e $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua, então $f(K)$ é um compacto e f é uniformemente contínua em K .

A monotonia de uma função define-se de forma semelhante à definida para sequências (são também funções):

$$x \leq y \implies f(x) \leq f(y) \quad \text{crescente}$$

$$x \leq y \implies f(x) \geq f(y) \quad \text{decrescente}$$

Seja $I \subseteq \mathbb{R}$ um intervalo não degenerado e $f: I \rightarrow \mathbb{R}$. Se f é uma função contínua e injectiva então f é monótona, a função inversa existe e também $f^{-1}: \text{im} f \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua e injectiva.

Alguns teoremas notáveis sobre funções contínuas:

1. (Bolzano ou valor intermédio) Se a função f é contínua no intervalo $[a, b]$, então $f(x)$ toma todos os valores entre $f(a)$ e $f(b)$
 $\forall k \in \mathbb{R} : (f(a) \leq k \leq f(b)) \implies \exists c \in [a, b] : f(c) = k$
2. ou seja, para todo o número k entre $f(a)$ e $f(b)$ existirá um número c entre a e b tal que $f(c) = k$.
3. (Weierstrass) Se $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua, então f tem pontos de máximo e de mínimo em $[a, b]$.
4. (Brower) Se $f: [a, b] \rightarrow [a, b]$ então f possui ponto fixo (um ponto em $[a, b]$ onde $f(x) = x$).
5. (Preserva conexidade): Se $I \subseteq \mathbb{R}$ é um conjunto conexo e $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ for uma função contínua, então $f(I)$ é um conexo.
6. (Preserva operações algébricas). Se f e g são funções contínuas em um ponto a , então:

a. $f+g$ é contínua em a ;

b. $f-g$ é contínua em a ;

c. $f \cdot g$ é contínua em a ;

d. (f/g) é contínua em a , desde que $g(a) \neq 0$.

O conjunto $C(\mathbb{R})$ de todas as funções contínuas em $\mathbb{R}$ é um espaço vectorial sobre $\mathbb{R}$ e é também uma álgebra (com a operação de multiplicação de funções).

Uma função real é Lipschitz contínua sse existe um número $k > 0$ tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|, \quad \forall x, y \in \text{dom} f$$

Se f é Lipschitz contínua em A então f é uniformemente contínua em A .

Uma função real é uma contração sse existe um número $\alpha \in]0, 1[$ tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq \alpha|x - y|, \quad \forall x, y \in \text{dom} f$$

(Banach) Se uma função real f é uma contração tal que $f([a, b]) \subset [a, b]$, então existe um único número $a \in [a, b]$ que é o ponto fixo de f . Mais precisamente, dado x_0 , a sequência (x_n) definida recursivamente por $x_{n+1} = f(x_n)$, $n \in \mathbb{N}$ converge para a .

Conclusão

Foi analisado o importante conceito de continuidade de funções reais de variável real. Algumas propriedades locais de funções contínuas. Caracterização alternativa de continuidade. Exemplos notáveis de funções contínuas. Descontinuidade de funções. Propriedades globais de funções contínuas (Teorema de Bolzano ou do valor intermédio)

Avaliação

Avaliação da Actividade 2.1 (com respostas)

Agrupe um mínimo de 5 e um máximo de 10 das perguntas seguintes em cada teste de avaliação de 1 hora, sem consultas.

Escolha perguntas de tipos diferentes na preparação de cada teste, mudando as parâmetros e dados de base para evitar colagens.

Cada pergunta vale entre 10% e 20%, conforme o número de perguntas seleccionadas.

1. Pergunta: Determine descontinuidades da função:

$$G(x) = \begin{cases} (x^2 - 3x - 4) / (x - 4) & \text{se } x \neq 4, \\ 2 & \text{se } x = 4 \end{cases}$$

Resposta: Descontínua em $x=4$ pois $\lim_{x \rightarrow 4} ((x^2 - 3x - 4) / (x - 4)) = \lim_{x \rightarrow 4} ((x+1)(x-4) / (x-4)) = \lim_{x \rightarrow 4} (x+1) = 5 \neq G(4) = 2$

2. Pergunta: Determine descontinuidades da função: $H(x) = ((x^2 - 5x + 4) / ((x-1)(x^2 - x - 12)))$

Resposta: Descontinuidade no ponto $x=1$ porque a função não é definida nesse ponto ($1 \notin \text{dom} f$) e no ponto $x=-3$ pois $\lim_{x \rightarrow -3} H(x)$ não existe. ($\lim_{x \rightarrow -3^-} H(x) = -\infty$ e $\lim_{x \rightarrow -3^+} H(x) = +\infty$)

3. Pergunta: Determine descontinuidades da função: $h(x) = (x+1) / (2x+5)$

Resposta: é descontínua em $x=-(5/2)$ pois não é definida e é contínua em todos os restantes números reais.

4. Pergunta: Determine descontinuidades da função:

$$f(x) = \begin{cases} (x+2)^2 & \text{se } x \leq 0, \\ x^2 + 2 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Resposta: Descontínua em $x=0$ pois $\lim_{x \rightarrow 0^-} (x+2)^2 = 4$ e $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 + 2 = 2$. É contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

5. Pergunta: Determine descontinuidades da função:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

$$f(x) = -1 \quad \text{se } x < 1$$

Resposta: é descontínua em $x=1$

6. **Pergunta:** Prove que se f for contínua em $x=a$ então $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

Resposta: As possibilidades para g ser descontínua em $x=a$ são:

porque $g(x)$ não está definida então $x=a$, então $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ também não estará definida em a .

porque o $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ não existe em $x=a$, então o $\lim_{x \rightarrow a} (f+g)(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ não existirá em a .

porque o limite de $g(a)$ existe mas não é igual a $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, então $(f+g)(a)$ estará definido em a , mas não será igual ao limite de $\lim_{x \rightarrow a} (f+g)(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$.

7. **Pergunta:** Determine a continuidade da função composta $f \circ g$

Resposta:

$$f(x) = \sqrt{x}; g(x) = 16 + x^2$$

$$(f \circ g)(x) = \sqrt{16 + x^2}$$

$$\text{dom}(f \circ g) = \{x \in \mathbb{R} : 16 + x^2 \geq 0\} = \mathbb{R}$$

A função é contínua no seu domínio

8. **Pergunta:** Determine a continuidade da função composta $f \circ g$

Resposta:

$$f(x) = (1/(x^2)); g(x) = x+3$$

$$(f \circ g)(x) = (1/((x+3)^2))$$

$$\text{dom}(f \circ g) = \{x \in \mathbb{R} : x+3 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$$

A função é contínua no seu domínio

9. **Pergunta:** Determine a continuidade da função $f(r) = ((r+3)/(r^2-4))$

Resposta:

$$f(r) = ((r+3)/(r^2-4))$$

$$\text{dom} f = \{r \in \mathbb{R} : r^2 - 4 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$$

Em $]0, 4]$ a função não é contínua em 2

Em $] -2, 2[$ a função é contínua

Em $] -\infty, -2]$ a função não é contínua em -2

Em $]2, +\infty[$ a função é contínua

Em $[-4, 4]$ a função não é contínua em $\{-2, 2\}$

10. **Pergunta:** Determine a continuidade da função composta $f \circ g$

Resposta:

$$f(x) = \sqrt{x}; g(x) = 16 - x^2$$

$$(f \circ g)(x) = \sqrt{16 - x^2}$$

$$\text{dom}(f \circ g) = \{x \in \mathbb{R} : 16 - x^2 \geq 0\} = [-4, 4]$$

A função é contínua em $[-4, 4]$

11. **Pergunta:** Determine a continuidade da função composta $f \circ g$

Resposta:

$$f(x) = [3] \sqrt{x}; g(x) = \sqrt{x+1}$$

$$(f \circ g)(x) = [3] \sqrt{\sqrt{x+1}}$$

$$\text{dom}(f \circ g) = \{x \in \mathbb{R} : x+1 \geq 0\} = [-1, +\infty[$$

A função é contínua em $[-1, +\infty[$

12. **Pergunta:** Seja $0 \leq f(x) \leq 1$ se $0 \leq x \leq 1$. Prove que se f for contínua em $[0, 1]$, existe um número $c \in [0, 1]$ tal que $f(c) = c$

Resposta:

Se $f(0) = 0$ já está provado

Se $f(1) = 1$ também fica provado

Suponha então que $f(0) > 0$ e $f(1) < 1$

Considere a função $g(x) = f(x) - x$

Como $f(0) < 0$ então $g(0) = f(x) - x < 0$

Como $f(0) > 0$ então $g(0) = f(x) - x > 0$

A função $g(x)$ é contínua em $[0, 1]$

Logo existe um $c \in [0, 1]$ onde $g(c) = 0$

Ou seja $f(c) = c$

13. **Pergunta:**

$f(x) = x^3 + x + 3$ é contínua no intervalo $[-2, -1]$

Resposta:

Os valores de $f(-2) = -7$ e $f(-1) = 1$

Logo pelo teorema de Bolzano, existe um valor $c \in [-2, -1]$ onde $f(c) = 0$

Actividade 2.2 - Derivadas de funções em R

Introdução

Aproximação linear de funções reais. Recta tangente e derivadas. Diferenciabilidade e continuidade. Regras algébricas de derivação. Derivada de funções compostas. Derivadas de funções notáveis. Derivação implícita. Taxas relacionadas. Derivadas de ordem superior. Aproximação polinomial de funções. Séries de Taylor e de MacLaurin.

Detalhes da actividade

O problema de aproximação de uma função contínua é frequentemente encontrado nas investigações científicas em diversas áreas.

Se não existem mais informações sobre uma função excepto o valor da função, $f(x_0)$, num ponto $x_0 \in [a, b]$, que informações podem ser extrapoladas sobre o valor da função numa vizinhança de x_0 ?

O método da aproximação linear, usa a recta $g(x) = \alpha x + \beta$, para dar resposta a esta questão.

Mudando para uma variável local $h = x - x_0$, na vizinhança de x_0 , escreve-se a recta que será usada para aproximar $f(x)$ na vizinhança de x_0 como $g(h) = \alpha h + b$ e impõem-se duas condições:

1. $g(0) = f(x_0)$
2. $\lim_{h \rightarrow 0} (f(x_0 + h) - g(h)) = 0$

A primeira condição é equivalente a $b = f(x_0)$

A segunda condição é equivalente a

$$\lim_{h \rightarrow 0} [(f(x_0 + h) - f(x_0)) - \alpha h] = 0$$

Resulta daqui que o declive da recta que aproxima $f(x)$ nas condições impostas por (1) e (2) é dada por

$$\alpha = \lim_{h \rightarrow 0} ((f(x_0 + h) - f(x_0)) / h)$$

Se este limite existir diz-se que $f(x)$ é diferenciável (ou derivável) no ponto x_0 , e a esse número chama-se de derivada da função $f(x)$ no ponto x_0 :

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} ((f(x_0 + h) - f(x_0)) / h)$$

ou por notações alternativas $D_x f(x_0)$ ou ainda por $(df/dx)(x_0)$.

Se a função for diferenciável em todos os pontos do interior do domínio, então existe uma função derivada

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} ((f(x + h) - f(x)) / h)$$

cujo valor em cada ponto é precisamente a derivada de $f(x)$ nesse ponto.

Nota: O termo geral da função $f(x)$ mostra o símbolo x usado para a variável independente

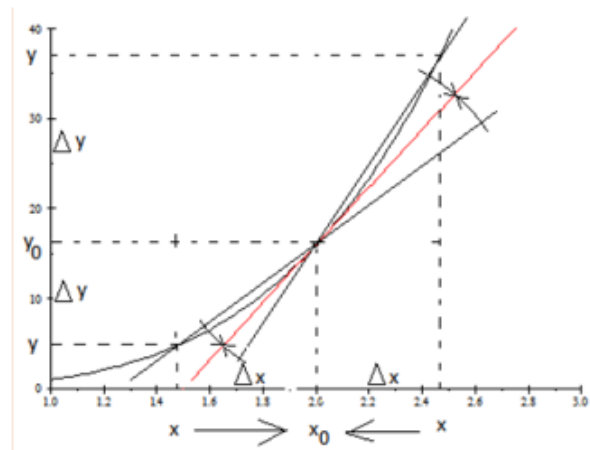
da função. Assim, $f'(x)$ calcula-se em relação a essa variável x . Se é dado $f(g)$ a derivada $f'(g)$ é calculado em relação á variável g .

Recta tangente e derivadas

O gráfico da função, $y=f(x)$ é aproximado no ponto x_0 , pela recta com declive α passando pelo ponto (x_0, y_0)

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} [\Delta y - \alpha \Delta x] = 0 \quad \text{onde } \Delta x = x - x_0, \Delta y = y - y_0 \text{ e } y_0 = f(x_0).$$

Na figura em baixo traçam-se as secantes quando x se aproxima de x_0 dos dois lados:



[Interpretação geométrica da derivada em x_0]

O declive das secantes é dado pela razão incremental $(\Delta y / \Delta x)$.

A tangente pode ser aproximada pelas sucessivas secantes, de ambos os lados de x_0 , e o declive da recta tangente é dado pelo limite:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} ((\Delta y) / (\Delta x)) = \alpha = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} ((\Delta y) / (\Delta x))$$

A recta tangente à curva no ponto x_0 possui declive igual à derivada da função $y=f(x)$ no ponto x_0 .

Logo se f é derivável em x_0 , então a aproximação linear de f numa vizinhança de x_0 é dada pela recta tangente ao gráfico, no ponto $(x_0, f(x_0))$:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

A derivada lateral é definida, no bordo de intervalos fechados $[a,b]$, como o respectivo limite lateral da razão incremental

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0^+} ((f(a+h) - f(a)) / h) \quad \text{e}$$

$$f'(b) = \lim_{h \rightarrow 0^+} ((f(b+h) - f(b)) / h)$$

Diferenciabilidade e continuidade.

Deixe f ser uma função real definida em $[a,b]$. Se f é diferenciável no ponto $x \in [a,b]$ então f é contínua nesse ponto.

A demonstração é feita da seguinte maneira: como $h \neq 0$ tem-se pela álgebra de limites que

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) - f(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} [f(x+h) - f(x)] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} [(f(x+h) - f(x)) / h] \cdot h \\ &= f'(x) \cdot 0 \\ &= 0\end{aligned}$$

Logo f é contínua.

O recíproco não é verdadeiro.

Ex: A função $f(x)=|x|$ é contínua em $x=0$ mas não é diferenciável nesse ponto.

Geométricamente, quando a curva não for "suave" e fizer um ângulo num ponto, possuirá limites laterais diferentes nesse ponto e não será diferenciável.

Regras algébricas de derivação

Deixe f e g serem funções reais definidas em $[a,b]$. Se f e g são diferenciáveis no ponto $x \in [a,b]$ então:

1. $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
2. $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
3. $((f/g))'(x) = ((f'(x)g(x) - g'(x)f(x)) / (g^2(x)))$ para $g(x) \neq 0$

A demonstração é feita da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}(1) \quad (f+g)'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} ((f+g)(x+h) - (f+g)(x)) / h \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} ((f(x+h) - f(x)) / h) + \lim_{h \rightarrow 0} ((g(x+h) - g(x)) / h) \\ &= f'(x) + g'(x)\end{aligned}$$

(2) Usando as propriedades de limites:

$$\begin{aligned}(fg)'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} ((fg)(x+h) - (fg)(x)) / h \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} ((f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x) + [f(x)g(x+h) - f(x)g(x+h)]) / h) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (([f(x+h) - f(x)]g(x+h) + f(x)[g(x+h) - g(x)]) / h) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (([f(x+h) - f(x)] / h)g(x+h) + f(x)\lim_{h \rightarrow 0} (([g(x+h) - g(x)] / h)) \\ &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\end{aligned}$$

(3) Usando as propriedades de limites:

$$\begin{aligned}
 ((f/g))'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} (((f(x+h))/(g(x+h))) - ((f(x))/(g(x))))/h \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} ((f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h) + [f(x)g(x) - f(x)g(x)])/(g(x+h)g(x)h)) \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} ((([f(x+h) - f(x)]/h)g(x) - f(x)([g(x+h) - g(x)]/h))/(g(x+h)g(x))) \\
 &= ((f'(x)g(x) - g'(x)f(x))/(g^2(x)))
 \end{aligned}$$

Derivada de funções compostas.

Deixe f ser uma função contínua no intervalo $[a,b]$, diferenciável em algum ponto $x \in [a,b]$ e g ser uma função contínua no intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ e diferenciável em $f(x)$. Se a composição $g \circ f$ é possível numa vizinhança de x então $g \circ f$ é diferenciável em x e a derivada é dada pela expressão (regra da cadeia)

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

A demonstração é feita da seguinte maneira: Como f é diferenciável em x , a aproximação linear de f na vizinhança de x , onde a composição é possível, é dada por

$$f(x+h) - f(x) = [f'(x)]h + o(h)$$

Nota: $o(h)$ representa uma classe de funções tal que para qualquer função $g(h) = o(h)$ tem-se $\lim_{h \rightarrow 0} (g(h)/h) = 0$

Usando a variável $y=f(x)$ e o símbolo s para a variável local na vizinhança de $f(x)$, tem-se

$$g(y+s) - g(y) = [g'(y) + o(s)]s$$

Daí se obtém

$$\begin{aligned}
 (g \circ f)(x+h) - (g \circ f)(x) &= g(f(x+h)) - g(f(x)) \\
 &= [g'(y) + o(s)] [f(x+h) - f(x)] \\
 &= [g'(y) + o(s)] [f'(x)h + o(h)]
 \end{aligned}$$

Então

$$((g \circ f)(x+h) - (g \circ f)(x))/h = [g'(y) + o(s)] [f'(x) + o(h)]$$

E no limite quando $h \rightarrow 0$ obtém-se

$$(g \circ f)'(x) = g'(y) \cdot f'(x)$$

que é o resultado pretendido pois $y=f(x)$.

Derivada da função inversa

Se f é uma função injectiva e diferenciável num intervalo aberto $]a,b[$, então

$$(f^{-1})'(f(x)) = (1/(f'(x))) \quad \text{para } x \in]a,b[$$

A demonstração é feita da seguinte maneira: se f é injectiva $f'(x) \neq 0$ para qualquer ponto de um intervalo aberto. Mais ainda, admite inversa $f^{-1}: \text{img} f \rightarrow \mathbb{R}$.

Então, para qualquer $x \in]a, b[$ tem-se que $x = f^{-1}(f(x))$.

Aplicando a regra da cadeia obtem-se

$$1 = (f^{-1})'(f(x)) \cdot f'(x)$$

e o resultado segue.

Ex: Calcule a derivada da função $f(x) = \ln(x^2 + 1)$. Deixe $u = (x^2 + 1)$

$$f'(u(x)) = f'(u) u'(x)$$

$$= (1/u)(2x)$$

$$= (2x)/(x^2 + 1)$$

Derivadas de funções notáveis.

A partir das regras algébricas e da regra da cadeia é possível calcular derivadas das funções simples ou compostas:

- $(c)' = 0$ onde c é uma constante
- $(x)' = 1$
- $(x^n)' = nx^{n-1}$ para $n \in \mathbb{Z}$
- $(u^n)' = nu^{n-1}u'$ onde $u(x)$ é uma função de x
- $(\sqrt{u})' = (u')/(2\sqrt{u})$ para $u(x) > 0$
- $(u^r)' = ru^{r-1}u'$ para $r \in \mathbb{Q}$ e $u(x) \neq 0$
- $(\sin u)' = u' \cos u$
- $(\cos u)' = -u' \sin u$
- $(\tan u)' = u' \sec^2 u$ no seu domínio
- $(\sec u)' = u' \tan u \sec u$
- $(\arcsin u)' = (u')/(\sqrt{1-u^2})$
- $(\arccos u)' = -(u')/(\sqrt{1-u^2})$
- $(\arctan u)' = (u')/(1+u^2)$
- $(e^x)' = e^x$ (notável propriedade)
- $(e^u)' = u' e^u$
- $(a^u)' = u' a^u \ln a$ para $a > 0$
- $(u^v)' = v' u^v \ln u + v u^{v-1} u'$ para $u(x) > 0$ e $v(x)$ uma função de x

- $(\ln x)' = (1/x)$
- $(\ln u)' = (u')/u$

Derivadas de ordem superior.

A derivação pode ser aplicada à própria função derivada para obter a segunda derivada

$$f''(x) = (f'(x))'$$

so pode ser repetido n vezes para obter a n-ésima derivada

$$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$$

Convenciona-se designar a derivada de ordem zero à própria função

$$f^{(0)}(x) = f(x)$$

Ex: calcule a segunda derivada da função $f(x) = xe^{2x}$

$$f'(x) = e^{2x} + 2xe^{2x}$$

$$f''(x) = 3e^{2x} + 4xe^{2x}$$

Derivada de funções implícitas

A equação $E(x,y)=0$ pode definir explicitamente a função $y=f(x)$ se a variável y puder ser resolvida em termos de x , ou implicitamente uma ou várias funções que satisfaçam a equação

$$E(x, f(x)) = 0$$

O operador diferencial $D\{x\}$ pode ser aplicado a ambos os lados da equação para obter $f'(t)$

$$E'(x, f(x)) = 0$$

Ex: Dada a equação $(1/x) + (1/y) = 1$, onde $x \neq 0, y \neq 0$, considere $y=f(x)$ e encontre y' .

$$(1/x) + (1/y) = 1 \Rightarrow y + x - xy = 0$$

$$(y + x - xy)' = 0$$

$$\square y' + 1 - y - xy' = 0$$

$$\square y'(1-x) - y + 1 = 0$$

$$\square y' = (y-1)/(1-x)$$

Alternativamente, a variável y podia ser resolvida em termos de x

$$(1/x) + (1/y) = 1 \Rightarrow (1/y) = ((x-1)/x) \Rightarrow y = (x/(x-1))$$

$$y' = (((x-1) - x) / ((x-1)^2)) = -(1 / ((x-1)^2))$$

os dois resultados coincidem.

Considerando as duas variáveis parametrizadas por uma mesma variável t , obtém-se uma equação paramétrica

$$E(x(t), y(t)) = c$$

Aplicando o operador diferencial $D_{\{t\}}$ obtém-se

$$E'(x(t), y(t)) = 0$$

Ex: Dada a equação $x^2 + y^2 = 16$ obtenha uma equação paramétrica e a relação entre as taxas de variação de x e de y .

$$x^2(t) + y^2(t) - 16 = 0$$

$$2x'(t) + 2y'(t) = 0 \Rightarrow x'(t) = -y'(t)$$

Este último exemplo é um tipo de problemas que se designa por taxas relacionadas.

Aproximação polinomial de funções

Uma função pode ser aproximada não só por uma recta mas por um polinómio.

(Taylor) Se uma função f e suas n derivadas existem e são contínuas em $]a, b[$, e $f^{(n)}$ existe em $]a, b[$, então numa vizinhança de $x_0 \in]a, b[$ a função pode ser representada por um polinómio e um resto

$$f(x) = f(x_0) + \left(\frac{f'(x_0)}{1!} \right) (x - x_0) + \left(\frac{f''(x_0)}{2!} \right) (x - x_0)^2 + \dots + \left(\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \right) (x - x_0)^n + R_{\{n\}}(\xi)$$

onde $\xi \in V_{\{h\}}(x_0)$ e $h = x - x_0$ é uma variável local.

O polinómio na aproximação chama-se polinómio de Taylor de n -ésimo grau

$$P_{\{n\}}(x) = f(x_0) + \left(\frac{f'(x_0)}{1!} \right) (x - x_0) + \left(\frac{f''(x_0)}{2!} \right) (x - x_0)^2 + \dots + \left(\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \right) (x - x_0)^n$$

E o resto na forma de Lagrange

$$R_{\{n\}}(x) = \left(\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \right) (x - x_0)^{n+1} \text{ onde } \xi \text{ está entre } x \text{ e } x_0$$

O caso especial quando aproximação é feita na vizinhança de $x=0$ é chamado de polinómio de Maclaurin

$$P_{\{n\}}(x) = f(0) + \left(\frac{f'(0)}{1!} \right) x + \left(\frac{f''(0)}{2!} \right) x^2 + \dots + \left(\frac{f^{(n)}(0)}{n!} \right) x^n$$

Ex: Calcule o polinómio de Taylor de grau 3, da função $f(x) = e^x$, na vizinhança de $x_0 = 0$. Como $f^{(n)}(x) = e^x$ para qualquer n , tem-se

$$\begin{aligned} P_{\{n\}}(x) &= e^0 + \left(\frac{e^0}{1!} \right) x + \left(\frac{e^0}{2!} \right) x^2 + \left(\frac{e^0}{3!} \right) x^3 \\ &= 1 + x + \left(\frac{x^2}{2} \right) + \left(\frac{x^3}{6} \right) \end{aligned}$$

Conclusão

Foi analisada a aproximação linear de funções reais. Recta tangente e derivadas. Diferenciabilidade e continuidade. Regras algébricas de derivação. Derivada de funções

compostas. Derivadas de funções notáveis. Derivação implícita. Taxas relacionadas. Derivadas de ordem superior. Aproximação polinomial de funções. Séries de Taylor e de MacLaurin.

Avaliação

Agrupe um mínimo de 5 e um máximo de 10 das perguntas seguintes em cada teste de avaliação de 1 hora, sem consultas.

Escolha perguntas-tipo diferentes na preparação de cada teste, mudando as parâmetros e dados de base para evitar colagens.

Cada pergunta vale entre 10% e 20%, conforme o número de perguntas seleccionadas.

1. **Pergunta:** Calcule a derivada da função: $y=x^2+4$

Resposta:

$$y' = 2x$$

2. **Pergunta:** Calcule a derivada da função: $y=1-x^3$

Resposta:

$$y' = -3x^2$$

3. **Pergunta:** Encontre a equação da recta tangente ao gráfico da função, no ponto dado: $y=2x-x^3$, $y(-2)=4$

Resposta:

$$y' = 2-3x^2$$

$$y'(-2) = -10$$

$$y = 4 - 10(x+2) \Rightarrow y = -10x - 16$$

4. **Pergunta:** Calcule a derivada da função, aplicando a definição: $y=8-5x$

Resposta:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{(8-5(x+h)) - (8-5x)}{h} \right) &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{8-5x-5h-8+5x}{h} \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{-5h}{h} \right) \\ &= -5 \end{aligned}$$

5. **Pergunta:** Calcule a derivada da função: $y=x^3$

Resposta: $(d/(dx))(x^3) = 3x^2$

6. **Pergunta:** Calcule a derivada da função: $y=\sqrt{3x+5}$

Resposta: $D_{\{x\}}(\sqrt{3x+5}) = (3/(2\sqrt{3x+5}))$

7. **Pergunta:** Calcule a derivada da função:

Resposta: $f'(x) = \lim_{\square x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x+\square x) - f(x)}{(\square x)} \right)$

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\left(\frac{4}{5(x+h)} \right) - \left(\frac{4}{5x} \right)}{h} \right) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(20x - 20x - 20h) / (h(5x+5h)5x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(-20)}{(5x+5h)5x} \\ &= -\frac{20}{(5x)^2} \\ f'(2) &= -\frac{1}{5} \end{aligned}$$

8. **Pergunta:** Calcule a derivada da função, aplicando a definição:

$$f(x) = (x^2 - x + 4)$$

Resposta: $f'(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f(x) - f(x_0))}{(x - x_0)}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{(x^2 - x + 4) - (x_0^2 - x_0 + 4)}{(x - x_0)} \right) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x^2 - x_0^2 - x + x_0)}{(x - x_0)} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{((x - x_0)(x + x_0) - (x - x_0))}{(x - x_0)} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} (x + x_0) - 1 \\ &= 2x_0 - 1 \\ f'(4) &= 7 \end{aligned}$$

9. **Pergunta:** Calcule a derivada da função: $y = (1 / (\sqrt{x-1}))$

Resposta: $y' = -(1 / (2\sqrt{x-1}(x-1)))$

10. **Pergunta:** Se $f(a+b) = f(a) \square f(b)$, $f(0) = 1$ e $f'(0)$ existe para qualquer $a, b \in \text{dom} f$ então $f'(x) = f'(0) \square f'(x)$

Resposta:

Para provar que $f'(x)$ existe para todo x note que qualquer número pode ser escrito como $x = x + 0$

$$\text{Então } f(x+0) = f(x) \square f(0) = f(x) \square 1 = f(x)$$

$$\text{Para provar que } f'(x) = f'(0) \square f'(x)$$

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{(f(x+h) - f(x))}{h} \right) &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{(f(x) f(h) - f(x))}{h} \right) \\ &= f(x) \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{(f(0+h) - f(0))}{h} \right) \\ &= f(x) \square f'(0) \end{aligned}$$

11. **Pergunta:** Verifique se é contínua e calcule a derivada à esquerda e à direita da função, no ponto indicado para ver se é diferenciável:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{se } x < 2 \\ \sqrt{x-2} & \text{se } 2 \leq x \end{cases}; x_0 = 2$$

Resposta:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x < 2, \text{ e } (1/(2\sqrt{x-2})) & \text{se } 2 < x \end{cases} \text{ não está definida em } x=2$$

12. **Pergunta:** Verifique se é contínua e calcule a derivada à esquerda e à direita da função, no ponto indicado para ver se é diferenciável: $f(x) = (x-2)^2$; $x=2$

Resposta:

A função não está definida em $x=2$

$$f'(x) = -2(x-2)^3$$

A função derivada também não está definida em $x=2$

13. **Pergunta:** Verifique se é contínua e calcule a derivada à esquerda e à direita da função, no ponto indicado para ver se é diferenciável:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x < 1, \\ ax+b & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1 = a+b = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x < 1, \\ a & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

$$f'(1) = 2 = a = f'(1)$$

Logo $a=2$ e $b=-1$

14. **Pergunta:** Calcule a derivada da função: $g(x) = 8-3x$

Resposta:

$$g'(x) = -3$$

15. **Pergunta:** Calcule a derivada da função: $g(x) = x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 7x$

Resposta:

$$g'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 10x - 7$$

16. **Pergunta:** Calcule a derivada da função: $f(x) = x^4 - 5x^3 + 4x^2$

Resposta:

$$f'(x) = 4x^3 - 15x^2 + 8x$$

17. **Pergunta:** Calcule a derivada da função: $g(x) = (2x^2+5)(4x-1)$

Resposta:

$$g'(x) = 4x(4x-1) + 4(2x^2+5) = 24x^2 - 4x + 20$$

18. **Pergunta:** Calcule a derivada da função: $f(x) = (4-3x-x^2)/(x-2)$

$$\text{Resposta: } (d/(dx))((4-3x-x^2)/(x-2)) = ((-2x-3)(x-2) - (4-3x-x^2))/(x-2)^2$$

$$= (-x^2 + 4x + 2)/(x-2)^2$$

19. **Pergunta:** Calcule a derivada da função: $f(s) = (s^2-a^2)/(s^2+a^2)$

$$\text{Resposta: } (d/(ds))((s^2-a^2)/(s^2+a^2)) = ((2s)(s^2+a^2) - (2s)(s^2-a^2))/(s^2+a^2)^2$$

$$((s^2 + a^2)^2)$$

$$= 4a^2 (s / ((a^2 + s^2)^2))$$

20.- Pergunta: Calcule a equação da recta tangente ao gráfico da função $y=x^3-6x$, que seja perpendicular a $x-2y+6=0$

Resposta:

A perpendicular a $x-2y+6=0 \Rightarrow y=(x/2)-3$ é a recta com declive $-(1/(1/2))=-2$

Quais os pontos em que a recta possui esse declive?

$$y'=4x^3-6=-2 \Rightarrow x=1$$

$$y(1)=-5$$

$$y=-5-2(x-1)=-2x-3$$

21. Pergunta: Calcule a derivada da função: $y=\sin x+\cos x$

Resposta: $(\sin x+\cos x)'=\cos x-\sin x$

22. Pergunta: Calcule a derivada da função: $g(y)=3\sin y-y\cos y$

Resposta:

$$g'(y)=3\cos y-(\cos y-y\sin y)=2\cos y+y\sin y$$

23. Pergunta: Calcule a derivada da função: $f(t)=\sin t \tan t$

Resposta: $f'(x)=\cos t \tan t + \sin t \sec^2 t$

24. Pergunta: Calcule a derivada da função: $y=(\sin t)/t$

Resposta: $(d/(dt))((\sin t)/t)=(t\cos t-\sin t)/(t^2)$

25. Pergunta: Calcule a derivada da função: $z=(\tan y+1)/(\tan y-1)$

Resposta: $D_y((\tan y+1)/(\tan y-1))=((\sec^2 y(\tan y-1)-(\tan y+1)\sec^2 y)/((\tan y-1)^2))=-2((\tan^2 y+1)/((\tan y-1)^2))$

26. Pergunta: Calcule a derivada da função, no ponto indicado: $f(x)=x^2\cos x-\sin x$

Resposta:

$$f'(x)=(2x-1)\cos x-x^2\sin x$$

$$f'(0)=(0-1)\cos 0-0^2\sin 0=-1$$

27. Pergunta: Calcule a derivada da função, no ponto indicado: $f(x)=(1/(\cot x-1))$

Resposta:

$$f'(x)=((-csc^2 x)/(\cot x-1))$$

$$f'((3\pi)/4)=((-csc^2((3\pi)/4))/(\cot((3\pi)/4)-1))=1$$

28. **Pergunta:** Calcule a equação da recta tangente ao gráfico da função, no ponto indicado: $f(x) = \sec x$

Resposta:

$$f'(x) = \tan x \sec x$$

(a) $x = \pi/4$

$$f'(\pi/4) = \tan(\pi/4) \sec(\pi/4) = \sqrt{2}$$

$$f(\pi/4) = \sec(\pi/4) = \sqrt{2}$$

$$y = \sqrt{2} + \sqrt{2}(x - (\pi/4))$$

(b) $x = -\pi/4$

$$f'(-\pi/4) = \tan(-\pi/4) \sec(-\pi/4) = -\sqrt{2}$$

$$f(-\pi/4) = \sec(-\pi/4) = \sqrt{2}$$

$$y = \sqrt{2} - \sqrt{2}(x + (\pi/4))$$

(c) $x = (3\pi)/4$

$$f'((3\pi)/4) = \tan((3\pi)/4) \sec((3\pi)/4) = \sqrt{2}$$

$$f((3\pi)/4) = \sec((3\pi)/4) = -\sqrt{2}$$

$$y = -\sqrt{2} + \sqrt{2}(x - ((3\pi)/4))$$

29. **Pergunta:** Calcule a derivada da função: $y = (x^3 - 3x^2 + 1)^3$

Resposta: $(d/(dx))(x^3 - 3x^2 + 1)^3 = -9x(x - 2)((x^3 - 3x^2 + 1)^2)$

30. **Pergunta:** Calcule a derivada da função: $y = (\sec^2 x)$

Resposta: $(d/(dx))(\sec^2 x) = (2/(\cos^3 x)) \sin x$

31. **Pergunta:** Calcule a derivada da função: $y = (4x^2 + 7)^2 (2x^3 + 1)^3$

Resposta: $(d/(dx))(4x^2 + 7)^2 (2x^3 + 1)^3 =$
 $8x(2x^3 + 1)^3 (64x^2 + 196x^3 + 8x^2 + 147x + 14)$

32. **Pergunta:** Calcule a derivada da função: $y = (x + 3)^3 (5x + 1) (3x^2 - 4)$

Resposta: $(d/(dx))(x + 3)^3 (5x + 1) (3x^2 - 4) = 2(x + 3)^2 (45x^3 + 75x^2 - 31x - 36)$

33. **Pergunta:** Calcule a derivada da função: $y = (\tan x^2)$

Resposta: $(d/(dx))(\tan x^2) = 2x(\tan^2 x^2 + 1)$

34. **Pergunta:** Calcule a derivada da função: $y = (\sqrt{2 - 3x^2})$

Resposta: $(d/(dx))(\sqrt{2 - 3x^2}) = -3(x/(\sqrt{2 - 3x^2}))$

35. **Pergunta:** Calcule a derivada da função: $y = (\sqrt[3]{3 \sin x})$

Resposta: $(d/(dx))(\sqrt[3]{3 \sin x}) = (1/2)\sqrt[3]{3}((\cos x)/(\sqrt[3]{\sin x}))$

36. **Pergunta:** Calcule a derivada da função: $y = ((\sqrt{x-1}) / (\sqrt{x+1}))$

Resposta:

$$(d/(dx)) ((\sqrt{x-1}) / (\sqrt{x+1})) = (1 / (\sqrt{x-1} (x+1)^{(3/2)}))$$

37. **Pergunta:** Calcule a derivada da função: $y = (\sqrt{x^2-5}) [3] \sqrt{x^2+3}$

Resposta: $(d/(dx)) (\sqrt{x^2-5}) [3] \sqrt{x^2+3} = (1/3) (x / ((x^2+3) \sqrt{x^2-5})) [3] \sqrt{x^2+3} (5x^2-1)$

38. **Pergunta:** Calcule a derivada da função: $y = (\sqrt{((\cos x - 1) / (\sin x))})$

Resposta: $(d/(dx)) (\sqrt{((\cos x - 1) / (\sin x))}) = (1 / (2 (\sin^2 x) \sqrt{(1 / (\sin x)) (\cos x - 1))}) (\cos x - 1)$

39. **Pergunta:** Calcule a derivada da função: $y = (\sqrt{x} \tan \sqrt{(1/x)})$

Resposta: $(d/(dx)) (\sqrt{x} \tan \sqrt{(1/x)}) = -(1 / (2 \sqrt{(1/x)})) ((1 / (x^{(3/2)})) \tan^2 \sqrt{(1/x)} + (1 / (x^{(3/2)})) - (1 / (\sqrt{x})) (\tan \sqrt{(1/x)}) \sqrt{(1/x)})$

40. **Pergunta:** Calcule a derivada implícita da equação: $x^2 + y^2 - 7xy = 0$

Resposta:

$$2x - 7y - 7xy' + 2yy' = 0 \Rightarrow y' = ((7y - 2x) / (2y - 7x))$$

41. **Pergunta:** Calcule a derivada implícita da equação: $(x / (\sqrt{y})) - 4y - x = 0$

Resposta:

$$-4y' + (1 / (\sqrt{y})) - (1/2) (x / (y^{(3/2)})) y' - 1 = 0 \Rightarrow y' = -2y ((\sqrt{y} - 1) / (x + 8y^{(3/2)}))$$

42. **Pergunta:** Calcule a derivada implícita da equação: $x - \sin(x+y) = 0$

Resposta:

$$1 - (\cos(x+y)) (y' + 1) = 0 \Rightarrow y' = (1 / (\cos(x+y))) - 1$$

43. **Pergunta:** Calcule a derivada implícita da equação: $\csc(x-y) + \sec(x+y) - x = 0$

Resposta:

$$((\cos(x-y)) / (\sin^2(x-y))) y' - ((\cos(x-y)) / (\sin^2(x-y))) + (1 / (\cos^2(x+y))) (\sin(x+y)) y' + (1 / (\cos^2(x+y))) (\sin(x+y)) - 1 = 0$$

$$y' = (((\cos(x-y)) / (\sin^2(x-y))) + 1 - (1 / (\cos^2(x+y))) (\sin(x+y))) / ((1 / (\cos^2(x+y))) (\sin(x+y)) ((\cos(x-y)) / (\sin^2(x-y))))$$

44. **Pergunta:** Calcule a derivada implícita da equação: $y\sqrt{x} - x\sqrt{y} = 9$

Resposta:

$$\sqrt{x} - \sqrt{y} x' - (1 / (2\sqrt{y})) x + (1/2) (y / (\sqrt{x})) x' = 0$$

$$x' = ((1 / (2\sqrt{y})) x - \sqrt{x}) / ((1/2) (y / (\sqrt{x})) - \sqrt{y})$$

45. **Pergunta:** Mostre que a equação da recta tangente a $x^2+y^2=r^2$ é normal e passa pelo centro da circunferencia.

Resposta:

$$2x+2yy'=0 \Rightarrow y' = -(x/y)$$

No ponto (x_0, y_0) tem-se $y' = -(x_0/y_0)$ é o declive da recta tangente

e a equação da recta tangente é $y = y_0 - ((x_0)/(y_0))(x - x_0)$
 $(x - x_0) - y_0 y + x_0 x + (y_0^2 + (x_0^2)/(y_0^2))x_0 = 0$

A recta que passa pelo centro e pelo ponto (x_0, y_0) da circunferencia possui declive $((y_0)/(x_0))$

Logo a respectiva equação é $y = ((y_0)/(x_0))x - xy_0/x_0 = 0$

Duas rectas $Ax+By+C=0$ e $A'x+B'y+C'=0$ são perpendiculares sse $AA'+BB'=0$ (ou equivalentemente, se os declives forem relacionados pela equação $-(A/B) = -((1/(-(A')/(B')))) \Rightarrow (A/B) = ((B')/(-A')) \Rightarrow AA'+BB'=0$)

Ambas as condições são satisfeitas pois:

$$-y_0^2 x_0 + x_0^2 y_0 = 0$$

46. **Pergunta:** Calcule o polinómio de Taylor de n-ésimo grau com resto de Lagrange: $f(x) = \tan x; x_0 = 0; n = 4$

Resposta:

$$(d/(dx))(\tan x) = \tan^2 x + 1; f'(0) = 1$$

$$((d^2)/(dx^2))(\tan x) = 2(\tan x)(\tan^2 x + 1); f''(0) = 0$$

$$((d^3)/(dx^3))(\tan x) = 6\tan^3 x + 8\tan^2 x + 2; f'''(0) = 2$$

$$((d^4)/(dx^4))(\tan x) = 8(\tan x)(3\tan^3 x + 5\tan^2 x + 2); f^{(iv)}(0) = 0$$

$$((d^5)/(dx^5))(\tan x) = 120\tan^4 x + 240\tan^3 x + 136\tan^2 x + 16; f^{(v)}(0) = 16$$

$$f(x) = x + (1/3)x^3 + ((120\tan^4 \xi + 240\tan^3 \xi + 136\tan^2 \xi + 16)/(720))x^5$$

47. **Pergunta:** Prove as seguintes afirmações:

Resposta:

$$(x)' = 1$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} ((x+h-x)/h) = 1$$

48. **Pergunta:** Prove as seguintes afirmações:

Resposta: $(u^n)' = nu^{n-1}u'$ onde $u(x)$ é uma função de x

Pelo problema 3 e regra da cadeia

49. **Pergunta:** Prove as seguintes afirmações:

Resposta: $(\sqrt{u})' = (u') / (2\sqrt{u})$ para $u(x) \geq 0$

Por um dos problemas anteriores

$$\begin{aligned} (u^{1/2})' &= (1/2) u^{-1/2} u' \\ &= (u') / (2\sqrt{u}) \end{aligned}$$

Actividade 2.3 - Extremos de funções em R

Introdução

Extremos locais e globais. Teoremas de Fermat, Weierstrass (revisita), Cauchy, Rolle, Lagrange e l'Hospital. Monotonia de funções e concavidade de gráficos. Traçado de gráfico de funções. Diferencial de uma função, notação de Leibniz. Primeiras noções de equações diferenciais de 1ª ordem.

Detalhes da atividade

Diferenciabilidade e extremos locais

Uma função f tem um extremo local (ou relativo) num ponto $c \in \text{dom} f$ se existir alguma vizinhança $V_{\varepsilon}(c)$ onde $f(c) \geq f(x)$, (máximo local), ou $f(c) \leq f(x)$ (mínimo local), para qualquer $x \in V_{\varepsilon}(c)$.

Uma função f tem um extremo global (ou absoluto) num intervalo s se, existir algum ponto c nesse intervalo tal que $f(c) \geq f(x)$ (máximo global), ou $f(c) \leq f(x)$, (mínimo global), para qualquer x no intervalo.

O teorema de Fermat estabelece que nos extremos locais, a derivada, se existir, é nula:

(Fermat) Seja f uma função definida para todos os valores de $x \in]a, b[$ com um extremo local em $c \in]a, b[$. Se $f'(c)$ existir então $f'(c) = 0$.

A demonstração é feita da seguinte maneira: deixe $c \in]a, b[$ ser um máximo local (mutatis mutandi para mínimo local).

Então $\exists \delta > 0, |x - c| < \delta \Rightarrow f(x) \leq f(c)$, logo $f(x) - f(c) \leq 0$

Para $x \rightarrow c^-$ tem-se que $0 < x - c < \delta$ logo

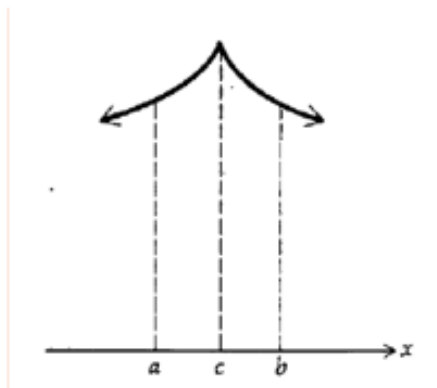
$$\lim_{x \rightarrow c^-} ((f(x) - f(c)) / (x - c)) \leq 0$$

Para $x \rightarrow c^+$ tem-se que $0 < c - x < \delta$ logo

$$\lim_{x \rightarrow c^+} ((f(x) - f(c)) / (x - c)) \geq 0$$

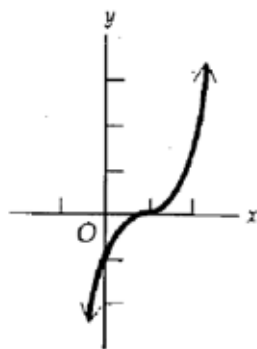
Resulta que se $f'(c)$ existir então os dois limites laterais tem de ser iguais, logo $\lim_{x \rightarrow c} ((f(x) - f(c)) / (x - c)) = 0$ e por consequência, $f'(c) = 0$

Note que a derivada pode não existir num ponto onde a função f possua um extremo local [ver a figura em baixo], (mas se existir, tem necessariamente que ser nulo nesse ponto.

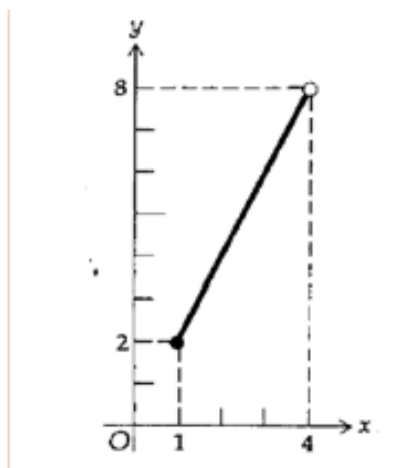


O recíproco do teorema de Fermat não é válido como se pode ver pelo seguinte exemplo:

Ex: A função $f(x)=(x-1)^3$ possui mas não possui um extremo local no ponto $x=1$



Ex: Determine os extremos globais (ou absolutos) da função $f(x)=2x$ no intervalo $[1,4[$. O valor mínimo global de f no intervalo é $f(1)=2$ e a função não possui valor máximo global pois $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)=8$ e $f(x) < 8$ para $x \in [1, 4[$ mas não existe qualquer ponto no intervalo $[1,4[$ onde o valor da função é 8.



Um ponto crítico da função f é um ponto $c \in \text{dom} f$ tal que $f'(c)=0$ ou $f'(c)$ não exista.

Ex: Encontre os pontos críticos da função $g(x) = x^{6/5} - 12x^{1/5}$. Calculando a derivada

$$g'(x) = (6/5)x^{1/5} - (12/5)x^{-4/5} = 0 \Rightarrow x = 2$$

O ponto $x=0$ pertence a $\text{dom} g$ mas não pertence a $\text{dom} g'$, logo, os pontos críticos são 0 e 2.

Pelo teorema de Weierstrass, se uma função é contínua no intervalo fechado $[a,b]$, então f possui ambos os extremos globais nesse intervalo.

Para encontrar os extremos globais duma função, encontra-se o conjunto dos valores da função nos pontos críticos e nos bordos reais do domínio. O máximo e o mínimo desse conjunto são os valores procurados:

Ex: Encontre os extremos absolutos da função $h(x) = (x-3)^2 - 1$ no intervalo $[2,5]$. Como a função é contínua no intervalo fechado $[2,5]$ o teorema pode ser aplicado. Os pontos críticos são $h'(x) = 0 \Rightarrow 2(x-3) = 0 \Rightarrow x = 3$. Os valores da função nos pontos críticos no intervalo é $f(3) = -1$ e nos bordos do intervalo é $f(2) = 0$ e $f(5) = 3$. Os valores extremos da função são $\max\{-1, 0, 3\} = 3$ e $\min\{-1, 0, 3\} = -1$, que correspondem aos pontos 5 e 3 respectivamente.

Teoremas de Rolle, Lagrange, Cauchy e l'Hospital

(Rolle) Se f for uma função contínua no intervalo $[a,b]$ e diferenciável em $]a,b[$, tal que $f(a) = f(b)$, então existe $c \in]a,b[$ tal que $f'(c) = 0$.

A demonstração é feita da seguinte maneira: se f for constante, qualquer ponto interior de $]a,b[$ satisfaz a proposição.

Se f não for constante, pelo teorema de Weierstrass, f possui ambos os extremos globais em $[a,b]$ e pelo menos um desses extremos é obtido num ponto interior $c \in]a,b[$, onde $f(c) \neq f(a) = f(b)$, pois f não é constante.

Como f é diferenciável em $]a,b[$, a derivada existe no ponto c , logo, pelo teorema de Fermat, $f'(c) = 0$

Ex: A função $f(x) = \sin 2x$ no intervalo $[0, (\pi/2)]$ satisfaz as condições do teorema de Rolle pois $\sin 0 = 0$, $\sin 2(\pi/2) = 0$ e $f(x)$ é diferenciável em $]0, (\pi/2)[$, ou seja, $f'(x) = 2\cos 2x$ existe no intervalo $]0, (\pi/2)[$. Logo em algum ponto de $]0, (\pi/2)[$ tem-se que $f'(x) = 0$. Resolvendo a equação $2\cos 2x = 0$, obtêm-se $2x = (\pi/2) \Rightarrow x = (\pi/4)$.

(Lagrange ou valor médio) Se f for uma função contínua no intervalo $[a,b]$ e diferenciável em $]a,b[$, então existe $c \in]a,b[$ tal que

$$f'(c) = (f(b) - f(a)) / (b - a)$$

A demonstração é feita da seguinte maneira: Considere a função auxiliar

$$h(x) = [b-a] f(x) - [f(b) - f(a)] x$$

Verifica-se que $h(a) = h(b) = b f(a) - a f(b)$ e $h(x)$ satisfaz as condições do teorema de Rolle, logo existe $c \in]a,b[$ tal que $h'(c) = 0$.

Como

$$h'(x) = f'(x) - ((f(b) - f(a)) / (b-a))$$

então

$$f'(c) - ((f(b) - f(a)) / (b-a)) = 0$$

Ex: A função $f(x) = x^{2/3}$ no intervalo $[0,1]$ satisfaz as condições do teorema de Lagrange pois é contínua em $[0,1]$ e diferenciável em $]0,1[$, ou seja, $f'(x) = (2/3)x^{-1/3}$ está definida em $]0,1[$. Tem-se que

$$((f(b) - f(a)) / (b-a)) = ((1-0) / (1-0)) = 1$$

Então existe um número $c \in]a, b[$ tal que $f'(c) = 1$

$$(2/3)c^{-1/3} = 1 \Rightarrow c = (2/3)^3$$

(Cauchy) Se f, g forem contínuas no intervalo $[a, b]$, diferenciáveis em $]a, b[$ e g' não se anula em $]a, b[$, então $g(a) \neq g(b)$ e existe $c \in]a, b[$ tal que

$$((f(b) - f(a)) / (g(b) - g(a))) = (f'(c) / (g'(c)))$$

A demonstração é feita da seguinte maneira: se $g(a) = g(b)$ então pelo teorema de Rolle g' se anulava em algum ponto de $]a, b[$, contrariando a hipótese, logo $g(a) \neq g(b)$.

Considere a função auxiliar

$$h(x) = [g(b) - g(a)] f(x) - [f(b) - f(a)] g(x)$$

Verifica-se que $h(a) = h(b) = g(b)f(a) - f(b)g(a)$ e $h(x)$ satisfaz as condições do teorema de Rolle, logo existe $c \in]a, b[$ tal que $h'(c) = 0$.

Então

$$h'(c) = [g(b) - g(a)] f'(c) - [f(b) - f(a)] g'(c) = 0$$

Logo

$$(f'(c) / (g'(c))) = ((f(b) - f(a)) / (g(b) - g(a)))$$

(l'Hospital (0/0)) Se f, g forem diferenciáveis em $]a, b[$, g' não se anula em $]a, b[$, $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = 0$, então $\lim_{x \rightarrow a^+} (f(x) / (g(x))) = \lim_{x \rightarrow a^+} (f'(x) / (g'(x)))$, se existir.

A demonstração é feita da seguinte maneira: como $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = 0$ pode-se estender f, g por continuidade e obter $f(a) = g(a) = 0$.

Então f, g serão contínuas no intervalo $[a, b]$

Se $x \in]a, b[$ pode-se aplicar o teorema de Cauchy a f, g no intervalo $[a, x]$ e concluir que existe $y \in]a, x[$ tal que

$$(f(x) / (g(x))) = ((f(x) - f(a)) / (g(x) - g(a))) = (f'(y) / (g'(y)))$$

Como $y \rightarrow a$ quando $x \rightarrow a$, obtém-se

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f'(x)}{g'(x)} \right)$$

Nota: O teorema se aplica também (mutatis mutandi) para se $x \rightarrow b$, para $x \rightarrow c$ a, b , para $x \rightarrow +\infty$ ou para $x \rightarrow -\infty$.

Como corolário, se f, g forem funções diferenciáveis em $]a, +\infty[$, onde $a > 0$, g não se anula em $]a, +\infty[$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$, então $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f'(x)}{g'(x)} \right)$, se existir.

(l'Hospital $(+\infty)/(+\infty)$) Se f, g forem diferenciáveis em $]a, b[$, g não se anula em $]a, b[$, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$, então $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f'(x)}{g'(x)} \right)$, se existir.

Nota: O teorema se aplica também (mutatis mutandi) para se $x \rightarrow b$, para $x \rightarrow c$ a, b , para $x \rightarrow +\infty$ ou para $x \rightarrow -\infty$.

Monotonia de funções e concavidade de gráficos

(Monotonia) Seja f uma função contínua num intervalo I e diferenciável no interior de I . Se para qualquer $x \in \text{int}(I)$:

- $f'(x) \geq 0$, então f é crescente em I ;
- $f'(x) > 0$, então f é estritamente crescente em I ;
- $f'(x) \leq 0$, então f é decrescente em I ;
- $f'(x) < 0$, então f é estritamente decrescente em I ;
- $f'(x) = 0$, então f é constante em I ;

A demonstração é feita da seguinte maneira: no primeiro caso, $f'(x) \geq 0$ para qualquer $x \in \text{int}(I)$.

Deixe $a, b \in I$ tal que $a < b$, ou seja $b - a > 0$

Pelo teorema de valor médio aplicado à restrição $f|_{[a, b]}$ existe $c \in]a, b[$ tal que

$$\left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right) = f'(c) \geq 0$$

Como $b - a > 0$, resulta que $f(b) - f(a) \geq 0$, ou seja $f(b) \geq f(a)$, logo f é crescente.

Os outros casos são demonstrados de maneira semelhante.

O valor da derivada de uma função contínua só pode mudar de sinal nos pontos críticos.

Num ponto crítico c , onde $f'(c)$ não existe ou $f'(c) = 0$, pode ser feito o teste da primeira derivada para determinar se é um máximo ou um mínimo local:

Teste da primeira derivada para extremos locais:

- se $f'(x) > 0$ para todos os valores de algum intervalo $]c - \delta, c[$ e $f'(x) < 0$ para todos os valores de algum intervalo $]c, c + \delta[$, então f terá um máximo local em c ;

- se $f'(x) < 0$ para todos os valores de algum intervalo $]c-\delta, c[$ e $f'(x) > 0$ para todos os valores de algum intervalo $]c, c+\delta[$, então f terá um mínimo local em c ;

Ex: Dada a função $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$, a derivada existe para todo o $\mathbb{R}$. Os pontos críticos são obtidos fazendo

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 12x + 9 \\ &= 3(x-3)(x-1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Logo $x=3$ e $x=1$ são os pontos críticos.

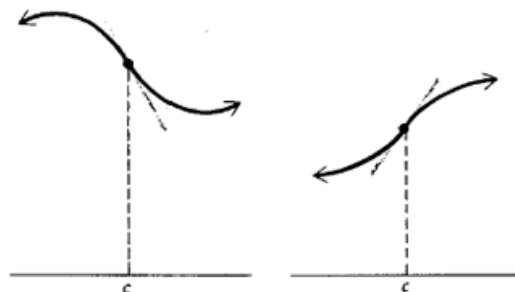
x		1		3	
f(x)		5		1	
f'(x)	+	0	-	0	+
f''(x)	cresce	max. loc.	decresce	min. loc.	cresce

O sinal da segunda derivada informa sobre a concavidade do gráfico: o gráfico de uma função f diferenciável em algum intervalo aberto contendo c é côncavo para cima em $(c, f(c))$ se $f''(x) > 0$ e é côncavo para baixo em $(c, f(c))$ se $f''(x) < 0$

O recíproco não é verdadeiro, por exemplo, no ponto $(0,0)$ o gráfico da função $f(x) = x^3$ é côncavo para cima mas $f''(x) = 0$.

O ponto $(c, f(c))$ é um ponto de inflexão do gráfico de f se existir uma recta tangente nesse ponto e uma vizinhança $V_{\delta}(c)$, tal que se $x \in V_{\delta}(c)$, então:

- $f''(x) < 0$ se $x < c$ e $f''(x) > 0$ se $x > c$ ou
- $f''(x) > 0$ se $x < c$ e $f''(x) < 0$ se $x > c$ ou



Se a função f for diferenciável em $]a, b[$, $c \in]a, b[$, e $(c, f(c))$ for um ponto de inflexão do gráfico de f , se $f''(x)$ existe então $f''(c) = 0$

A demonstração é feita aplicando o teorema de Fermat a $f'(x)$.

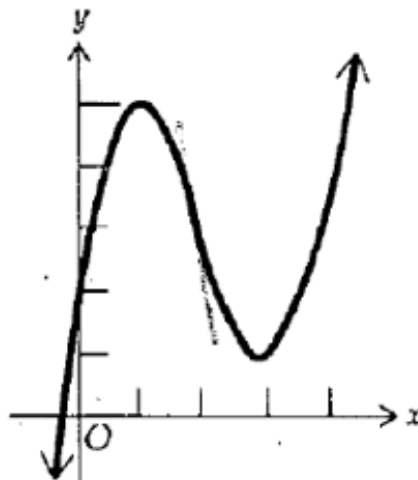
O recíproco não é verdadeiro como se pode ver no ponto $(0,0)$ do gráfico da função $f(x) = x^3$.

Ex: O ponto de inflexão do exemplo obtem-se

$$f''(x) = 6x - 12 = 0$$

Logo o ponto de inflexão é (2,3). O resultado resume-se na tabela

x		1		2		3	
$f(x)$		5		3		1	
$f'(x)$	+	0	-	-3	-	0	+
$f''(x)$	-	-	-	0	+	+	+
$f(x)$	cres.	máx. loc.	decre.	inflex.	decre.	min. loc.	cres.



Teste da segunda derivada para extremos locais: Deixe $f'(c) = 0$ e $f'(x)$ existir numa vizinhança de c . Se $f''(x)$ existir e

- $f''(c) > 0$ então f tem um mínimo local em c
- $f''(c) < 0$ então f tem um máximo local em c

Traçado de gráfico de funções

O procedimento para o estudo do gráfico de uma função é seguinte:

1. Determine o domínio e os bordos do domínio de f
2. Encontre simetrias e translações
3. Encontre os zeros e o sinal de f entre zeros ou bordos
4. Encontre as assíntotas (valores limites nos bordos do domínio)
5. Calcule a primeira derivada f'
6. Encontre os pontos críticos
7. Estude a monotonia de f a partir do sinal de f'
8. Calcule a segunda derivada f''

7. Encontre os pontos de inflexão
8. Estude a curvatura de f a partir do sinal de f''

Diferencial de uma função, notação de Leibniz

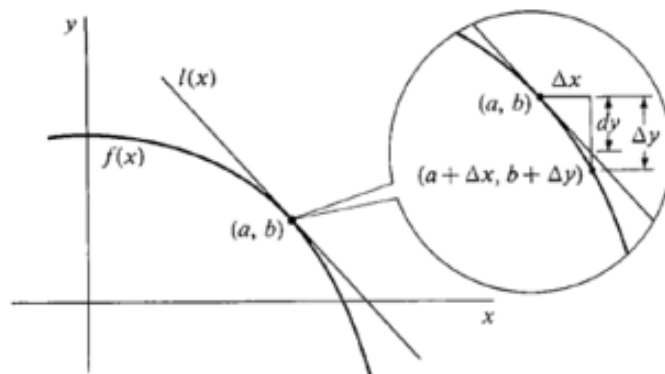
Os incrementos das variáveis x e y representam-se por Δx e Δy respectivamente.

Dada uma função $y=f(x)$, a diferencial de y é definida por

$$dy=f'(x)\Delta x$$

A diferencial de x é dada por

$$dx=(x)'\Delta x=\Delta x$$



Das definições de dy e dx pode-se obter a relação entre eles quando $f'(x)$ existe

$$dy=f'(x)dx$$

A diferencial dy é uma função linear de dx .

Na notação de Leibniz tem-se que

$$f'(x)=dy/dx$$

A regra da cadeia para uma função composta $y=f(x)$ onde $x=g(t)$, exprime-se por

$$dy/dt=(dy/dx)(dx/dt)$$

E a relação entre diferenciais de duas variáveis depende das funções que as associam e é dada por

$$dy=(dy/dx)(dx/dt)dt$$

A derivada exterior de uma função $f(x)$ definida num aberto conexo de $\mathbb{R}$, é dada por

$$df=f'(x)dx$$

A relação entre a derivada exterior e a derivada de uma função é dada pela notação de Leibniz

$$df/dx=f'(x)$$

Uma forma diferencial definida num aberto conexo de $\mathbb{R}$, é uma expressão do tipo: $g(x) dx$

Mais à frente serão aprofundadas as propriedades das formas diferenciais.

Primeiras noções de equações diferenciais de 1ª ordem

Por vezes temos uma relação entre diferenciais de duas variáveis e queremos determinar a relação entre as duas variáveis.

Uma equação diferencial de 1ª ordem envolve variáveis independentes t , dependentes x e suas derivadas, podendo ser escrita na forma explícita

$$dx/dt = f(t, x)$$

ou na forma implícita

$$F(t, x, dx/dt) = 0$$

Uma solução de uma equação num domínio de validade $I \subseteq \mathbb{R}$, é uma curva integral $x(t)$ definida num intervalo I , cuja derivada está também definida em I e que satisfaz a equação dada.

A solução geral de uma equação num domínio de validade $I \subseteq \mathbb{R}$ é uma família de soluções dependentes de um parâmetro arbitrário de integração c .

O parâmetro arbitrário c , pode ser determinado quando for conhecido um valor da solução num ponto, $x(t_0) = x_0$, designado por condição inicial da curva integral.

Um problema de valor inicial (p.v.i.) é composto por uma equação e uma condição inicial

$$dx/dt = f(t, x)$$

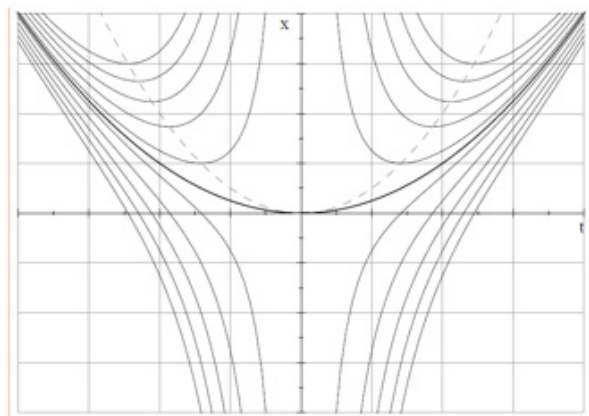
$$x(t_0) = x_0$$

Uma solução do p.v.i. é uma curva integral $x(t)$ que satisfaz a respectiva equação diferencial num intervalo máximo I , tal que $t_0 \in I$, e cuja derivada dx/dt também está definida em I .

A função $f(t, x)$ da forma explícita define em cada ponto (t, x) a inclinação da recta tangente à curva integral $x(t)$, determinando um campo de direcções no plano $I \times \mathbb{R}$.

Ex: A família de soluções da equação $dx/dt = t - ((2x)/t)$ é dada por $x(t) = ((t^2)/4) + (c/(t^2))$.

Estão representadas algumas curvas integrais na figura



[Curvas integrais de $((dx)/(dt))=t-(2x/t)$]

Algumas informações qualitativas sobre a solução podem ser retiradas da forma geral da equação $dx/dt=t-(2x/t)$.

1. O domínio de validade é desconexo, soluções para $t<0$ ou $t>0$;
2. A simetria da inclinação das rectas tangentes em relação a $t=0$

$$((dx)/(dt))(t)=t-(2x)/t=-((-t)-((2x)/((-t))))=((dx)/(dt))(-t)$$

impõe que a solução seja uma função par $x(t)=x(-t)$;

3. Os pontos estacionários $((dx)/(dt))=0$ estão sobre a parábola $x=((t^2)/2)$, (marcados a tracejado na figura), que separa as regiões onde as inclinações das rectas tangentes são positivas ($x<((t^2)/2)$) da região em que as inclinações são negativas ($x>((t^2)/2)$);

Conclusão

Foram tratadas os extremos locais e globais de funções reais, apresentados os teoremas de Fermat, Weierstrass (revisita), Cauchy, Rolle, Lagrange e l'Hospital. Foi relacionada a monotonia de funções e concavidade de gráficos com a primeira e segunda derivadas respectivamente. Foram apresentados os elementos necessários e suficientes para o traçado completo de gráfico de funções. Foi definido o incremento e a diferencial de uma função., apresentada a notação de Leibnitz e definida a derivada exterior de uma função. Foram apresentadas as primeiras noções de equações diferenciais de 1ª ordem.

Avaliação

Agrupe um mínimo de 5 e um máximo de 10 das perguntas seguintes em cada teste de avaliação de 1 hora, sem consultas.

Escolha perguntas de tipos diferentes na preparação de cada teste, mudando as parâmetros e dados de base para evitar colagens.

Cada pergunta vale entre 10% e 20%, conforme o número de perguntas seleccionadas.

1. **Pergunta:** Encontre os pontos críticos da função: $f(x)=((x+1)/(x^2-5x+4))$

Resposta:

$$\text{dom}f=\{x\in\mathbb{R}:x^2-5x+4=0\}=\mathbb{R}-\{1,4\}$$

$$f'(x)=(((x-1)(x-2)-(x+1)((x-1)+(x-2)))/((x-1)^2(x-2)^2))=-((x^2+2x-5)/((x-1)^2(x-2)^2))$$

$$f'(x)=0\iff x^2+2x-5=0\iff x=-1+\sqrt{6}\iff x=-1-\sqrt{6}$$

2. **Pergunta:** Minimize a função: $f(x)=F(\theta)=((m(a+kg))/(\cos\theta+k\sin\theta))$

Resposta:

$$F(\theta)=((m(a+kg))/(\cos\theta+k\sin\theta))$$

Se o corpo se move a velocidade constante, então $a=0$

$$F(\theta) = (kmg) / (\cos\theta + k\sin\theta)$$

$$F'(\theta) = ((-kmg)(-\sin\theta + k\cos\theta)) / ((\cos\theta + k\sin\theta)^2) = (kmg(-\tan\theta + k)) / (\cos\theta(1 + k\tan\theta)^2)$$

$$F'(x) = 0 \square$$

$$((kmg(-\tan\theta + k)) / (\cos\theta(1 + k\tan\theta)^2)) = 0 \square$$

$$kmg(-\tan\theta + k) = 0 \square$$

$$(-\tan\theta + k) = 0 \square$$

$$\tan\theta = k$$

3. Pergunta: Comprove o teorema de Rolle para a função

$$f(x) = x^{3/4} - 2x^{1/4} \text{ no intervalo } [0,4]$$

Resposta:

$$\text{dom}f = [0, +\infty[$$

f é contínua em $[0,4]$ (expoentes racionais com radicando positivo)

f é diferenciável em $]0,4[$

$$f(0) = 0 = f(4) = [4]^{3/4} - 2[4]^{1/4} = 2[4]^{3/4} - 2[4]^{1/4} = 0$$

Então existe $c \in]0,4[$ tal que $f'(c) = 0$

$$f'(x) = (3/4)x^{-1/4} - (1/2)x^{-3/4}$$

$$f'(c) = 0 \square$$

$$(3/4)c^{-1/4} - (1/2)c^{-3/4} = 0 \square$$

$$((3/4)c^{-1/4} - (1/2)c^{-3/4})c^{3/4} = 0 \square$$

$$(3/4)c^{1/2} - (1/2) = 0 \square$$

$$c^{1/2} = (2/3) \square$$

$$c = \sqrt{(2/3)}$$

4. Pergunta: Encontre os extremos e esboce o gráfico da função:

$$f(x) = x^4 - 5x^3 - 20x - 2$$

Resposta:

$$f'(x) = 4x^3 - 15x^2 - 20 = 0$$

$$(x-2)(x+2)(x^2+1) = 0$$

x	-2	2	
$(x-2)$	$-$	$-$	0
			$+$

$$\begin{array}{ccccccc} (x+2) & - & 0 & + & + & + & \\ (x-2) & (x+2) & (x^2+1) & + & 0 & - & 0 & + \end{array}$$

A primeira derivada é zero em -2,2

Em -2, o sinal é positivo antes e negativo depois, logo é um máximo local

Em 2, o sinal é negativo antes e positivo depois, logo é um mínimo local

$$x^4 - 5x^3 - 20x - 2$$

5. **Pergunta:** Encontre os extremos e esboce o gráfico da função: $f(x) = x^4 - 2x^3$

Resposta:

$$f'(x) = 4x^3 - 6x^2$$

$$f''(x) = 12x^2 - 12x = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = 1$$

São os pontos de inflexão

$$\begin{array}{ccccccc} x & & 0 & & 1 & & \\ x & - & - & - & 0 & + & \\ (x+1) & - & 0 & + & + & + & \\ x(x+1) & + & 0 & - & 0 & + & \end{array}$$

Côncavo para baixo entre 0 e 1 e côncavo para cima nas outras regiões.

Resumo da Unidade

Nesta unidade apresentaram-se os conceitos de continuidade, derivada de funções em $\mathbb{R}$, a interpretação geométrica da derivada, a derivada exterior e as formas diferenciais de funções em $\mathbb{R}^n$. Na continuidade de funções reais de variável real foram apresentadas algumas propriedades locais de funções contínuas. Caracterização alternativa de continuidade. Exemplos notáveis de funções contínuas. Descontinuidade de funções. Propriedades globais de funções contínuas (Teorema de Bolzano ou do valor intermédio)

Na aproximação linear de funções reais foram tratadas recta tangente e derivadas. Diferenciabilidade e continuidade. Regras algébricas de derivação. Derivada de funções compostas. Derivadas de funções notáveis. Derivação implícita. Taxas relacionadas. Derivadas de ordem superior. Aproximação polinomial de funções. Séries de Taylor e de MacLaurin.

Quanto a extremos locais e globais foram vistos os teoremas de Fermat, Weierstrass (revisita), Cauchy, Rolle, Lagrange e l'Hospital. Monotonia de funções e concavidade de gráficos. Traçado de gráfico de funções. Diferencial de uma função, notação de Leibniz. Primeiras noções de equações diferenciais de 1ª ordem.

Avaliação da Unidade

Instruções

Agrupe um mínimo de 5 e um máximo de 10 das perguntas seguintes em cada teste de avaliação de 1 horas, sem consultas.

Escolha perguntas de tipos diferentes na preparação de cada teste, mudando as parâmetros e dados de base para evitar colagens.

Critérios de avaliação

Cada pergunta vale entre 10% e 20%, conforme o número de perguntas seleccionadas.

Avaliação

Seguem perguntas- tipo, com as respectivas soluções detalhadas:

Da Unidade 2.1

1. **Pergunta:** Determine descontinuidades da função: $H(x) = (1/(x+2))$

Resposta: Descontinuidade no ponto $x=-2$ pois $\lim_{x \rightarrow -2} H(x)$ não existe. ($\lim_{x \rightarrow -2^-} H(x) = -\infty$ e $\lim_{x \rightarrow -2^+} H(x) = +\infty$)

2. **Pergunta:** $g(x) = \begin{cases} (|x|)/x & \text{se } x \neq 0, \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

Resposta: Descontínua em $x=0$ pois $\lim_{x \rightarrow 0^-} (|x|/x) = -1$ e $\lim_{x \rightarrow 0^+} (|x|/x) = 1$

3. **Pergunta:** Determine descontinuidades da função: $G(x) = ((x-2)/(x^2+2x-8))$

Resposta: é descontínua em $x=2$ e $x=-4$ pois não é definida nesses pontos e é contínua em todos os restantes pontos.

4. **Pergunta:** Determine descontinuidades da função:
 $f(x) = ((\sqrt[3]{2+[3]\sqrt{x}})-2)/(x-8)$

Resposta: é descontínua $x=8$ pois não é definida.

A componente $[3]\sqrt{x}$ é definida qualquer $x \in \mathbb{R}$ mas $\sqrt[3]{2+[3]\sqrt{x}}$ delimita o domínio de f para $[3]\sqrt{x} \geq -2 \Rightarrow x \geq -8$.

Logo $\text{dom} f = [-8, 8[\cup]8, +\infty[$

Agora, relembra-se aqui a expressão

$$a-b = (a^{1/n} - b^{1/n}) \sum_{k=1}^{n-1} a^{(n-k)/n} b^{(k-1)/n}$$

Aplicada ao caso tem-se

$$x-8 = ([3]\sqrt{x}-2)([3]\sqrt{x^2}+2[3]\sqrt{x}+4)$$

Então, tem-se que

$$\lim_{x \rightarrow 8} ((\sqrt[3]{2+[3]\sqrt{x}})-2)/(x-8) = \lim_{x \rightarrow 8} ((\sqrt[3]{2+[3]\sqrt{x}})-2)/(([3]\sqrt{x}-2)([3]\sqrt{x^2}+2[3]\sqrt{x}+4)) = ((\sqrt[3]{2+[3]\sqrt{x}})+2)/([3]\sqrt{x^2}+2[3]\sqrt{x}+4)$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow 8} \left(\frac{([3]\sqrt{x}) - 2}{([3]\sqrt{x}) - 2} \cdot ([3]\sqrt{x^2} + 2[3]\sqrt{x} + 4) \right) \cdot \frac{1}{(\sqrt{2 + [3]\sqrt{x}} + 2)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 8} \left(1 / ([3]\sqrt{x^2} + 2[3]\sqrt{x} + 4) \right) \cdot \frac{1}{(\sqrt{2 + [3]\sqrt{x}} + 2)} \\
 &= (1 / (48))
 \end{aligned}$$

Logo, definindo $f(8) = (1 / (48))$, a função torna-se contínua no ponto $x=8$.

5. **Pergunta:** Determine descontinuidades da função:

$$g(x) = -1 \quad \text{se } x \geq 1$$

$$g(x) = 1 \quad \text{se } x < 1$$

Resposta: é descontinua em $x=1$

6. **Pergunta:** Determine a continuidade da função composta $f \circ g$

Resposta:

$$f(x) = \sqrt{x}; g(x) = 16 - x^2$$

$$(f \circ g)(x) = \sqrt{16 - x^2}$$

$$\text{dom}(f \circ g) = \{x \in \mathbb{R} : 16 - x^2 \geq 0\} = [-4, 4]$$

A função é contínua no seu domínio

7. **Pergunta:** Determine a continuidade da função composta $f \circ g$

Resposta:

$$f(x) = x^2; g(x) = x^2 - 3$$

$$(f \circ g)(x) = (x^2 - 3)^2$$

$$\text{dom}(f \circ g) = \mathbb{R}$$

A função é contínua no seu domínio

8. **Pergunta:** Determine a continuidade da função composta $f \circ g$

Resposta:

$$f(x) = (\sqrt{x^2 - 1}) / (\sqrt{4 - x}); g(x) = |x|$$

$$(f \circ g)(x) = (\sqrt{|x|^2 - 1}) / (\sqrt{4 - |x|})$$

$$\text{dom}(f \circ g) = \{x \in \mathbb{R} : 4 - |x| > 0 \wedge |x|^2 - 1 \geq 0\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R} : |x| < 4 \wedge |x| \geq 1\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R} : -4 < x < 4 \wedge -1 \leq x \leq 1\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R} : -4 < x \leq -1 \vee 1 \leq x < 4\}$$

$$=]-4, -1] \cup [1, 4[$$

A função é contínua no seu domínio

9. **Pergunta:** Determine a continuidade da função $f(x) = \lfloor x \rfloor$, recorde-se $\lfloor x \rfloor = n$ se $n \leq x < n+1$ onde n é inteiro

Resposta:

$f(x) = \lfloor x \rfloor$, recorde-se $\lfloor x \rfloor = n$ se $n \leq x < n+1$ onde n é inteiro

$\text{dom} f = \mathbb{R}$

Em $]-1/2, 1/2[$ a função não é contínua em 0

Em $]1/4, 1/2[$ a função é contínua

Em $]1, 2[$ a função é contínua

Em $[1, 2[$ a função é contínua

Em $]1, 2]$ a função é descontínua em 2

10. **Pergunta:** Determine a continuidade da função composta $f \circ g$

Resposta:

$f(x) = \sqrt{x}; g(x) = 16 + x^2$

$(f \circ g)(x) = \sqrt{16 + x^2}$

$\text{dom}(f \circ g) = \{x \in \mathbb{R} : 16 + x^2 \geq 0\} = \mathbb{R}$

A função é contínua no seu domínio

11. **Pergunta:** Determine a continuidade da função composta $f \circ g$

Resposta:

$f(x) = (\sqrt{4-x^2}) / (\sqrt{x-1}); g(x) = |x|$

$(f \circ g)(x) = (\sqrt{4-|x|^2}) / (\sqrt{|x|-1})$

$\text{dom}(f \circ g) = \{x \in \mathbb{R} : |x|-1 > 0 \wedge 4-|x|^2 \geq 0\}$

$= \{x \in \mathbb{R} : |x| > 1 \wedge |x|^2 \leq 4\}$

$= \{x \in \mathbb{R} : -1 > x > 1 \wedge -2 \leq x \leq 2\}$

$= \{x \in \mathbb{R} : -1 > x > 1 \wedge -2 \leq x \leq 2\}$

$= [-2, -1[\cup]1, 2]$

A função é contínua em $[-2, -1[\cup]1, 2]$

12. **Pergunta:** $f(x) = x^3 - 4x + x + 3$ é contínua no intervalo $[1, 2]$

Resposta:

Os valores de $f(1) = 1$ e $f(2) = 5$

O teorema de Bolzano apenas garante que existe um valor $c \in [1, 2]$ onde $1 \leq f(c) \leq 5$ (nao uma raiz, portanto a pergunta não está correcta)

Da Unidade 2.2

1. **Pergunta:** Calcule a derivada da função: $y = x^2 - 6x + 9$

Resposta: $y' = 2x - 6$

2. **Pergunta:** Encontre a equação da recta tangente ao gráfico da função, no ponto dado: $y = x^2 + 2x + 1$, $y(1) = 4$

Resposta:

$$y' = 2x + 2$$

$$y'(1) = 4$$

$$y = 4 + 4(x - 1) \Rightarrow y = 4x$$

3. **Pergunta:** Encontre a equação da recta tangente ao gráfico da função, no ponto dado: $y = -(8/\sqrt{x})$, $y(4) = -4$

Resposta:

$$y' = 2 - 3x^2$$

$$y'(-2) = -10$$

$$y = 4 - 10(x + 2) \Rightarrow y = -10x - 16$$

4. **Pergunta:** Calcule a derivada da função, aplicando a definição: $y = 3x^2 + 4$

Resposta:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{(3(x+h)^2 + 4) - (3x^2 + 4)}{h} \right) = \lim_{h \rightarrow 0}$$

$$\left(\frac{(3x^2 + 6xh + 3h^2 + 4) - (3x^2 + 4)}{h} \right)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} (6x + 3h)$$

$$= 6x$$

5. **Pergunta:** Calcule a derivada da função: $y = 1/(x+1)$

Resposta: $D_x \left(\frac{1}{(x+1)} \right) = -\frac{1}{(x+1)^2}$

6. **Pergunta:** Calcule a derivada da função: $f(x) = x^3$

Resposta:

$$f'(x) = 3x^2$$

7. **Pergunta:** Calcule a derivada da função, aplicando a definição: $f(x) = (2/\sqrt{x}) - 1$

Resposta: $\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{(2/\sqrt{x+h}) - 1 - ((2/\sqrt{x}) - 1)}{h} \right) = \lim_{h \rightarrow 0}$

$$\left(\frac{(2 - \sqrt{x+h})/\sqrt{x+h} - (2 - \sqrt{x})/\sqrt{x}}{h} \right)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{(2\sqrt{x} - \sqrt{x+h})\sqrt{x} - 2\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\sqrt{x+h}}{h\sqrt{x+h}\sqrt{x}} \right)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} 2 \left(\frac{(\sqrt{x} - \sqrt{x+h})}{h\sqrt{x+h}\sqrt{x}} \right) \left(\frac{(\sqrt{x} + \sqrt{x+h})}{(\sqrt{x} + \sqrt{x+h})} \right)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(-h)}{(h\sqrt{x+h}\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{x+h}))}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(-1)}{(\sqrt{x+h}\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{x+h}))}$$

$$= \frac{(-1)}{(x\sqrt{x})}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{8}$$

8. **Pergunta:** Calcule a derivada da função: $y = \frac{4}{(2x-5)}$

Resposta:

$$y' = \frac{(-8)}{(2x-5)^2}$$

9. **Pergunta:** Prove que não existe recta tangente a $y = 4 - x^2$ e que passe pelo ponto $y(1) = 3$

Resposta:

A recta tangente passa pelo ponto (1,3) logo se passa também por (1,2) seria a recta $x = 1$

Mas a recta tangente à curva no ponto $x = 1$ é dada por

$$y' = -2x$$

$$y'(1) = -2$$

$$y = 3 - 2(x-1) = 5 - 2x$$

10. **Pergunta:** Verifique se é contínua e calcule a derivada à esquerda e à direita da função, no ponto indicado para ver se é diferenciável:

$$f(x) = 1 + |x+2|; x = -2$$

Resposta:

$\lim_{x \rightarrow -2} (1 + |x+2|) = 1 = f(-2)$ logo a função é contínua

$$f'_{-}(-2) = \lim_{x \rightarrow -2^-} \left(\frac{f(x) - f(-2)}{x - (-2)} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2^-} \left(\frac{(1 + |x+2|) - (1 + |-2+2|)}{x - (-2)} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2^-} \left(\frac{-(x+2)}{(x+2)} \right)$$

$$= -1$$

$$f'_{+}(-2) = \lim_{x \rightarrow -2^+} \left(\frac{f(x) - f(-2)}{x - (-2)} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2^+} \left(\frac{(1 + |x+2|) - (1 + |-2+2|)}{x - (-2)} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2^+} \left(\frac{(x+2)}{(x+2)} \right)$$

$$= 1$$

f não é derivável em $x = -2$

11. **Pergunta:** Verifique se é contínua e calcule a derivada à esquerda e à direita da função, no ponto indicado para ver se é diferenciável:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x < 2, \\ -1-2x & \text{se } 2 \leq x; \end{cases} \quad x = -1$$

Resposta:

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 1 = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x < 2, \\ -2 & \text{se } 2 \leq x \end{cases}$$

$$f'(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \left(\frac{(x^2 - 1)}{(x - (-1))} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1^-} \left(\frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1^-} (x-1)$$

$$= -2$$

$$f'(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \left(\frac{(-1-2x-1)}{(x - (-1))} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1^+} \left(\frac{(-2(x+1))}{(x+1)} \right)$$

$$= -2$$

f é diferenciável em $x = -1$

12. **Pergunta:** Verifique se é contínua e calcule a derivada à esquerda e à direita da função, no ponto indicado para ver se é diferenciável: $f(x) = |1 - x^2|$

Resposta:

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) \text{ é contínua}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x < -1, \\ 2x & \text{se } -1 \leq x \leq 1, \end{cases}$$

$$f'(-1) = -2 \neq 2 = f'(-1) \text{ não é derivável}$$

13. **Pergunta:** Calcule a derivada da função, quando x for inteiro e quando não for: $f(x) = x^x$

Resposta:

$$\text{Se } x \text{ não for inteiro } f'(x) = 0$$

O teorema afirma que se f for diferenciável então é contínua

Logo se não for contínua não poderá ser diferenciável

$$\text{Se } x \text{ for inteiro } f'(x) = -\infty \text{ e } f'(x) = x^{x-1} \text{ (verifique)}$$

14. **Pergunta:** Calcule a derivada da função: $f(x) = 3x^3 - 5x^2 + 1$

Resposta:

$$f'(x) = 12x^2 - 10x$$

15. **Pergunta:** Calcule a derivada da função: $G(y) = y^4 + 7y^3 - y^2 + 1$

Resposta:

$$G'(y) = 10y^3 + 35y^2 - 2y$$

16. **Pergunta:** Calcule a derivada da função: $H(x) = (5 / (6x^2)) = (5/6) x^{-2}$

Resposta:

$$H'(x) = ((-150x^{-3}) / (36x^4)) = -(25) / (6x^3)$$

17. **Pergunta:** Calcule a derivada da função: $F(t) = (t^3 - 2t + 1)(2t^2 + 3t)$

Resposta:

$$F'(t) = (3t^2 - 2)(2t^2 + 3t) + (t^3 - 2t + 1)(4t + 3) = 4t^4 + 9t^3 - 3t^2 - 8t + 3$$

18. **Pergunta:** Calcule a derivada da função: $f(x) = (x^3 - 2x^2 + 5x + 1) / (x^2)$

$$\text{Resposta: } (d/(dx))((x^3 - 2x^2 + 5x + 1) / (x^2)) = ((4x^3 - 4x + 5)(x^2) - (x^3 - 2x^2 + 5x + 1)(2x)) / (x^4)$$

$$= (1 / (x^4))(-x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 9x + 4)$$

19. **Pergunta:** Calcule a equação da recta tangente ao gráfico da função no ponto indicado: $y = (8 / (x^2 + 4))$, $y(2) = 1$

Resposta:

$$y' = -(16x) / ((x^2 + 4)^2)$$

$$y'(2) = -(1/2)$$

$$y = 1 - (1/2)(x - 2) = 2 - (1/2)x$$

20. **Pergunta:** Calcule a equação da recta tangente ao gráfico da função $y = ((x^3) / 3) - x^2 + 2x + (4/3)$, paralela a $2x - y + 3 = 0$

Resposta:

A recta paralela a $2x - y + 3 = 0 \Rightarrow y = 2x + 3$ é a recta com declive 2

Quais os pontos em que a recta possui esse declive?

$$y' = x^2 - 2x + 2 = 2 \Rightarrow x(x - 2) = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = 2$$

$$y(0) = (4/3)$$

$$y = (4/3) + 2x$$

$$y(2) = 4$$

$$y = 4 + 2(x - 2)$$

$$((x^3) / 3) - x^2 + 2x + (4/3)$$

21. **Pergunta:** Calcule a derivada da função: $y = 4x^2 \cos x$

$$\text{Resposta: } (4x^2 \cos x)' = 8x \cos x - 4x^2 \sin x$$

22. **Pergunta:** Calcule a derivada da função: $y = x^2 \sin x + 2x \cos x$

$$\text{Resposta: } (x^2 \sin x + 2x \cos x)' = 2x \sin x + x^2 \cos x + 2 \cos x - 2x \sin x = 2 \cos x + x^2 \cos x$$

23. **Pergunta:** Calcule a derivada da função: $y = \cos x \cot x$

Resposta: $D_x(\cos x \cot x) = -\sin x \cot x - \cos x \csc^2 x$

Pergunta: Calcule a derivada da função: $z = ((\cot y) / (1 - \sin y))$

Resposta: $(d/(dy))((\cot y) / (1 - \sin y)) = ((\csc^2 y(1 - \sin y) + \cot y \cos y) / ((1 - \sin y)^2))$

24. **Pergunta:** Calcule a derivada da função, no ponto indicado: $f(x) = x \sin x$

Resposta: $f'(x) = \sin x + x \cos x$

$$f'((3\pi)/2) = \sin((3\pi)/2) + ((3\pi)/2) \cos((3\pi)/2) = -1$$

25. **Pergunta:** Calcule a derivada da função, no ponto indicado: $f(x) = (\cos x + 1)(x \sin x - 1)$

Resposta:

$$f'(x) = -\sin x(x \sin x - 1) + (\cos x + 1)(\sin x + x \cos x) \quad f'(\pi/2) = -\sin(\pi/2)((\pi/2) \sin(\pi/2) - 1) + (\cos(\pi/2) + 1)(\sin(\pi/2) + (\pi/2) \cos(\pi/2)) = 2 - (1/2)\pi$$

26. **Pergunta:** Calcule a equação da recta tangente ao gráfico da função, no ponto indicado: $f(x) = \cos x$

Resposta:

$$f'(x) = -\sin x$$

$$(a) \quad x = \pi/2$$

$$f'(\pi/2) = -\sin(\pi/2) = -1$$

$$f(\pi/2) = \cos(\pi/2) = 0$$

$$y = -(x - (\pi/2))$$

$$(b) \quad x = -\pi/2$$

$$f'(-\pi/2) = -\sin(-\pi/2) = 1$$

$$f(-\pi/2) = \cos(-\pi/2) = 0$$

$$y = (x + (\pi/2))$$

$$(c) \quad x = \pi/6$$

$$f'(\pi/6) = -\sin(\pi/6) = -(1/2)$$

$$f(\pi/6) = \cos(\pi/6) = (1/2)\sqrt{3}$$

$$y = (1/2)\sqrt{3} - (1/2)(x - (\pi/6))$$

27. **Pergunta:** Calcule a derivada da função: $y = (10 - 5x)^3$

Resposta: $(d/(dx)) (10 - 5x)^3 = 2500 (x - 2)^3$

28. **Pergunta:** Calcule a derivada da função: $y = (\sin x^2)$

Resposta: $(d/(dx)) (\sin x^2) = 2x \cos x^2$

29. **Pergunta:** Calcule a derivada da função: $y = (\cos (3x^2 + 1))$

Resposta: $(d/(dx)) (\cos (3x^2 + 1)) = -6x \sin (3x^2 + 1)$

30. **Pergunta:** Calcule a derivada da função: $y = (x^2 - 4x)^2 (x^2 + 1)^3$

Resposta: $(d/(dx)) (x^2 - 4x)^2 (x^2 + 1)^3 = (2 / (x(x^2 + 1)^2))$
 $(x^4 + 2x^3 + 8x^2 - 48x - 32)$

31. **Pergunta:** Calcule a derivada da função: $y = ((2x^2 + 1) / (3x^3 + 1))^2$

Resposta: $(d/(dx)) ((2x^2 + 1) / (3x^3 + 1))^2 = -2 (x / ((3x^3 + 1)^3))$
 $(12x^4 + 24x^3 - 8x^2 + 9x - 4)$

32. **Pergunta:** Calcule a derivada da função: $y = (2 \sin x - 3 \cos x)^3$

Resposta: $(d/(dx)) (2 \sin x - 3 \cos x)^3 = 3 (2 \cos x + 3 \sin x) (3 \cos x - 2 \sin x)^2$
 $(d/(dx)) (\sin^2 (\cos 2x)) = -4 \sin 2x \cos (\cos 2x) \sin (\cos 2x)$

33. **Pergunta:** Calcule a derivada da função: $y = (5 - 2x^2)^{-1/3}$

Resposta: $(d/(dx)) (5 - 2x^2)^{-1/3} = (4/3) (x / ((5 - 2x^2)^{4/3}))$

34. **Pergunta:** Calcule a derivada da função: $y = \sqrt[3]{1 + \csc^2 x}$

Resposta: $(d/(dx)) (\sqrt[3]{1 + \csc^2 x}) = -\sqrt[3]{2} ((\cos x) / ((\sin^3 x) \sqrt[3]{-(1 / (\sin^2 x))}))$
 $(\cos 2x - 3))$

35. **Pergunta:** Calcule a derivada da função: $y = ([3] \sqrt[3]{(3x^2 + 5x - 1)^2})$

Resposta: $(d/(dx)) ([3] \sqrt[3]{(3x^2 + 5x - 1)^2}) = (2/3) [3] \sqrt[3]{(3x^2 + 5x - 1)^2}$
 $((6x + 5) / (3x^2 + 5x - 1))$

36. **Pergunta:** Calcule a derivada da função: $y = (\sin [3] \sqrt[3]{x} \cos [3] \sqrt[3]{x})$

Resposta:

$(d/(dx)) (\sin [3] \sqrt[3]{x} \cos [3] \sqrt[3]{x}) = (1 / (3x)) (\cos 2 [3] \sqrt[3]{x}) [3] \sqrt[3]{x}$

37. **Pergunta:** Calcule a derivada da função: $y = ([4] \sqrt[4]{((x^3 + 1) / (x^3 - 1))})$

Resposta: $(d/(dx)) ([4] \sqrt[4]{((x^3 + 1) / (x^3 - 1))}) = -3x^2 (([4] \sqrt[4]{(1 / (x^3 - 1))}))$
 $(x^3 + 1)) / (2x^2 - 2)$

38. **Pergunta:** Calcule a derivada implícita da equação: $4x^2 - 9y^2 = 1$

Resposta:

$$8x - 18yy' = 0 \Rightarrow y' = ((4x) / (9y))$$

39. **Pergunta:** Calcule a derivada implícita da equação: $2x^3y + 3xy^3 = 5$

Resposta:

$$2x^3y' + 3y^3 + 6x^2y + 9xy^2y' = 0 \Rightarrow y' = -((6x^2y + 3y^3) / (2x^3 + 9xy^2))$$

40. **Pergunta:** Calcule a derivada implícita da equação: $y + \sqrt{xy} - 3x^3 = 0$

Resposta:

$$y' + (1 / (2\sqrt{xy})) y + (1 / (2\sqrt{xy})) xy' - 9x^2 = 0 \Rightarrow y' = (18x^3 - \sqrt{xy}) / ((\sqrt{xy} - 2y) / (x^2 - 4xy))$$

41. **Pergunta:** Calcule a derivada implícita da equação: $\cot xy + xy = 0$

Resposta:

$$y - (\cot^2(xy) + 1) y - (\cot^2(xy) + 1) xy' + xy' = 0 \Rightarrow y' = ((y - (\cot^2(xy) + 1) y) / (x(\cot^2(xy))))$$

42. **Pergunta:** Calcule a derivada implícita da equação: $y\sqrt{2+3x} + x\sqrt{1+y} - x = 0$

Resposta:

$$(3/2) (y / (\sqrt{3x+2})) + \sqrt{y+1} + y' \sqrt{3x+2} + (1/2) (x / (\sqrt{y+1})) y' - 1 = 0$$

$$y' = ((1 - (3/2) (y / (\sqrt{3x+2})) - \sqrt{y+1}) / (\sqrt{3x+2} + (1/2) (x / (\sqrt{y+1}))))$$

43. **Pergunta:** Calcule a equação da recta tangente normal à curva: $9x^3 - y^3 = 1$ no ponto (1,2)

Resposta:

$$27x^2 - 3y^2y' = 0 \Rightarrow y' = ((27x^2) / (3y^2))$$

$$y'(1) = ((27(1)^2) / (3(2)^2)) = (9/4)$$

$$y = 2 + (9/4)(x - 1)$$

44. **Pergunta:** Calcule o polinómio de Taylor de n-ésimo grau com resto de Lagrange: $f(x) = e^{-x}$; $x_0 = 0$; $n = 4$

Resposta:

O polinómio de Taylor de n-ésimo grau com resto de Lagrange é dado por :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x - x_0)^4$$

onde ξ esté entre x_0 e x .

$$e^{-x}; f(0) = 1$$

$$(d/(dx))(e^{-x}) = -e^{-x}; f'(0) = -1$$

$$(d^2/(dx^2))(e^{-x}) = e^{-x}; f''(0) = 1$$

$$(d^3/(dx^3))(e^{-x}) = -e^{-x}; f'''(0) = -1$$

$$(d^4/(dx^4))(e^{-x}) = e^{-x}; f^{(4)}(0) = 1$$

$$(d^5/(dx^5))(e^{-x}) = -e^{-x}; f^{(5)}(0) = -1$$

$$f(x) = 1 - x + (1/2)x^2 - (1/6)x^3 + (1/(24))x^4 + ((e^{-x})/(120))x^5$$

45. Pergunta: Prove as seguintes afirmações::

Resposta: $(c)' = 0$ onde c é uma constante

$$\lim_{h \rightarrow 0} ((c - c)/h) = \lim_{h \rightarrow 0} (0/h) = 0$$

46. Pergunta: Prove as seguintes afirmações:

Resposta: $(x^n)' = nx^{n-1}$ para $n \in \mathbb{Z}$

$$\lim_{h \rightarrow 0} ((x+h)^n - x^n)/h = \lim_{h \rightarrow 0} ((x^n + nx^{n-1}h + h^2(F(x, h)) - x^n)/h)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} [nx^{n-1} + h(F(x, h))]$$

$$= nx^{n-1}$$

47. Pergunta: Prove as seguintes afirmações::

Resposta: $(u^r)' = ru^{r-1}u'$ para $r \in \mathbb{Q}$ e $u(x) \neq 0$

Generalização de 3 para expoentes fraccionários e regra da cadeia

Da Unidade 2.3

1. **Pergunta:** Encontre os extremos da função: $f(x) = \sqrt{4-x^2}$

Resposta:

$$f(x) = \sqrt{4-x^2} \text{ em }]-2, 2[$$

$$f'(x) = ((4x^3)/(2\sqrt{4-x^2})), \text{ logo } f \text{ é diferenciável em }]-2, 2[$$

$$f'(x) = 0 \iff 4x^3 = 0 \iff x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \sqrt{4-x^2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \sqrt{4-x^2} = 0$$

$$f(0) = 2$$

O mínimo absoluto não existe e o máximo absoluto da função é 2 obtido no ponto $x=0$

2. **Pergunta:** Comprove o teorema de Rolle para a função $f(x) = x^3 + x^2 - x$ no intervalo $[-2, 1]$:

Resposta:

f é contínua em $[-2, 1]$ (polinómio)

f é diferenciável pois $f'(x) = 3x^2 + 2x - 1$ é contínua em $]-2, 1[$

Então existe $c \in]-2, 1[$ tal que $f'(c) = ((f(1) - f(-2)) / (1 - (-2))) = ((1 - (-2)) / 3) = 1$

$$3c^2 + 2c - 1 = 1 \Leftrightarrow 3c^2 + 2c - 2 = 0 \Leftrightarrow c = (1/3) \sqrt{7} - (1/3) \text{ ou } c = -(1/3) \sqrt{7} - (1/3)$$

Ambos estão no intervalo $]-2, 1[$.

3. **Pergunta:** Comprove o teorema de valor médio para a função $f(x) = ((2x-1) / (3x-4))$ no intervalo $[1, 6]$

Resposta:

$$\text{dom} f = \mathbb{R} - \{ (4/3) \}$$

f não é contínua no intervalo dado

$$((2x-1) / (3x-4))$$

4. **Pergunta:** Encontre os extremos e esboce o gráfico da função: $f(x) = x^{(2/3)} (x-1)^2$

Resposta:

$$f'(x) = (2/3) x^{-(1/3)} (x-1)^2 + 2x^{(2/3)} (x-1) = 0$$

$$(2/3) x^{-(1/3)} (x-1)^2 + 2x^{(2/3)} (x-1) = 0 \Leftrightarrow (2/3) (x-1)^2 + 2x(x-1) = 0$$

$$(8/3) x^2 - (10/3) x + (2/3) = 0 \Leftrightarrow 4x^2 - 5x + 1 = 0$$

$$(x-1) (x - (1/4)) = 0$$

x	$(1/4)$	1			
$(x-1) -$	-	-	0	+	
$(x - (1/4)) -$	-	0	+	+	+
$(x-1) (x - (1/4))$	+	0	-	0	+

Em $(1/4)$, o sinal é positivo antes e negativo depois, logo é um máximo local

Em 1, o sinal é negativo antes e positivo depois, logo é um mínimo local

$$x^{(2/3)} (x-1)^2$$

5. **Pergunta:** Encontre os extremos e esboce o gráfico da função: $f(x) = \tan x$

Resposta:

$$f'(x) = (d/(dx)) (\tan x) = \tan^2 x + 1 = \sec^2 x$$

$$f''(x) = (d/(dx)) (\tan^2 x + 1) = 2(\tan x) (\tan^2 x + 1) = 0$$

$$\tan x = 0 \iff x = 0, \pm\pi, \dots$$

A inclinação da recta tangente quando $\tan x = 0$ é $f'(0, \pm\pi, \dots) = 1$

Leituras e outros Recursos

As leituras e outros recursos desta unidade encontram-se na lista de Leituras e Outros Recursos do curso.

Unidade 3. Cálculo integral em

Introdução à Unidade

Esta unidade apresenta as primitivas de funções elementares, a integral de uma forma diferencial, o teorema fundamental do cálculo, as técnicas de integração, a integral de Riemann, a interpretação geométrica da integral de Riemann e o cálculo de áreas e volumes elementares usando a integração.

Estas são as ferramentas indispensáveis na aplicação do método do cálculo, culminando o estudo feito até aqui.

Apresentam-se também algumas aplicações, nomeadamente o cálculo de áreas de figuras plana, aplicando o método do cálculo.

Objectivos da Unidade

Após a conclusão desta unidade, deverá ser capaz de:

- Calcular primitivas imediatas de uma função, identificar formas diferenciais, calcular integrais e resolver equações diferenciais ordinárias de 1ª ordem.
- Calcular áreas de figuras planas delimitadas por gráfico de funções e relacionar esta quantidade com integral definida através do teorema fundamental do Cálculo.

TERMOS-CHAVE

Primitivação: Operação inversa de derivação (excepto constante)

Primitiva de f: Se sua derivada é igual a f

Derivada exterior: $dF = F'(x) dx$

Prop. Leibniz: $d(FG) = GdF + FdG$

Deriv. ext. F[h]: $d(F[h]) = F'(h) dh = F' dh$

Prop. Poincaré: $d(dF) = 0$

Forma diferencial: $g(x)dx$ onde $g(x)$ é definida num aberto conexo

Integração: Operação inversa da derivada exterior (excp. const.)

Integ. imediata: reconhecer na tabela da derivação

Integ. partes: usando prop. Leibniz

Integ. substituição: usando prop. função composta

Curva integral: solução de equação diferencial

Somatório: $\sum$ símbolo que representa soma indexada de parcelas

Somas parciais: $s_{\{n\}} = x_1 + x_2 + \dots + x_n = \sum_{k=1}^n x_{\{k\}}$

Série infinita: $\sum_{k=1}^{\infty} x_{\{k\}}$ soma de infinitas parcelas

Diferença (posterior): $\Delta s_{\{n\}} = s_{\{n\}} - s_{\{n-1\}}$ para $n \in \mathbb{N}$

Partição (malha): conjunto de pontos, incluindo os bordos de intervalo

Malha regular: pontos equidistantes

Passo da malha: distancia entre pontos de malha regular $h = (b-a)/n$

Somas superior de Riemann: $\sum_{i=1}^n M_{\{i\}} \Delta_{\{i\}} x$

Somas inferior de Riemann: $\sum_{i=1}^n m_{\{i\}} \Delta_{\{i\}} x$

Fn. (Riemann) integrável : limites de somas de Riemann existem

Reg. verticalmente simples: possível subdividir em faixas verticais

Reg. horizontalmente simples: pode subdividir em faixas horizontais

Actividades de Aprendizagem

Actividade 3.1 - Primitivação e integração em $\mathbb{R}$

Introdução

Primitivação (antidiferenciação) de funções. Derivada exterior. Formas diferenciais .
Integração de formas diferenciais. Técnicas de integração. Equações diferenciais ordinárias de 1ª ordem.

Detalhes da actividade

Primitiva de funções em $\mathbb{R}$

À excepção de uma constante, a primitivação é a operação inversa da derivação (definição formal mais adiante).

Diz-se que $G(x)$ é uma primitiva de $g(x)$ se $G'(x) = g(x)$ e se $G(x)$ é uma primitiva de $g(x)$ então $G(x) + c$ também é uma primitiva de $g(x)$, para qualquer constante c .

Na demonstração basta usar o facto da derivada de uma função constante ser zero

$$\begin{aligned} (G(x) + c)' &= G'(x) + (c)' \\ &= G'(x) \\ &= g(x) \end{aligned}$$

Por definição, se $f'(x)$ é uma derivada de $f(x)$ então $f(x)$ é uma primitiva de $f'(x)$.

Primitivas imediatas são obtidas a partir da tabela de derivadas, fazendo a leitura da direita para a esquerda e acrescentando uma constante c .

Ex: $G(x)=x^3+c$ é uma primitiva de $g(x)=3x^2$ pois

$$\begin{aligned} G'(x) &= (x^3+c)' \\ &= 3x^2+(c)' \\ &= g(x) \end{aligned}$$

Ex: $G(x)=\sqrt{x}+c$ é uma primitiva de $g(x)=(1/(2\sqrt{x}))$ pois

$$\begin{aligned} G'(x) &= (\sqrt{x}+c)' \\ &= (x^{1/2})' + (c)' \\ &= (1/(2\sqrt{x})) \\ &= g(x) \end{aligned}$$

Entretanto, como o domínio de $f'(x)$ é um subconjunto de $f(x)$

$$\text{dom}(f') \subset \text{dom}(f)$$

requer-se que o domínio da primitiva de $g(x)$ seja um supraconjunto do domínio de $g(x)$

$$\text{dom}(G) \supset \text{dom}(g)$$

A primitiva de uma função $g(x)$, representada por $G(x)$, é uma classe de funções que distam entre si de uma constante tal que

$$G'(x)=g(x)$$

e o domínio de $G(x)$ é um supraconjunto maximal do domínio de $g(x)$

Ex: A primitiva de $g(x)=(1/x)$ é $G(x)=\ln|x|+c$ pois

$$\begin{aligned} G'(x) &= (\ln|x|+c)' \\ &= (\ln|x|)' + (c)' \\ &= (1/x) \\ &= g(x) \end{aligned}$$

e o domínio de $(\ln|x|+c)$ é $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, igual ao domínio de $(1/x)$.

A primitivação de funções em $\mathbb{R}$ goza das seguintes propriedades, se $F(x)$ e $G(x)$ são as primitivas de $f(x)$ e $g(x)$ respectivamente, então:

- Primitiva de qualquer constante é zero, porque $(c)'=0$ para qualquer constante c ;
- $F'(x)=f(x)$ pela definição;
- $(d/(dx))F(x)=f(x)$ (expressão anterior com notação de Leibniz)
- $(\lambda F(x)+\beta G(x))$ é a primitiva de $\lambda f(x)+\beta g(x)$ pois pela linearidade da derivação
- $(\lambda F(x)+\beta G(x))' = \lambda F'(x)+\beta G'(x) = \lambda f(x)+\beta g(x)$
- $F(x)G(x)$ é a primitiva de $F'(x)G(x)+F(x)G'(x)$ pois pela regra de Leibniz: $(F(x)G(x))' = F'(x)G(x)+F(x)G'(x)$

Derivada exterior e forma diferencial

Dada uma função $F(x)$ diferenciável num intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$, a derivada exterior de $F(x)$ é definida como

$$dF = F'(x) dx$$

Para $F(x), G(x)$ funções contínuas e $F(h(x))$ compositáveis num intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$, e escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, a derivada exterior satisfaz as seguintes propriedades:

- $(\alpha F + \beta G) = \alpha dF + \beta dG$ (linearidade)
- $d(FG) = GdF + FdG$ (Leibniz)
- $d(F \circ h) = F' h' dx = F' dh$ (composição)
- $d(dF) = 0$ e $dx dx = 0$ (Poincaré)

Na demonstração verifica-se que as três primeiras propriedades derivam da definição da derivada exterior e das propriedades respectivas para as derivadas:

$$d(\alpha F + \beta G) = (\alpha F + \beta G)' dx$$

$$= \alpha F' dx + \beta G' dx$$

$$= \alpha dF + \beta dG$$

$$d(FG) = (FG)' dx$$

$$= (GF' + FG') dx$$

$$= GF' dx + FG' dx$$

$$= GdF + FdG$$

$$d(F(h)) = (F(h))' dx$$

$$= F' h' dx$$

$$= F' dh$$

A última propriedade deriva de duas outras propriedades

$$dx dx = 0$$

$$d dx = 0$$

Então

$$d(dF) = d(F' dx)$$

$$= dF' dx + F' d dx$$

$$= F'' dx dx + F' d dx$$

$$= 0$$

Designa-se por forma diferencial (de grau 1) num aberto $I \subset \mathbb{R}$ à expressão

$$g(x) dx$$

onde $g(x)$ é uma função contínua em I .

Uma forma diferencial $g(x)dx$ num aberto $I \subset \mathbb{R}$ diz-se exacta se puder ser escrita como uma derivada exterior de alguma função $G(x)$

$$g(x) dx = dG$$

Uma forma diferencial ω diz-se fechada se a sua derivada exterior for nula

$$d\omega = 0$$

Num aberto conexo $I \subset \mathbb{R}$, uma forma diferencial $g(x)dx$ é exacta sse é fechada.

Na demonstração, considere a forma diferencial $g(x)dx$ num aberto conexo $I \subset \mathbb{R}$.

Se $g(x)dx$ é exacta então existe alguma função G em $I \subset \mathbb{R}$ tal que $g(x)dx = dG$, logo

$$d(g(x) dx) = d(dG) = 0$$

Se $g(x)dx$ é fechada então $d(g(x)dx) = 0$, logo $g(x)dx = cdx$, para alguma constante c . Deixe $G = cx$ então

$$dG = c dx$$

$$= g(x) dx$$

logo $g(x)dx$ é exacta.

Por definição, se $g(x)dx = dG$ para alguma função $G(x)$ no intervalo I , então $G'(x) = g(x)$

Integral de formas diferenciais

À excepção de uma constante, a integração (indefinida) é a operação inversa da derivação exterior:

$$\int dF = F + c$$

Deduz-se facilmente a relação entre primitivas de funções e integrais de formas

diferenciais:

Se $F(x)$ for a primitiva de $f(x)$ então

$$\int f(x) dx = F(x) + c$$

num intervalo aberto e conexo de $\mathbb{R}$.

A demonstração é feita da seguinte maneira: se $F(x)$ for a primitiva de $f(x)$ então

$$\begin{aligned} dF &= F'(x) dx \\ &= f(x) dx \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} F(x) &= \int dF(x) = \\ &= \int f(x) dx \end{aligned}$$

A integração de formas diferenciais goza das seguintes propriedades, deduzidas directamente das propriedades da primitivação de funções:

- $(\int f(x) dx)' = f(x)$ pela definição
- $(d/(dx)) \int f(x) dx = f(x)$ (com notação de Leibniz)
- $\int 0 dx = c$ porque $(c)' = 0$ para qualquer constante c .
- $\int \lambda f(x) dx = \lambda \int f(x) dx + c$ porque pela linearidade da derivação
- $(\lambda \int f(x) dx + c)' = \lambda (\int f(x) dx)' + (c)' = \lambda f(x)$
- $\int (\beta f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int f(x) dx + \beta \int g(x) dx + C$ pela linearidade da derivação

Por definição, as primitivas são diferenciáveis, logo, funções primitivas são contínuas no intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$.

Se uma função é descontínua em algum ponto do interior de um intervalo I , então não é primitiva de qualquer função nesse intervalo.

Na demonstração, deixe uma função arbitrária $G(x)$ ser descontínua em $a \in \text{int}(I)$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} G(x) \neq \lim_{x \rightarrow a^+} G(x)$$

Suponha que $G(x)$ é a primitiva de $g(x)$.

Por definição, $G'(x) = g(x)$, para $x \in I$, logo $G'(a) = g(a)$, o que contradiz a suposição.

Técnicas de integração

O cálculo de primitivas resume-se em transformar uma forma diferencial dada, $f(x)dx$, numa forma diferencial exacta, dF , e primitivá-la usando a definição

$$\int dF(x) = F(x) + C$$

Para encontrar uma forma diferencial exacta usam-se algumas técnicas, dentre as quais se destacam:

- integração imediata
- integração por partes
- integração por substituição

Integrais imediatas

Algumas formas diferenciais exactas podem ser reconhecidas pela leitura (ao contrário) da tabela das derivadas notáveis:

- $0dx = dC$
- $1dx = dx$
- $x^n dx = d((x^{n+1})/(n+1))$ para $n \in \mathbb{N}$ e $x > 0$ se na forma irreduzível o denominador de $q \in \mathbb{Q}$ for par.
- $(1/(2\sqrt{x}))dx = d\sqrt{x}$ para $x > 0$
- $\cos x dx = d\sin x$
- $-\sin x dx = d\cos x$
- $\sec^2 x dx = d\tan x$ no seu domínio
- $\tan x \pm \sec x dx = d\sec x$
- $(1/(\sqrt{1-x^2}))dx = d\arcsin x$
- $-(1/(\sqrt{1-x^2}))dx = d\arccos x$
- $(1/(1+x^2))dx = d\arctan x$
- $e^x dx = de^x$ (notável propriedade)
- $a^x dx = d((a^x)/(\ln a))$ para $a > 0$
- $(1/x)dx = d\ln x$ para $x > 0$
- $(1/x)dx = d\ln|x|$ para $x \neq 0$

A integração de forma diferenciais é imediatamente calculada aplicando a definição:

Ex: Calcule a integral da forma diferencial $x dx$

Reconhecendo (imediatamente) que $x dx = d((x^2)/2)$ é uma forma exacta e aplicando a definição

$$\begin{aligned} \int x dx &= \int d((x^2)/2) \\ &= ((x^2)/2) + C \end{aligned}$$

Ex: Calcule a integral da forma diferencial $(1/(\sqrt{x}))$

Reconhecendo (quase-imediatamente) que $(1/(\sqrt{x})) dx = d(2\sqrt{x})$ para $x > 0$, é uma forma exacta e aplicando a definição

$$\begin{aligned}\int (1/(\sqrt{x})) dx &= \int d(2\sqrt{x}) \\ &= 2\sqrt{x} + C\end{aligned}$$

Integração por partes

A derivada exterior de um produto de duas funções $F(x)$ e $G(x)$, diferenciáveis num intervalo aberto $I \subseteq \mathbb{R}$

$$d(FG) = GdF + FdG$$

pode ser muito útil para calcular formas diferenciais exactas.

Existem dois métodos de integração por partes:

(I) Se a forma dada, $f(x)dx$, for idêntica a uma das partes GdF enquanto a outra parte é uma forma exacta $FdG = dH$, integram-se-se a diferença das duas formas exactas

$$\begin{aligned}GdF &= d(FG) - FdG \\ &= d(FG) - dH \\ &= d(FG - H)\end{aligned}$$

(II) Se na forma dada, $f(x)dx$, houver uma “parte” na qual se reconhece uma forma exacta, identifica-se essa “parte” com dF e a parte restante com G

Exemplos de aplicação do método (I)

Ex: Calcule a integral da função $f(x) = \ln x$

O plano é transformar $\ln x dx$ numa forma diferencial exacta e integrá-la usando a definição.

Reconhecendo a semelhança de $\ln x dx$ com GdF , usa-se $FG = x \ln x$ para obter:

$$\begin{aligned}d(x \ln x) &= \ln x dx + x d \ln x \\ &= \ln x dx + x ((dx)/x) \\ &= \ln x dx + dx\end{aligned}$$

Então a forma diferencial dada é a diferença de duas formas exactas e pela linearidade da derivada exterior

$$\begin{aligned}\ln x dx &= d(x \ln x) - dx \\ &= d(x \ln x - x)\end{aligned}$$

Resulta então que

$$\begin{aligned}\int \ln x dx &= \int d(x \ln x - x) \\ &= x \ln x - x + C\end{aligned}$$

E verifica-se de facto que

$$(x \ln x - x + C)' = \ln x + 1 - 1 + 0 = \ln x$$

Ex: Calcule a integral da função $f(x) = xa^x$, para $a > 0$.

O plano é transformar $xa^x dx$ numa forma diferencial exacta.

$$\begin{aligned} d(xa^x) &= a^x dx + xda^x \\ &= a^x dx + xa^x \ln a dx \end{aligned}$$

Como $a^x dx = (1 / (\ln a)) da^x$

$$d(xa^x) = d((a^x) / (\ln a)) + \ln a \cdot xa^x dx$$

Obtem-se a diferença de duas formas exactas e pela linearidade da derivada exterior

$$xa^x dx = (1 / (\ln a)) d(xa^x - ((a^x) / (\ln a)))$$

Resulta então que

$$\begin{aligned} \int xa^x dx &= (1 / (\ln a)) \int d(xa^x - ((a^x) / (\ln a))) \\ &= (1 / (\ln a)) (xa^x - ((a^x) / (\ln a))) + C \end{aligned}$$

E verifica-se de facto que

$$\begin{aligned} (((a^x) / (\ln a)) (x - (1 / (\ln a))) + C)' &= a^x (x - (1 / (\ln a))) + ((a^x) / (\ln a)) + 0 \\ &= xa^x \end{aligned}$$

Ex: Calcule a integral da função $f(x) = \sec^2 x$ no intervalo $]-\pi/2, \pi/2[$

$$\begin{aligned} d(\tan x) &= ((\cos x \sin x - \sin x \cos x) / (\cos^2 x)) \\ &= (dx) / (\cos^2 x) \\ &= \sec^2 x dx \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} \int \sec^2 x dx &= \int d(\tan x) \\ &= \tan x + C \end{aligned}$$

Ex: Calcule a integral da função $f(x) = x \cos x$:

$$\begin{aligned} d(x \sin x) &= \sin x dx + x d \sin x \\ &= d(-\cos x) + x \cos x dx \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} \int x \cos x dx &= \int d(x \sin x + \cos x) \\ &= \cos x + x \sin x + C \end{aligned}$$

E verifica-se de facto que

$$\begin{aligned} (\cos x + x \sin x + C)' &= -\sin x + \sin x + x \cos x + 0 \\ &= x \cos x \end{aligned}$$

Ex; Calcule a integral da função $f(x) = x \sin x$:

$$\begin{aligned} d(x \cos x) &= \cos x dx + x d \cos x \\ &= d(\sin x) - x \sin x dx \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} \int x \sin x dx &= \int d(\sin x - x \cos x) \\ &= \sin x - x \cos x + C \end{aligned}$$

E verifica-se de facto que

$$\begin{aligned} (\sin x - x \cos x + C)' &= \cos x - \cos x + x \sin x + 0 \\ &= x \sin x \end{aligned}$$

Exemplos de aplicação do método (II)

Ex: Calcule a integral da função $f(x) = x e^x$

Para transformar $x e^x dx$ numa forma diferencial exacta, escolhe-se uma “parte” na qual se reconhece uma forma exacta, por exemplo $e^x dx = d e^x$, identifica-se com $dF = e^x dx$ logo $F = e^x$ e a outra parte $x = G$

Obtem-se assim

$$\begin{aligned} d(x e^x) &= x d e^x + e^x dx \\ &= x e^x dx + d e^x \end{aligned}$$

Obtem-se a diferença de duas formas exactas e pela linearidade da derivada exterior

$$x e^x dx = d(x e^x - e^x)$$

Resulta então que

$$\begin{aligned} \int x e^x dx &= \int d(x e^x - e^x) \\ &= x e^x - e^x + C \end{aligned}$$

Ex: Calcule a integral da função $f(x) = x^2 e^x$

Como antes, identifica-se $dF = e^x dx = d e^x$, logo $F = e^x$ e $G = x^2$

Obtem-se assim

$$\begin{aligned} d(x^2 e^x) &= x^2 de^x + e^x dx \\ &= x^2 e^x dx + 2xe^x dx \end{aligned}$$

Do resultado anterior

$$2xe^x dx = d(2xe^x - 2e^x)$$

Obtem-se a diferença de duas formas exactas e pela linearidade da derivada exterior

$$x^2 e^x dx = d(x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x)$$

Resulta então que

$$\begin{aligned} \int x^2 e^x dx &= \int d(x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x) \\ &= x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + C \end{aligned}$$

E verifica-se de facto que

$$\begin{aligned} (x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + C)' &= \\ 2xe^x + x^2 e^x - 2e^x - 2xe^x + 2e^x + 0 &= \\ = x^2 e^x \end{aligned}$$

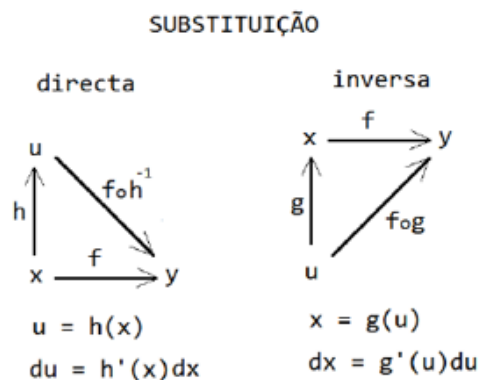
Integral por substituição

A derivada exterior de uma composição de funções $F \circ g$ onde $F(g)$ é diferenciável no respectivo domínio e $g(x)$ é uma bijecção diferenciável (difeomorfismo) num intervalo aberto $I \subseteq \mathbb{R}$

$$d(F \circ h) = F' dh = F' h' dx$$

pode ser muito útil para calcular formas diferenciais exactas.

Dada uma forma $f(x)dx$, procura-se um “pullback” do domínio de f , por intermédio de uma pós-composição $u=h(x)$ ou pré-composição $x=g(u)$, designadas de substituição directa e inversa respectivamente:



(I) Na substituição directa, faz-se $u=h(x)$ e $du=h'(x) dx$, transforma-se a forma dada em $(f(x)/h'(x)) h'(x) dx$ e usando a substituição $x=h^{-1}(u)$ na expressão $(f(x)/h'(x))$

para conseguir uma forma $K(u)du$ que porventura será reconhecida como uma forma diferencial exacta.

(II) Na substituição inversa, faz-se $x=g(u)$ e $dx=g'(u)du$, transforma-se a forma dada em $f(x)g'(u)du$ e usa-se a substituição $x=g(u)$ na expressão $f(x)g'(u)$ para conseguir uma forma $K(u)du$ que porventura será reconhecida como uma forma diferencial exacta.

Exemplos de aplicação do método I - substituição directa

Ex: Calcule a integral da função $f(x) = (1/(1+e^x))$

Deixe

$$u=e^x$$

Então

$$du=e^x dx$$

Como $u=e^x$ é um difeomorfismo possui inversa diferenciável

$$x=\ln u \quad \text{para } u>0$$

Usando a inversa na expressão $((f(x))/(h'(x))) = (1/((1+e^x)e^x))$ obtem-se

$$(1/((1+u)u)) = (1/u) - (1/(1+u)) \quad \text{cuja forma é reconhecível}$$

$$((1/u) - (1/(1+u)))du = d(\ln|u| - \ln|1+u|)$$

$$= d(\ln u - \ln(1+u)) \quad \text{pois } u>0$$

Integrando e substituindo de volta a variável x , obtem-se

$$\int (1/(1+e^x)) dx = \int ((1/u) - (1/(1+u))) du$$

$$= \int d(\ln u - \ln(1+u))$$

$$= \ln u - \ln(1+u) + C$$

$$= x - \ln(1+e^x) + C$$

Exemplos de aplicação do método II - substituição indirecta

Ex: Calcule a mesma integral da função $f(x) = (1/(1+e^x))$ (pelo método II)

Deixe

$$x=\ln u \quad \text{para } u>0$$

Então

$$dx=(1/u) du$$

Usando a substituição na expressão $f(x)g'(u) = (1/(1+e^x))(1/u)$ obtem-se $(1/((1+u)u)) = (1/u) - (1/(1+u))$ cuja forma é reconhecível

$$((1/u) - (1/(1+u)))du = d(\ln|u| - \ln|1+u|)$$

$$= d(\ln u - \ln(1+u)) \quad \text{pois } u>0$$

Integrando e substituindo de volta a variável x , obtem-se

$$\begin{aligned}\int (1/(1+e^x)) dx &= \int ((1/u) - (1/(1+u))) du \\ &= \int d(\ln u - \ln(1+u)) \\ &= \ln u - \ln(1+u) + C \\ &= x - \ln(1+e^x) + C\end{aligned}$$

Equações diferenciais ordinárias lineares de 1ª ordem

Uma equação diferencial linear de 1ª ordem é uma relação entre as formas diferenciais de duas variáveis x, t definidas num aberto $I \times J \subset \mathbb{R}^2$

$$E(x, t, dx, dt) = 0$$

Definindo explicitamente uma das variáveis em função da outra $x(t)$, obtem-se

$$(dx)/(dt) = f(x, t)$$

cuja solução é uma curva integral $x(t)$ definida num intervalo I .

No caso especial da função $f(x, t)$ ter a representação

$$(dx)/(dt) + p(t)x = q(t)$$

a equação diz-se linear

(I) Para o caso $p(t) = 0$

A equação diferencial reduz-se a

$$(dx)/(dt) = q$$

A expressão

$$dx = q dt$$

é uma forma diferencial exacta e pode ser integrada

$$\begin{aligned}\int q dt &= \int dx \\ &= x + C\end{aligned}$$

As curvas integrais da equação diferencial linear de 1ª ordem dependem do parametro C

$$x = \int q dt + C$$

Ex: Calcule as curvas integrais da equação diferencial $((dx)/(dt)) = te^{3t}$

Pelos exemplos anteriores, deixando

$$u = 3t \Rightarrow du = 3 dt$$

Obtem-se:

$$\begin{aligned} te^{3t} dt &= (u/9) e^u du \\ &= (1/9) ue^u dt \\ &= (1/9) d(ue^u - e^u) \\ x(t) &= \int te^{3t} dt \\ &= (1/9) \int d(ue^u - e^u) \\ &= ((e^u)/9) (u-1) + C \\ &= ((e^{3t})/9) (3t-1) + C \end{aligned}$$

(II) Para o caso $p(t) \neq 0$

Procura-se completar uma forma exacta na equação diferencial

$$(dx)/(dt) + px = q$$

Fazendo $p = (\mu' / \mu)$, para $\mu(t) \neq 0$ então ter-se-ia a derivada de um produto

$$\begin{aligned} (dx)/(dt) + (\mu' / \mu) x &= q \\ \mu (dx)/(dt) + \mu' x &= \mu q \\ (\mu x)' &= \mu q \end{aligned}$$

Com a forma diferencial exacta

$$d(\mu x) = \mu q dt$$

Privitivando:

$$\int d(\mu x) = \int \mu q dt$$

$$\mu x = \int \mu q dt$$

As curvas integrais são dadas por

$$x = \mu^{-1} \int \mu q dt + C \mu^{-1}$$

A função μ designa-se por factor integrante e pode ser calculada explicitamente a partir de $p = (\mu' / \mu)$, com $\mu(t) \neq 0$

$$\begin{aligned} (\mu' / \mu) dt &= p dt \\ \int d(\ln \mu) &= \int p dt \end{aligned}$$

Resulta em

$$\ln \mu = \int p dt$$

$$\mu = e^{\int p dt}$$

Ex: Calcule as curvas integrais da EDO linear de 1ª ordem dada por

$$x' - (1/t)x = -t$$

Identificando

$$p = -(1/t)$$

$$q = -t$$

Obtem-se

$$\mu = e^{\int -(1/t) dt}$$

$$= e^{-\ln|t|}$$

$$= (1/(|t|)) \text{ para } t \neq 0$$

Logo

$$x = \mu^{-1} \int \mu q dt + C \mu^{-1}$$

$$= -|t| \int (t/(|t|)) dt + C|t|$$

Para $t > 0$

$$x = -t \int dt + Ct$$

$$= -t^2 + Ct$$

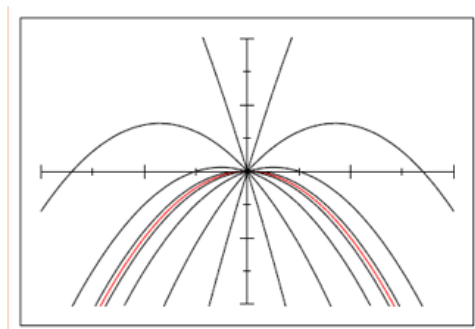
$$= t(C - t)$$

Para $t < 0$

$$x = t \int (-1) dt - Ct$$

$$= -t^2 - Ct$$

$$= -t(C + t)$$



Conclusão

Nesta unidade foram apresentadas as definições e propriedades das operações de primitivação (antidiferenciação) de funções, da derivada exterior das formas diferenciais e da integração de formas diferenciais. Também foram apresentadas técnicas de integração de formas diferenciais e relacionou-se esta matéria com a resolução de equações diferenciais ordinárias de 1ª ordem.

Avaliação

Agrupe um mínimo de 5 e um máximo de 10 das perguntas seguintes em cada teste de avaliação de 1 hora, sem consultas.

Escolha perguntas-tipo diferentes na preparação de cada teste, mudando os parâmetros e dados de base para evitar colagens.

Cada pergunta vale entre 10% e 20%, conforme o número de perguntas seleccionadas.

1. **Pergunta:** Efectue as seguintes primitivações: $\int (2 / ([3]\sqrt[3]{x})) dx$

Resposta:

$$\begin{aligned}\int (2 / ([3]\sqrt[3]{x})) dx &= 2 \int x^{-1/3} dx \\ &= 2 ((x^{2/3}) / (2/3)) + c \\ &= 3 [3]\sqrt[3]{x^2} + c\end{aligned}$$

Verificação: $(d/(dx)) (3 [3]\sqrt[3]{x^2} + c) = (2 / ([3]\sqrt[3]{x}))$

2. **Pergunta:** Efectue as seguintes primitivações: $\int \sqrt{x(x+1)} dx$

Resposta:

$$\begin{aligned}\int \sqrt{x(x+1)} dx &= \int (x^{3/2} + x^{1/2}) dx \\ &= ((x^{5/2}) / (5/2)) + ((x^{3/2}) / (3/2)) + c \\ &= (2/5) x^2 \sqrt{x} + (2/3) x \sqrt{x} + c\end{aligned}$$

Verificação: $(d/(dx)) ((2/5) x^2 \sqrt{x} + (2/3) x \sqrt{x} + c) = \sqrt{x(x+1)}$

3. **Pergunta:** Efectue as seguintes primitivações: $\int (1/2) t \cos 4t^2 dt$

Resposta: $\int (1/2) t \cos 4t^2 dt$

Deixa $u=4t^2 \Rightarrow du=8t dt$

$$\begin{aligned}\int (1/2) t \cos 4t^2 dt &= (1/(16)) \int \cos u du \\ &= (1/(16)) \sin u + c \\ &= (1/(16)) \sin 4t^2 + c\end{aligned}$$

Verificação: $(d/(dt)) ((1/(16)) \sin 4t^2 + c) = (1/2) t \cos 4t^2$

4. **Pergunta:** Efectue as seguintes primitivações: $\int [3]\sqrt[3]{(6-2x)} dx$

Resposta: $\int [3]\sqrt[3]{(6-2x)} dx$

Deixe $u=6-2x \Rightarrow du=-2dx$

$$\begin{aligned}\int [3]\sqrt[3]{(6-2x)} dx &= - (1/2) \int [3]\sqrt[3]{(6-2x)} (-2dx) \\ &= - (1/2) \int [3]\sqrt[3]{(u)} (du) \\ &= - (1/2) \int u^{1/3} du \\ &= - (1/2) ((u^{4/3}) / (4/3)) + c \\ &= - (3/8) (6-2x) [3]\sqrt[3]{(6-2x)} + c\end{aligned}$$

Verificação: $(d/(dx)) (- (3/8) (6-2x) [3]\sqrt[3]{(6-2x)} + c) = [3]\sqrt[3]{(6-2x)}$

5. **Pergunta:** Efectue as seguintes primitivações: $\int \sec^2 5x dx$

Resposta:

$$\begin{aligned}\int \sec^2 5x dx &= (1/5) \int \sec^2 5x (5dx) \\ &= (1/5) \int \sec^2 u du \\ &= (1/5) \tan u + c \\ &= (1/5) \tan 5x + c\end{aligned}$$

Verificação: $(d/(dx)) ((1/5) \tan 5x + c) = \sec^2 5x$

6. **Pergunta:** Efectue as seguintes primitivações: $\int ((x(3x^2+1)) / ((3x^2+2x^2+1)^2)) dx$

Resposta: $\int ((x(3x^2+1)) / ((3x^2+2x^2+1)^2)) dx$

Deixa $u=3x^3+2x^2+1 \Rightarrow du=4(3x^2+x) dx$

$$\begin{aligned}\int ((x(3x^2+1)) / ((3x^2+2x^2+1)^2)) dx &= (1/4) \int ((4(3x^2+x) dx) / ((3x^2+2x^2+1)^2)) \\ &= (1/4) \int ((du) / (u^2)) \\ &= (1/4) \int u^{-2} du \\ &= (1/4) ((u^{-1}) / (-1)) + c \\ &= - (1 / (4(3x^2+2x^2+1))) + c\end{aligned}$$

Verificação: $(d/(dx)) (- (1 / (4(3x^2+2x^2+1))) + c) = ((3x^2+x) / ((3x^2+2x^2+1)^2))$

7. **Pergunta:** Efectue as seguintes primitivações: $\int (t + (1/t))^{\{3/2\}} ((t^2-1) / (t^2)) dt$

Resposta: $\int (t + (1/t))^{\{3/2\}} ((t^2-1) / (t^2)) dt = \int (t + (1/t))^{\{3/2\}} (1 - (1/t^2)) dt$

$$\text{Deixa } u=t+(1/t) \quad \square du=(1-(1/(t^2))) dt$$

$$\int (t+(1/t))^{3/2} (1-(1/(t^2))) dt = \int u^{3/2} du$$

$$= ((u^{5/2}) / (5/2)) + c$$

$$= (2/5)(t+(1/t))^{5/2} + c$$

$$\text{Verificação: } (d/(dt)) ((2/5) (t+(1/t))^{5/2} + c) = ((t^2+1)/t)^{3/2} ((t^2-1)/(t^2))$$

8. Pergunta: Encontre a solução da equação diferencial:

$$((dy)/(dx)) = ((\sec^2 x) / (\tan^2 x))$$

$$\text{Resposta: } ((dy)/(dx)) = ((\sec^2 x) / (\tan^2 x))$$

$$dy = (((dy)/(dx))) dx$$

$$= (((\sec^2 x) / (\tan^2 x))) dx$$

$$= (1/(u^2)) du \quad \square u=\tan x \quad \square du=\sec^2 x dx$$

$$= d((-1)/u)$$

Logo

$$y = (-1/u) + c$$

$$= -(1/(\tan x)) + c$$

$$= -\cot x + c$$

$$\text{Verificação: } (d/(dx)) (-\cot x + c) = \cot^2 x + 1 = ((1+\tan^2 x) / (\tan^2 x)) = ((\sec^2 x) / (\tan^2 x))$$

9. Pergunta: Encontre a solução da equação diferencial determinada pelas condições iniciais:

$$((dy)/(dx)) = x^2 - 2x - 4; \text{ condições iniciais: } y = -6 \text{ quando } x = 3$$

Resposta:

$$dy = (((dy)/(dx))) dx$$

$$= (x^2 - 2x - 4) dx$$

$$= d((x^3)/3 - x^2 - 4x)$$

Logo

$$y = ((x^3)/3) - x^2 - 4x + c$$

Substituindo a condição inicial

$$-6 = (((3)^3)/3) - (3)^2 - 4(3) + c \quad \square c = 6$$

Logo

$$y = (x^3)/3 - x^2 - 4x + 6$$

Atividade 3.2 - Séries numéricas

Introdução

Antes de apresentar a integral de Riemann, faz-se uma pequena digressão sobre somatórios, somas infinitas e séries numéricas. Testes da natureza de séries. Série de termos positivos. Séries alternadas, convergência absoluta e condicional. Outros testes de convergência.

Detalhes da atividade

A soma sucessiva de n termos de uma sequência é designada pelo símbolo do somatório

$$\sum_{k=1}^n a_k$$

onde o índice mudo do somatório, k , indica a posição da parcela na soma e toma valores em $\mathbb{N}$, com início no valor indicado por baixo do símbolo do somatório e término no valor indicado em cima desse símbolo.

As seguintes propriedades do somatório são demonstradas a partir das propriedades da soma:

- $\sum_{k=1}^n (\lambda a_k + \beta b_k) = \lambda \sum_{k=1}^n a_k + \beta \sum_{k=1}^n b_k$
linearidade
- $\sum_{k=p}^n (a_k - a_{k-p}) = (a_n + \dots + a_{n-p+1}) - (a_p + \dots + a_1)$
desfasamento de p termos
- $\sum_{j=1}^n a_j \sum_{k=1}^n b_k = \sum_{k=1}^n (a_k b_k + a_k b_{k-1} + \dots + a_k b_1)$
multiplicação

Nota: A substituição do índice do somatório é tão frequente que se faz usando o mesmo índice mudo, desde que o valor e a ordem dos termos a somar se mantenham invariantes.

Para qualquer $n \in \mathbb{N}$ tem-se que:

1. $\sum_{k=1}^n k = (n(n+1))/2$
2. $\sum_{k=1}^n k^2 = (n(n+1)(2n+1))/6$
3. $\sum_{k=1}^n k^3 = (n^2(n+1)^2)/4$
4. $\sum_{k=1}^n k^4 = (n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1))/(30)$

A demonstração é feita da seguinte maneira:

1. Tem-se que

$$\sum_{k=1}^n [k + (n - (k-1))] = \sum_{k=1}^n (n+1) = n(n+1)$$

Mas

$$\sum_{k=1}^n (n - (k-1)) = \sum_{k=1}^n k$$

somando de trás para a frente. Logo

$$\sum_{k=1}^n (n+1) = 2 \sum_{k=1}^n k$$

e o resultado segue.

2. Demonstração por indução:

Para $n=1$ tem-se $\sum_{k=1}^1 k^2 = 1 = ((1(1+1)(2+1))/6) = 1$

Supondo a expressão válida para n

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k^2 + (n+1)^2 &= \sum_{k=1}^n k^2 + (n+1)^2 \\ &= ((n(n+1)(2n+1))/6) + (n+1)^2 \\ &= ((n+1)(2n^2+7n+6))/6 \\ &= ((n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1))/6 \end{aligned}$$

3. e (4) também se prova por indução.

Somas infinitas e séries numéricas

Recorde-se alguns factos sobre sequências de números reais.

Uma sequência é uma função $(x_n) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, o conjunto dos seus termos é representado por $\{x_n\}$ e o seu termo geral é x_n .

A natureza (convergente ou não) de uma sequência (x_n) é determinada pelo comportamento da sua “cauda”, não sendo afectado por qualquer parte inicial finita:

Para $k \in \mathbb{N}$, se $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+k} = L$ então $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = L$

Algumas sequências notáveis, estudadas anteriormente, são listadas com índice $n \in \mathbb{N}$:

- $x_n = rn$ (progressão aritmética), onde r é uma constante
- $x_n = r^n$ (progressão geométrica de razão r)
- $x_n = (1/n)$ (harmónica)
- $x_n = (1/(n^p))$ (p-harmónica)
- $x_n = (1/(n!))$ (exponencial)
- $x_n = u_n - u_{n+p}$ (Mengoli)

A soma (infinita) de todos os termos de uma sequência (x_n) chama-se uma série (infinita) formal

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k = x_1 + x_2 + x_3 + \dots$$

Para determinar quando é que a soma de um número infinito de parcelas existe estuda-se a sequência de somas parciais de uma sequência.

A soma cumulativa dos termos da sequência dada (x_n) é ela própria uma sequência de somas parciais (s_n) cujo termo geral é dado por

$$s_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n = \sum_{k=1}^n x_k$$

O limite das somas parciais, quando existe, é definido como a soma da série e a série diz-se convergente,

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n x_k$$

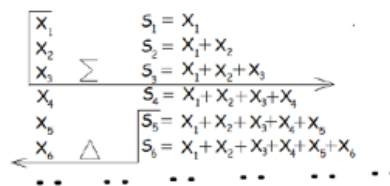
Quando o limite não existe a série diz-se divergente.

De modo recíproco, a diferença (posterior) entre termos consecutivos de uma sequência (s_n) resulta numa sequência associada (x_n) cujos termos são dados recursivamente por

$$x_n = \Delta s_n = s_n - s_{n-1} \quad \text{para } n \in \mathbb{N}$$

x_0 é arbitrário

Em certo sentido, os operadores Σ e Δ são inversos um do outro, pois



Ex: A sequência dada pelo termo geral $x_n = (1 / (2^n))$ determina uma sequência de somas parciais

$$s_n = \sum_{k=1}^n (1 / (2^k))$$

O limite existe em $\mathbb{R}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (1 / (2^k)) = 1$$

Ex: A sequência dada pelo termo geral $x_n = (1/n)$ determina uma sequência de somas parciais

$$s_n = \sum_{k=1}^n (1/k)$$

O limite não existe em $\mathbb{R}$ (será demonstrado mais à frente)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (1/k) = \infty$$

Porquê a soma infinita de parcelas existe no primeiro caso e não no segundo?

Condições de convergência

(Condição necessária da convergência) Se a série $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ for convergente, então $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$

Para a demonstração, deixe $s_n = \sum_{k=1}^n x_k$

Por hipótese

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$$

Então qualquer subsequência, e em particular a subsequência $s_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} x_k$ que exclui apenas o primeiro termo de s_n possui o mesmo limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_{n+1} = s$$

Segue que $\forall \varepsilon > 0$

$$\exists N: n > N \Rightarrow |s_n - s| < (\varepsilon/2)$$

$$\exists N: n > N \Rightarrow |s_{n+1} - s| < (\varepsilon/2)$$

Logo

$$\begin{aligned} |x_{n+1}| &= |s_{n+1} - s_n| \\ &= |s_{n+1} - s_n + s - s| \\ &= |(s_{n+1} - s) - (s_n - s)| \\ &\leq |s_{n+1} - s| + |s_n - s| \\ &< (\varepsilon/2) + (\varepsilon/2) = \varepsilon \end{aligned}$$

Provando que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$$

A condição $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ é necessária para a convergência $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$, mas não é suficiente como mostram os dois exemplos acima:

- No primeiro exemplo $(1/(2^n)) \rightarrow 0$ e $\sum_{k=1}^{\infty} (1/(2^k)) = 1$
- Mas no segundo exemplo $(1/n) \rightarrow 0$ mas $\sum_{k=1}^{\infty} (1/k)$ diverge.
-

(Condição suficiente de divergência)

O contra-recíproco da proposição anterior estabelece uma condição suficiente de divergência:

Se $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \neq 0$ então $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ é divergente.

Uma série converge se a sequência de somas parciais for convergente, por conseguinte, as mesmas condições de convergência de sequências podem ser usadas para determinar as condições de convergência de uma sequência das somas parciais.

(Condição necessária e suficiente de convergência) Uma série $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ converge em $\mathbb{R}$, sse a sequência de somas parciais (s_n) for uma sequência Cauchy

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N: m, n > N$$

$$|s_m - s_n| < \varepsilon$$

$$|x_{m+1} + x_{m+2} + \dots + x_n| < \varepsilon$$

Na demonstração, verifique que qualquer sequência convergente é Cauchy e como $\mathbb{R}$ é completo, logo qualquer sequência Cauchy converge.

Pela contra-recíproca, se (s_n) não for Cauchy, então $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ não converge.

Séries notáveis

As somas parciais dos termos das sequências notáveis resulta nas seguintes sequências, listadas com o índice mudo $k=1, \dots, n$:

$$\text{aritmética, } r \text{ constante: } s_n = \sum_{k=1}^n kr = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right) r$$

$$\text{geométrica: } s_n = \sum_{k=1}^n r^k = \left(\frac{r - r^{n+1}}{1-r} \right)$$

$$\text{harmónica: } s_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} \right)$$

$$\text{p-harmónica: } s_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k^p} \right)$$

$$\text{exponencial: } s_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k!} \right)$$

$$\text{Mengoli (diferença duma sequência com um desfazamento } p \text{ dela própria): } \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n (u_k - u_{k+p})$$

Qual é o limites destas sequências de somas parciais e em que casos é que existem?

A série aritmética $\sum_{k=1}^{\infty} kr$ converge apenas se $r=0$, pois a sequência kr diverge para qualquer $r \neq 0$

A série harmónica $\sum_{k=1}^{\infty} (1/k)$ é divergente.

Para provar, considere a diferença da subsequência $s_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} (1/k)$ com s_n

$$\begin{aligned} s_{2n} - s_n &= \sum_{k=1}^{2n} \left(\frac{1}{k} \right) - \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} \right) = \sum_{k=n+1}^{2n} \left(\frac{1}{k} \right) \\ &= \left(\frac{1}{n+1} \right) + \left(\frac{1}{n+2} \right) + \dots + \left(\frac{1}{2n} \right) \\ &> \left(\frac{1}{2n} \right) + \left(\frac{1}{2n} \right) + \dots + \left(\frac{1}{2n} \right) \\ &= \left(\frac{n}{2n} \right) = \left(\frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

$$\text{Então } \forall n, |s_{2n} - s_n| > (1/2)$$

Logo (s_n) não pode ser Cauchy, o que prova que não é convergente.

A série geométrica $\sum_{k=1}^{\infty} r^k$ converge para $(r/(1-r))$ se $|r| < 1$ e diverge caso contrário.

Para provar, deixe

$$s_n = \sum_{k=1}^n r^k$$

recorde-se a igualdade já provada por indução

$$(1-r^{n+1}) = (1-r)(1+r+r^2+r^3+\dots+r^n)$$

manipulando um pouco obtém-se

$$s_n = \sum_{k=1}^n r^k = (r - r^{n+1}) / (1-r)$$

Logo se $|r| < 1$ então $\lim_{n \rightarrow \infty} r^{n+1} = 0$ logo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (r - r^{n+1}) / (1-r) = r / (1-r)$$

e se $|r| \geq 1$ o limite não existe.

A série de Mengoli, $\sum_{k=1}^n a_n = \sum_{k=1}^n (u_k - u_{k+p})$, é convergente se $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = L$ e divergente se $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \pm \infty$. Mais ainda, a soma é dada por

$$\sum_{k=1}^{\infty} (u_k - u_{k+p}) = u_1 + \dots + u_p - p \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$$

Para provar, se $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = L$ então $\lim_{n \rightarrow \infty} u_{n+p} = L$ para qualquer p

Então $\sum_{k=1}^n a_n$ é Cauchy, logo converge.

Pela propriedade "telescópica" apenas os p termos iniciais e os p termos finais permanecem na soma:

$$\sum_{k=1}^n (u_k - u_{k+p}) = (u_1 + \dots + u_p) - (u_{n+1} + \dots + u_{n+p})$$

E o limite segue.

Ex: Determine a natureza da série $\sum_{n=1}^{\infty} (1 / (n(n+3)))$ e se for convergente calcule a soma.

Parcializando a fracção, obtêm-se

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 / (n(n+3))) = (1/3) \sum_{n=1}^{\infty} ((1/n) - (1 / ((n+3))))$$

Como $\lim_{n \rightarrow \infty} (1/n) = 0$ então $\sum_{n=1}^{\infty} (1 / (n(n+3)))$ converge.

A soma obtém-se

$$\sum_{n=1}^{\infty} ((1/n) - (1 / ((n+3)))) = 1 + (1/2) + (1/3) - 3(0) = (11) / 6$$

Natureza das séries

A convergência ou divergência de séries constitui a sua natureza.

A natureza das séries pode ser determinada comparando-as com as séries notáveis, cuja natureza foi já determinada.

Duas séries $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ e $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ que diferem apenas num número finito de termos, são da mesma natureza (ou ambas divergem ou ambas convergem).

A demonstração resulta de proposição semelhante sobre sequências aplicada a $U_n = \sum_{k=1}^n u_k$ e $V_n = \sum_{k=1}^n v_k$, que também são sequências (de somas parciais).

A soma ou multiplicação de uma série por uma constante não altera a natureza da série;

A combinação linear de qualquer série com uma série convergente não altera a sua natureza inicial.

Ex: $\sum_{k=1}^{\infty} (c/k)$ é divergente para qualquer $c \in \mathbb{R}$, pois

$$\sum_{k=1}^{\infty} (c/k) = c \sum_{k=1}^{\infty} (1/k)$$

e $\sum_{k=1}^{\infty} (1/k)$ é divergente.

Série de termos positivos, testes de comparação

Numa série de termos positivos $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, como o nome indica, as parcelas são positivas: $a_k \geq 0, k \in \mathbb{N}$.

Uma série de termos positivos converge sse a sua sequência de somas parciais for majorada.

Para a demonstração note que uma sequência de somas parciais de termos positivos é crescente, logo converge sse for majorada.

Ex: A sequência de somas parciais da série exponencial pode ser comparada com a sequência de somas parciais da série geométrica e como $(1/(k!)) \leq (1/(2^{k-1}))$ para qualquer k , resulta que

$$\sum_{k=1}^n (1/(k!)) \leq \sum_{k=1}^n (1/(2^{k-1})) < 2$$

Logo $\sum_{k=1}^{\infty} (1/(k!))$ é convergente.

A natureza de uma série de termos positivos pode ser determinada por comparação com séries de termos positivos cuja natureza é conhecida.

(Teste de comparação) Seja $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ uma série de termos positivos,

Se $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ for uma série convergente (de termos positivos) e eventualmente $u_n \leq v_n$ então $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ é convergente;

Se $\sum_{k=1}^{\infty} w_k$ for uma série divergente (de termos positivos) e eventualmente $w_n \leq u_n$ então $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ é divergente;

Ex: Determine a natureza da série $\sum_{k=1}^{\infty} (1/(\sqrt{k}))$

Como $(1/n) \leq (1/(\sqrt{n}))$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$ e $\sum_{k=1}^{\infty} (1/k)$ é divergente, logo $\sum_{k=1}^{\infty} (1/(\sqrt{k}))$ é também divergente.

A determinação da natureza também pode ser feita comparando a ordem de convergência das suas sequências associadas (u_n) e (v_n) .

(Comparação de limites) Sejam $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ e $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ duas séries de termos positivos

Se $\lim_{n \rightarrow \infty} ((u_n) / (v_n)) = c > 0$, ou seja se $(u_n) \sim (v_n)$, então as duas séries possuem a mesma natureza, ;

Se $\lim_{n \rightarrow \infty} ((u_n) / (v_n)) = 0$, ou seja se $(u_n) = o(v_n)$, então se $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ converge, $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ converge;

Se $\lim_{n \rightarrow \infty} ((u_n) / (v_n)) = +\infty$, ou seja se $(u_n) \sim \omega(v_n)$, então se $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ diverge, $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ diverge;

Ex: A série p-harmónica $\sum_{k=1}^{\infty} (1 / (k^p))$, diverge para $p \leq 1$ e converge para $p > 1$

Se $p=1$ a série é harmónica e diverge como já visto.

Se $p < 1$ então $n \geq n^p \Rightarrow (1/n) \leq (1 / (n^p))$, logo, como $\sum_{k=1}^{\infty} (1/k)$ é divergente, $\sum_{k=1}^{\infty} (1 / (k^p))$ também será divergente.

Se $p > 1$ agrupa-se a série da seguinte forma

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1 / (k^p)) = (1 / (1^p)) + ((1 / (2^p)) + (1 / (3^p))) + ((1 / (4^p)) + \dots + (1 / (7^p))) + ((1 / (8^p)) + \dots + (1 / (15^p))) + \dots$$

e compara-se com a série

$$\sum_{k=1}^{\infty} ((2^{k-1}) / ((2^{k-1})^p)) = (1 / (1^p)) + ((1 / (2^p)) + (1 / (2^p))) + ((1 / (4^p)) + \dots + (1 / (4^p))) + ((1 / (8^p)) + \dots + (1 / (8^p))) + \dots$$

Verifica-se que

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} (1 / (k^p)) &\leq \sum_{k=1}^{\infty} ((2^{k-1}) / ((2^{k-1})^p)) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (1 / ((2^{k-1})^{p-1})) \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (1 / ((2^{p-1})^k)) \\ &= 1 + (1 / (1 - 2^{p-1})) \\ &= ((2 - 2^{p-1}) / (1 - 2^{p-1})) \end{aligned}$$

Logo $\sum_{k=1}^{\infty} (1 / (k^p))$ é convergente para $p > 1$.

Se uma série de termos positivos for convergente, o rearranjo dos seus termos não altera a sua natureza.

Isto não se verifica em determinadas séries alternadas como se verá mais à frente!

Séries alternadas, convergência absoluta e condicional

Séries $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$ ou $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k$ onde $a_n > 0$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$ chamam-se séries alternadas.

(Teste das séries alternadas) Em séries alternadas $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k$, se eventualmente $a_{n+1} \leq a_n$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, então a série alternada converge.

Para a demonstração, somando em s_n todos os termos (em número finito) tal que $a_{\{k\}} \leq 0$ e $a_{\{k+1\}} > a_{\{k\}}$, renomeie a subsequência de somas parciais de forma a que $a_{\{n\}} > 0$ e $a_{\{n+1\}} \leq a_{\{n\}}$ para $n \in \mathbb{N}$

Agrupando os termos de uma maneira obtém-se

$$s_{\{2n\}} = (a_1 - a_1) + (a_2 - a_1) + \dots + (a_{\{2n-1\}} - a_{\{2n\}})$$

e como $a_{\{n+1\}} < a_{\{n\}}$ para $n \in \mathbb{N}$ então $0 < s_1 < s_2 < \dots < s_{\{2n\}} < \dots$, logo $s_{\{2n\}}$ é crescente

Agrupando os termos de outra maneira $s_{\{2n\}} = a_1 - (a_1 - a_1) - (a_2 - a_1) - \dots - (a_{\{2n-2\}} - a_{\{2n-1\}}) - a_{\{2n\}}$

obtem-se que $s_{\{2n\}} < a_1$ para qualquer $n \in \mathbb{Z}$, logo $s_{\{2n\}}$ é limitado.

Resulta que a sequência $(s_{\{n\}})$ é limitada. Deixe $\lim_{\{n \rightarrow \infty\}} s_{\{2n\}} = S \leq a_1$

Como $s_{\{2n+1\}} = s_{\{2n\}} + a_{\{2n+1\}}$

Então $\lim_{\{n \rightarrow \infty\}} s_{\{2n+1\}} = \lim_{\{n \rightarrow \infty\}} s_{\{2n\}} = S$ por hipótese $\lim_{\{n \rightarrow \infty\}} a_{\{n\}} = 0$

Então para qualquer $\varepsilon > 0$, existe $N_1 > 0$ tal que se $2n > N_1$ então $|s_{\{2n\}} - S| < \varepsilon$

E também existe $N_2 > 0$ tal que se $2n+1 > N_2$ então $|s_{\{2n+1\}} - S| < \varepsilon$

Se $N > \max\{N_1, N_2\}$ então se $n > N$ segue que $|s_{\{n\}} - S| < \varepsilon$

Logo $\lim_{\{n \rightarrow \infty\}} s_{\{n\}} = S$.

Ex: A série $\sum_{\{k=1\}}^{\{\infty\}} (-1)^{\{k\}}$ é divergente pois $\lim_{\{n \rightarrow \infty\}} 1 \neq 0$.

Apesar da soma da série, quando agrupada numa maneira ser nula!

$$\begin{aligned} \sum_{\{k=1\}}^{\{\infty\}} (-1)^{\{k\}} &= (-1+1) + (-1+1) + (-1+1) + \dots \\ &= 0+0+0+\dots \\ &= 0 \end{aligned}$$

Mas, a soma da série quando agrupada de outra maneira, tem outro valor!

$$\begin{aligned} \sum_{\{k=1\}}^{\{\infty\}} (-1)^{\{k\}} &= -1 + (1-1) + (1-1) + \dots \\ &= -1+0+0+0+\dots \\ &= -1 \end{aligned}$$

O limite da sequência das somas parciais não existe porque oscila

$$\lim_{\{n \rightarrow \infty\}} \sum_{\{k=1\}}^n (-1)^{\{k\}} \text{ não existe}$$

Uma série infinita $\sum_{\{k=1\}}^{\{\infty\}} a_{\{k\}}$ é absolutamente convergente sse a série $\sum_{\{k=1\}}^{\{\infty\}} |a_{\{k\}}|$ for convergente.

Uma série convergente mas não absolutamente convergente diz-se condicionalmente convergente.

Ex: A série $\sum_{\{k=1\}}^{\{\infty\}} ((-1)^{\{k\}})/k$ é convergente pois $0 < (1/(k+1)) < (1/k)$ para

qualquer $k \in \mathbb{N}$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} (1/n) = 0$.

Mas não é absolutamente convergente pois $\sum_{k=1}^{\infty} (1/k)$ é divergente.

Logo ela é condicionalmente convergente.

(Teorema de Riemann) Se uma série for condicionalmente convergente então, por um rearranjo dos termos da série, a sua soma pode ser ajustada para qualquer valor arbitrário e, mais ainda, pode ser tornada divergente ou até oscilante.

Para a demonstração, deixe $x_{\{p\}}$ ser a soma dos primeiros p termos positivos e $-y_{\{n\}}$ ser a soma dos primeiros n termos negativos.

Para $p \rightarrow \infty$ e $n \rightarrow \infty$ segue que

$$\lim_{p \rightarrow \infty} (x_{\{p\}} - y_{\{n\}}) = s \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (x_{\{p\}} + y_{\{n\}}) = \infty$$

Logo:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} x_{\{p\}} = \infty \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_{\{n\}} = \infty$$

Para ajustar a soma da série para um valor σ , escolha-se o menor p_0 até ter $x_{\{p_0\}} > \sigma$. Da mesma maneira se pode escolher o menor n_0 até ter $y_{\{n_0\}} > x_{\{p_0\}} - \sigma$. No rearranjo colocam-se os primeiros p_0 termos positivos na sua ordem original, seguidos de n_0 termos negativos, também na sua ordem original.

Se $S_{\{v\}}$ é a soma de v termos, então

$$S_{\{v\}} < \sigma \quad \text{se} \quad v < p_0$$

mas

$$S_{\{v\}} > \sigma \quad \text{se} \quad p_0 \leq v < p_0 + n_0$$

Continua-se o processo colocando o terceiro grupo de $(p_0 - p_0)$ termos positivos, onde p_0 é o menor índice tal que $x_{\{p_0\}} > y_{\{n_0\}} + \sigma$ e o quarto grupo de $(n_0 - n_0)$ termos negativos onde n_0 é o menor índice tal que $y_{\{n_0\}} > x_{\{p_0\}} - \sigma$.

Continuando dessa forma, é claro que se $p_{\{r\}} + n_{\{r\}} > v \geq p_{\{r\}} + n_{\{r-1\}}$ então $S_{\{v\}} - \sigma$ é positivo mas não ultrapassa o $(p_{\{r\}} + n_{\{r-1\}})^{\{th\}}$ termo da série.

Enquanto que se $p_{\{r+1\}} + n_{\{r\}} > v \geq p_{\{r\}} + n_{\{r\}}$ então $\sigma - S_{\{v\}}$ é positivo e não ultrapassa o $(p_{\{r\}} + n_{\{r\}})^{\{th\}}$ termo da série.

Como os termos da série tendem a zero quando v aumenta, tem-se

$$\lim_{v \rightarrow \infty} S_{\{v\}} = \sigma$$

Para tornar a soma divergente ou oscilante, toma-se uma sequência divergente ou oscilante $(\sigma_{\{r\}})$ e tomam-se os valores de $p_0, n_0, \dots$ de maneira a serem os primeiros índices a satisfazer

$$x_{\{p_0\}} > \sigma_0$$

$$y_{\{n\}} > x_{\{p\}} - \sigma$$

$$x_{\{p\}} > y_{\{n\}} + \sigma$$

$$y_{\{n\}} > x_{\{p\}} - \sigma$$

e assim por diante.

Se uma série $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\{k\}}$ for absolutamente convergente então ela é convergente e

$$|\sum_{k=1}^{\infty} a_{\{k\}}| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_{\{k\}}|$$

Na prova, como $|a_{\{k\}}|$ é igual a $a_{\{k\}}$ ou a $-a_{\{k\}}$ tem-se para qualquer $k \in \mathbb{N}$ que

$$0 \leq a_{\{k\}} + |a_{\{k\}}| \leq 2|a_{\{k\}}|$$

Então

$$0 \leq \sum_{k=1}^{\infty} (a_{\{k\}} + |a_{\{k\}}|) \leq 2 \sum_{k=1}^{\infty} |a_{\{k\}}|$$

Por hipótese e pelo teste da comparação, resulta que $\sum_{k=1}^{\infty} (a_{\{k\}} + |a_{\{k\}}|)$ é convergente.

Logo $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\{k\}} = \sum_{k=1}^{\infty} (a_{\{k\}} + |a_{\{k\}}|) - \sum_{k=1}^{\infty} |a_{\{k\}}|$ é convergente, provando a primeira parte.

Como $S = \sum_{k=1}^{\infty} a_{\{k\}} \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_{\{k\}}| = L$

logo $S \leq L$

Também segue que $-S = -\sum_{k=1}^{\infty} (a_{\{k\}}) \leq \sum_{k=1}^{\infty} |-a_{\{k\}}| = L$

logo $-S \leq L$

Das duas desigualdades, $S \leq L$ e $S \geq -L$ resulta que $|S| \leq L$,

$$|\sum_{k=1}^{\infty} a_{\{k\}}| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_{\{k\}}|$$

Outros testes de convergência

O teste da razão ou D'Alembert é útil para determinar a natureza de séries onde o índice aparece como factorial, bem como para determinar a convergência absoluta de uma série:

Seja $\sum_{k=1}^{\infty} u_{\{k\}}$ uma série tal que $u_{\{k\}} \neq 0, \forall k \in \mathbb{N}$.

Se $\lim_{n \rightarrow \infty} |(u_{\{n+1\}})/(u_{\{n\}})| = L < 1$ a série é absolutamente convergente;

Se $\lim_{n \rightarrow \infty} |(u_{\{n+1\}})/(u_{\{n\}})| = L > 1$ ou então se $\lim_{n \rightarrow \infty} |(u_{\{n+1\}})/(u_{\{n\}})| = +\infty$, a série diverge;

Se $\lim_{n \rightarrow \infty} |(u_{\{n+1\}})/(u_{\{n\}})| = 1$ o teste é inconclusivo;

Na demonstração, deixe r tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} |(u_{\{n+1\}})/(u_{\{n\}})| = L < r < 1$

Eventualmente, ou seja, a partir de algum índice N , tem-se

$$|((u_{n+1})/(u_n))| < r \quad \text{para } n > N$$

Então para sucessivos valores $N, N+1, \dots$ tem-se

$$|u_{N+1}| < |u_N| r$$

$$|u_{N+2}| < |u_{N+1}| r < |u_N| r^2$$

□

$$|u_{N+k}| < |u_N| r^k, \quad \forall k \geq 1$$

Resulta que $\sum_{k=1}^{\infty} |u_{N+k}| < \sum_{k=1}^{\infty} |u_N| r^k$

E como a série $\sum_{k=1}^{\infty} |u_N| r^k$ é geométrica com $|r| < 1$, então é convergente, logo $\sum_{k=1}^{\infty} |u_{N+k}| = \sum_{k=N+1}^{\infty} |u_k|$ é convergente.

Conclui-se que $\sum_{k=1}^{\infty} |u_k|$ é também convergente pois um número finito de parcelas não altera a natureza de uma série.

No segundo caso, se $\lim_{n \rightarrow \infty} |(u_{n+1})/(u_n)| = L > 1$ então existe N tal que

$$|((u_{n+1})/(u_n))| > 1 \quad |u_{n+1}| > |u_n| \quad \text{para } n > N$$

Logo $\lim u_n \neq 0$ e $\sum_{k=1}^{\infty} |u_k|$ diverge.

Ex: Aplicando o teste da razão a série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n ((n^3)/(3^n))$, obtém-se

$$|((u_{n+1})/(u_n))| = |((-1)^{n+1} ((n+1)^3)/(3^{n+1})) / ((-1)^n ((n^3)/(3^n)))|$$

$$= |(3^n (n+1)^3)/(3^{n+1} n^3)|$$

$$= (1/3) ((n+1)/n)^3$$

$$= (1/3) (1 + (1/n))^3 \rightarrow (1/3)$$

Logo a série é absolutamente convergente e logo convergente.

O teste da raiz ou de Cauchy é útil para determinar a natureza de séries onde o índice aparece no expoente, bem como para determinar a convergência absoluta de uma série:

Para uma série $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$

Se $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n|} = L < 1$ a série é absolutamente convergente;

Se $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n|} = L > 1$ ou então se $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n|} = +\infty$, a série diverge;

Se $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n|} = 1$ o teste é inconclusivo;

(Critério Dirichlet) Seja $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ uma série tal que $u_k \geq 0, \forall k \in \mathbb{N}$. Calcule-se, caso exista

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\alpha} u_n$$

Se $\lambda = 0$ com $\alpha > 1$ a série é convergente;

Se $\lambda \neq 0, +\infty$ com $\alpha > 1$ a série é convergente;

Se $\lambda = +\infty$, com $\alpha \leq 1$ a série diverge;

Se $\lambda \neq 0, +\infty$ com $\alpha \leq 1$ a série diverge;

A prova resulta da comparação com a série p-harmónica $\sum_{k=1}^{\infty} (1/n^{\alpha})$

Resumo dos testes de convergência

Dado uma série $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$, como decidir de modo eficiente, qual o teste a aplicar?

Verificar de imediato que se $\lim u_k \neq 0$ a série é divergente, caso contrário há que prosseguir com a resolução.

Identificar com uma das séries notáveis. Poderá ser necessário alguma manipulação algébrica.

Se uma série pode ser decomposta numa diferença de termos de uma única sequência, desfasada dum valor fixo $k+p$, então é uma série de Mengoli e pode ser resolvida.

Se não for uma série notável mas tiver uma forma parecida, então os testes de comparação directa ou dos limites podem ser os mais apropriados.

Se a série é alternada, verificar que se for monótona e $\lim u_k = 0$ então converge.

Se a série envolve factorial e expoentes do índice, então o teste da razão pode resultar.

Se a série envolve expoentes do índice, então o teste da raiz pode resultar.

Não foi abordado o teste de integral, que será tratado mais à frente,

Conclusão

Com vista a apresentar a integral de Riemann, fez-se uma pequena digressão sobre somatórios, somas infinitas e séries numéricas. Testes da natureza de séries. Série de termos positivos. Séries alternadas, convergência absoluta e condicional. Outros testes de convergência.

Avaliação

Agrupe um mínimo de 5 e um máximo de 10 das perguntas seguintes em cada teste de avaliação de 1 hora, sem consultas.

Escolha perguntas-tipo diferentes na preparação de cada teste, mudando as parâmetros e dados de base para evitar colagens.

Cada pergunta vale entre 10% e 20%, conforme o número de perguntas seleccionadas.

1. **Pergunta:** Encontre os cinco primeiros elementos de sequência de somas parciais (s_n) e obtenha uma fórmula para o termo geral s_n . Determine também se a série infinita é convergente ou divergente; se for convergente determine a sua soma: $\sum_{n=1}^{\infty} (2 / (5^n - 1))$

Resposta:

$$\sum_{n=1}^5 (2 / (5^n - 1)) = 2 + (2/5) + (2/(25)) + (2/(125)) + (2/(625)) = (1562 / 625) = 2.4992$$

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{i=1}^n (2 / (5^i - 1)) \\ &= 2 \sum_{i=1}^n ((1/5)^{i-1}) \\ &= 2 \sum_{i=0}^n ((1/5)^i) \\ &= 2 + 2 \sum_{i=1}^n ((1/5)^i) \\ &= 2 + 2 (((1/5) - ((1/5)^{n+1}) / (1 - (1/5)))) \\ &= 2 + ((1 - ((1/5)^{n+1})) / 2) \end{aligned}$$

Calculando o limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (2 + ((1 - ((1/5)^{n+1})) / 2)) = 2 + (1/2) = (3/2)$$

2. **Pergunta:** Encontre os cinco primeiros elementos de sequência de somas parciais (s_n) e obtenha uma fórmula para o termo geral s_n . Determine também se a série infinita é convergente ou divergente; se for convergente determine a sua soma: $\sum_{n=1}^{\infty} ((2n+1) / (n^2 (n+1)^2))$

Resposta:

$$\sum_{n=1}^5 ((2n+1) / (n^2 (n+1)^2)) = (3/4) + (5/(4 \cdot 9)) + (7/(9 \cdot 16)) + (9/(16 \cdot 25)) + (11/(25 \cdot 36)) = (35 / 36)$$

$$s_n = \sum_{p=1}^n ((2p+1) / (p^2 (p+1)^2))$$

Como é uma fração de dois polinômios com o grau do numerador menor que o grau do denominador, buscam-se as frações parciais

$$\begin{aligned} ((2p+1) / (p^2 (p+1)^2)) &= (A / (p^2)) + (B / ((p+1)^2)) \\ &= ((A + 2Ap + (A+B)p^2) / (p^2 (p+1)^2)) \end{aligned}$$

Comparando coeficientes do numerador, nos dois lados:

$$A=1$$

$$2A=2$$

$$A+B=0 \Rightarrow B=-1$$

$$((2p+1) / (p^2 (p+1)^2)) = (1 / (p^2)) - (1 / ((p+1)^2))$$

Logo

$$\begin{aligned}s_{\{n\}} &= \sum_{p=1}^n ((2p+p) / (p^2 (p+1)^2)) \\&= \sum_{p=1}^n ((1/(p^2)) - (1/((p+1)^2))) \\&= 1 - (1/((n+2)^2))\end{aligned}$$

Calculando o limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - (1/((n+2)^2))) = 1$$

3. **Pergunta:** Encontre os cinco primeiros elementos de sequência de somas parciais ($s_{\{n\}}$) e obtenha uma fórmula para o termo geral $s_{\{n\}}$. Determine também se a série infinita é convergente ou divergente; se for convergente determine a sua soma: $\sum_{n=1}^{\infty} \cos \pi n$

Resposta:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \cos \pi n &= -1 + 1 - 1 + 1 - 1 = -1 \\s_{\{r\}} &= \sum_{n=1}^r \cos \pi n \\&= \sum_{n=1}^r (-1)^n \\&= ((-1)^r - 1) / 2\end{aligned}$$

Calculando o limite

$$\lim_{r \rightarrow \infty} (((-1)^r - 1) / 2) = \text{não existe} \quad \square \text{ oscila, logo divergente}$$

4. **Pergunta:** Determine se a série é convergente ou divergente, se for convergente ache a sua soma: $\sum_{n=1}^{\infty} ((3/(2^n)) - (2/(3^n)))$

Resposta:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} ((3/(2^n)) - (2/(3^n))) &= \sum_{n=1}^{\infty} (1/(2^n)) - 2 \sum_{n=1}^{\infty} (1/(3^n)) \\&= 3(((1/2)) / (1 - (1/2))) - 2(((1/3)) / (1 - (1/3))) \\&= 2 \\&= (10/3)\end{aligned}$$

5. **Pergunta:** Determine se a série é convergente ou divergente, se for convergente ache a sua soma: $\sum_{n=1}^{\infty} ((\sin(4/3) \pi + 3) / (4^n))$

Resposta:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} ((\sin(4/3) \pi + 3) / (4^n)) &= (3 - ((\sqrt{3})/2)) \sum_{n=1}^{\infty} (1/(4^n)) \\&= (3 - ((\sqrt{3})/2)) (((1/4)) / (1 - (1/4))) \\&= 1 - (1/6) \sqrt{3} \\&= (10/3)\end{aligned}$$

6. **Pergunta:** Determine se a série dada é convergente ou divergente: $\sum_{n=1}^{\infty} (\cos^2 n) / (3^n)$

Resposta:

$$0 \leq (\cos^2 n) / (3^n) \leq (1 / (3^n))$$

$$0 \leq \sum_{n=1}^{\infty} (\cos^2 n) / (3^n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} (1 / (3^n)) = (1/2)$$

Logo

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\cos^2 n) / (3^n) \text{ converge}$$

Pois a sequência de somas parciais (termos positivos) é crescente e limitada.

7. **Pergunta:** Determine se a série dada é convergente ou divergente: $\sum_{n=1}^{\infty} (3 / (2n - \sqrt{n}))$

Resposta:

$$0 \leq (3/2) \sum_{n=1}^{\infty} (1/n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} (3 / (2n - \sqrt{n}))$$

Logo

$$\sum_{n=1}^{\infty} (3 / (2n - \sqrt{n})) \text{ diverge}$$

Por comparação com a série harmônica que diverge

8. **Pergunta:** Determine se a série dada é convergente ou divergente: $\sum_{n=1}^{\infty} (1 / (3^n - \cos n))$

Resposta:

$$0 \leq (1 / (3^n - \cos n)) \leq (1 / (3^n - 1)) \leq (1 / (2^n))$$

$$0 \leq \sum_{n=1}^{\infty} (1 / (3^n - \cos n)) \leq \sum_{n=1}^{\infty} (1 / (2^n)) = 1$$

Converge, por comparação com a série geométrica.

9. **Pergunta:** Determine se a série alternada é convergente ou divergente: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} (n / (2^n))$

Resposta: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} (n / (2^n))$ converge pois o termo geral é decrescente e um infinitesimo

$$(((n+1) / (2^{n+1})) / (n / (2^n))) = ((2^n (n+1)) / (2^{n+1} n))$$

$$= ((n+1) / (2n))$$

$$= (1/2) + (1 / (2n)) \leq 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n / (2^n)) = 0$$

também converge absolutamente (e logo converge)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |(((n+1) / (2^{n+1})) / (n / (2^n)))| = \lim_{n \rightarrow \infty} |((n+1) / (2^n))|$$

$$(n2^{n-1}) \mid$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)}{(2n)} \right|$$

$$= (1/2) < 1$$

10. **Pergunta:** Determine se a série alternada é convergente ou divergente

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{1}{(n+1) \ln(n+1)} \right)$$

Resposta: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{1}{(n+1) \ln(n+1)} \right)$ converge pois o termo geral é decrescente e um infinitesimo

$$\left(\frac{1}{(n+2) \ln(n+2)} \right) / \left(\frac{1}{(n+1) \ln(n+1)} \right) = \frac{(n+1) \ln(n+1)}{(n+2) \ln(n+2)} \leq 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{(n+1) \ln(n+1)} \right) = 0$$

11. **Pergunta:** Determine se a série alternada é convergente ou divergente

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{n+1}}{(n-1)} \right)$$

Resposta: $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{n+1}}{(n-1)} \right)$ diverge, pelo teste de comparação com a série harmónica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{n+1}}{(n-1)} \right) / \left(\frac{1}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{n+1}}{(n-1)} \right) = +\infty$$

Não é uma série de Mengoli, pois apesar de poder ser separada em fracções parciais, estas não são desfasamentos de uma mesma sequência:

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{n+1}}{(n-1)} \right) &= \sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{n}}{(n-2)} \right) \\ &= \sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{1}{2(\sqrt{n}-\sqrt{2})} \right) + \sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{1}{2(\sqrt{n}+\sqrt{2})} \right) \end{aligned}$$

As fracções parciais deste exercício foram calculadas da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sqrt{n}}{(n-2)} \right) &= \left(\frac{\sqrt{n}}{(\sqrt{n}-\sqrt{2})(\sqrt{n}+\sqrt{2})} \right) \\ &= \frac{A}{(\sqrt{n}-\sqrt{2})} + \frac{B}{(\sqrt{n}+\sqrt{2})} \\ &= \frac{((A-B)\sqrt{2} + (A+B)\sqrt{n})}{(n-2)} \end{aligned}$$

$$A-B=0$$

$$A+B=1$$

$$A=(1/2)=$$

12. **Pergunta:** Determine se a série dada é absolutamente convergente, condicionalmente convergente ou divergente: $\sum_{n=1}^{\infty} ((\cos n\pi)/n)$

Resposta: $\sum_{n=1}^{\infty} ((\cos n\pi)/n)$ é condicionalmente convergente

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \left(\frac{\cos n\pi}{n} \right) \right| = \sum_{n=1}^{\infty} (1/n) \text{ não converge}$$

Mas

$$\sum_{n=1}^{\infty} ((\cos n\pi)/n) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (1/n)$$

É convergente pois o termo geral é decrescente e um infinitesimo

$$\left(\left(\frac{1}{n+1} \right) \right) / \left(\left(\frac{1}{n} \right) \right) = \left(\frac{n}{n+1} \right) \leq 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \right) = 0$$

13. Pergunta: Determine se a série dada é absolutamente convergente, condicionalmente convergente ou divergente: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(2n-1)!}{(3n-2)!} \right)$

Resposta: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(2n-1)!}{(3n-2)!} \right)$ converge por comparação com a série 2-harmónica $\sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{1}{(n-2)^2} \right)$ que converge.

$$\left(\frac{(2n-1)!}{(3n-2)!} \right) = \left(\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (3n-2)} \right)$$

$$= \left(\frac{1}{(2n) \cdots (3n-2)} \right) \leq \left(\frac{1}{n(n-2)} \right) \leq \left(\frac{1}{(n-2)^2} \right) \text{ para } n > 2$$

$$\sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{1}{(n-2)^2} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2} \right) \text{ converge}$$

Actividade 3.3 - Área de regiões fechadas e teorema fundamental do Cálculo

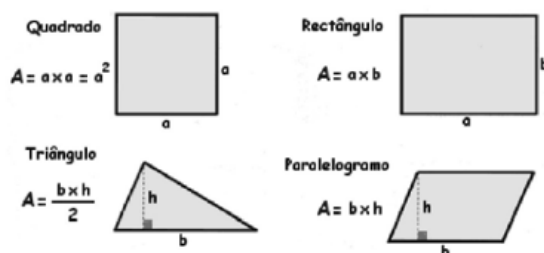
Introdução

Cálculo de área de regiões fechadas no plano. Integral definida e suas propriedades. Teorema de valor médio para integrais definidas. Teoremas Fundamentais do Cálculo. Aplicações da integral definida: Cálculo de área de figuras planas, volume de sólidos por corte, disco circular e por invólucros cilíndricos, comprimento de arco, momento de massa e centróide de região plana.

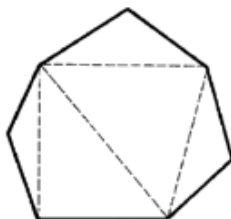
Detalhes da atividade

Cálculo de área

Recorde-se as áreas das principais figuras planas regulares (triangulares):

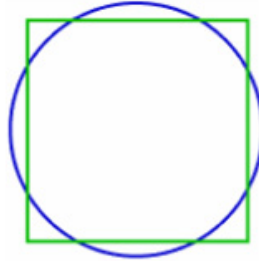


Por decomposição em quadrados ou triângulos consegue-se calcular a área de figuras mais complexas:



O cálculo da área de figuras planas é conhecido como quadratura.

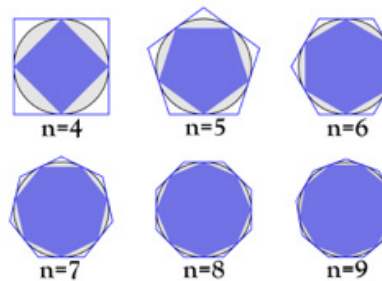
A quadratura do círculo é um problema antigo: Como construir um quadrado, apenas com a régua e o compasso, que possua a mesma área que um dado círculo?



Os problemas geométricos passíveis de resolução apenas com régua e compasso, equivalem a soluções de polinômios com coeficientes inteiros ou racionais.

Em 1882, Lindemann demonstrou que π é transcendente, ou seja, não é solução de polinômios com coeficientes inteiros ou racionais, logo a quadratura do círculo é um problema de solução impossível.

A área do círculo pode entretanto ser calculado, como demonstrou Arquimedes, como um limite de aproximações sucessivas.



O cálculo de limites permite determinar a área de qualquer figura plana delimitada por curvas rectificáveis.

Antes, algumas definições:

Uma partição (ou malha) de um intervalo $[a,b]$, representado por P , é um conjunto

$$P = \{x_0 = a, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = b\}$$

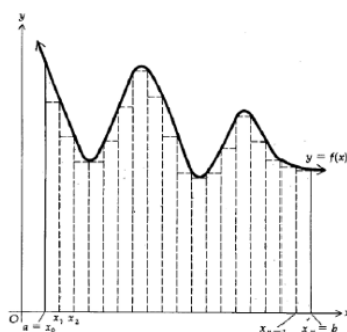
de pontos do intervalo tal que

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

A norma de uma partição, denotado por $\|P\|$, é o comprimento do maior subintervalo da partição.

Chama-se partição regular de um intervalo $[a,b]$ aquelas onde os subintervalos possuem todos o mesmo comprimento, designado por passo da malha $h = (b-a) / n$.

A área A da região delimitada por uma função $f(x)$ contínua e positiva num intervalo $[a,b]$, pelo eixo x (função nula) e pelas rectas $x=a$ e $x=b$, como delimitado na figura,



é calculada pela decomposição em rectângulos:

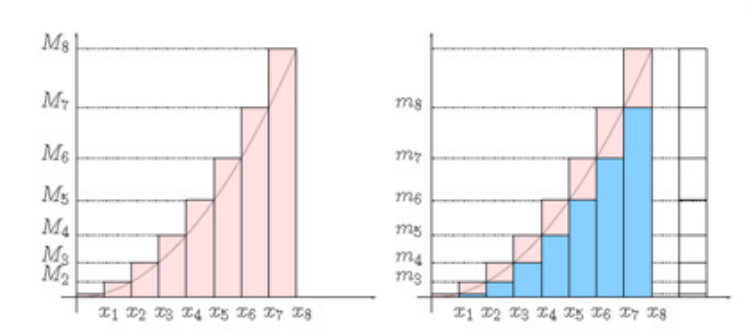
1. Construir uma partição P de $[a,b]$;
2. Encontrar em cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ o máximo M_i e mínimo m_i , cuja existência é garantida pelo teorema de Weierstrass:

$$M_i = \max_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x)$$

$$m_i = \min_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x)$$

3. Enquadrar a área A entre as somas superior e inferior de Riemann:

$$\sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i \leq A \leq \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i \quad \text{onde} \quad \Delta x_i = x_i - x_{i-1} \quad \text{e} \quad i=1, \dots, n$$



4. Como a função é contínua, os limites das somas superior e inferior de Riemann são iguais entre si, logo ambas são iguais à área que se pretende calcular:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i = A$$

Ex: Calcular a área da região limitada pela curva $y=x^2$, o eixo x e a recta $x=3$.

Com uma partição regular do intervalo $[0,3]$ em n subintervalos iguais de comprimento

$\Delta x = ((3-0)/n) = (3/n)$, tem-se que $x_{i-1} = (i-1)\Delta x$ e $m_i = ((i-1)$

$$\Delta x_i = (i-1)^2 (9/(n^2))$$

Então

$$\begin{aligned} A &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (i-1)^2 (9/(n^2)) (3/n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} ((27)/(n^3)) \sum_{i=1}^n (i-1)^2 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} ((27)/(n^3)) [((n(n+1)(2n+1))/6) - 2((n(n+1))/2) + n] \\ &= 9 \end{aligned}$$

Integral definida e suas propriedades

Uma função $f(x)$ é (Riemann) integrável num intervalo $[a,b]$ se existir um número L que satisfaz a condição limite:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall \Delta, \forall \Delta < \delta \left| \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i - L \right| < \varepsilon, \text{ onde } x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$$

Nestas condições escreve-se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = L$$

Se uma função for contínua num intervalo $[a,b]$ então ela é (Riemann) integrável.

Se uma função possuir descontinuidades removíveis (ou de salto) em apenas um número contável de pontos, então ela é ainda assim Riemann integrável.

Existem funções que não são (Riemann) integráveis, ou seja, onde o limite superior e o limite inferior de Riemann são diferentes. Entretanto existe uma definição mais geral de integração (Lebesgue) para estes casos.

Se uma função for integrável no intervalo fechado $[a,b]$ então a integral definida de f de a até b , é dada por

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \quad \text{onde } x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$$

se o limite existir.

Ex: Calcular a integral definida de $f(x) = x^3$ de $x=1$ até $x=2$

Para uma partição regular de $[1,2]$ toma-se $\Delta x_i = (2-1)/n = (1/n)$

Para o i -ésimo argumento de f toma-se $\xi_i = x_i = 1 + i \Delta x_i$

Então

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (1/n)^3 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n ((1/n) + ((3i)/(n^2)) + ((3i^2)/(n^3)) + ((i^3)/(n^4))) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3(n+1)}{(2n)} \right) + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(2n+1)(n+1)}{(2n^2)} \right) + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{((n+1)^2)}{(4n^2)} \right) \\
 &= 1 + (3/2) + 1 + (1/4) \\
 &= (15/4)
 \end{aligned}$$

A área de uma região delimitada por uma função $f(x)$ (Riemann) integrável e positiva num intervalo $[a,b]$, pelo eixo x (função nula) e pelas rectas $x=a$ e $x=b$, é redefinidas como a integral definida de $f(x)$ desde a até b

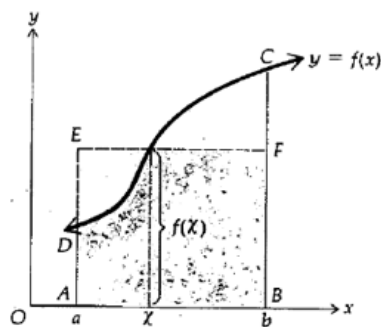
$$A = \int_a^b f(x) dx$$

Listam-se algumas propriedades das integrais definidas num intervalo $[a,b]$:

- $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(u) du = \int_a^b f(t) dt$ independente do símbolo mudo da variável de integração;
- $\int_a^a f(x) dx = 0$
- $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$
- $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx =$ para $c \in [a,b]$
- $\int_a^b k dx = k(b-a)$ para k constante
- $\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$ (linearidade)
- Se $f(x) \geq g(x)$, $x \in [a,b]$ então $\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$
- Se $m \leq f(x) \leq M$, $x \in [a,b]$ então $m \leq (1/(b-a)) \int_a^b f(x) dx \leq M$

Teorema de valor médio para integrais definidas

Na última propriedade listada, o número $(1/(b-a)) \int_a^b f(x) dx$ pode ser interpretado como o valor médio de f em $[a,b]$, sendo igual à altura de um rectângulo de base $(b-a)$ e com área igual à área da integral definida:



(Valor médio para integrais) Se a função f for contínua no intervalo fechado $[a,b]$, existe um número $\chi \in [a,b]$ tal que

$$\int_a^b f(x) dx = f(\chi) (b-a)$$

Na demonstração verifica-se que se $f(x)$ é uma função contínua num intervalo fechado, então, pelo teorema de Weierstrass, f tem pontos de máximo e de mínimo no intervalo $[a, b]$

$$m \leq f(x) \leq M, \quad \forall x \in [a, b]$$

Pela última propriedade listada,

$$m \leq \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x) dx \leq M$$

Pelo teorema de Bolzano, $f(x)$ atinge todos os valores entre o máximo e o mínimo, logo existe um ponto $\chi \in [a, b]$, tal que

$$f(\chi) = \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x) dx$$

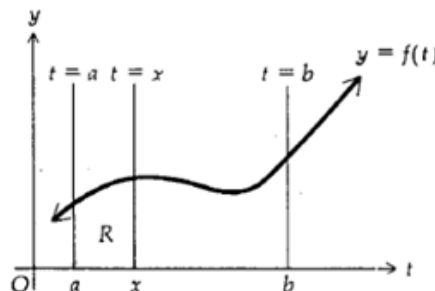
Os teoremas fundamentais do Cálculo (TFC)

A área duma região, cujo valor é dado pela integral definida $\int_a^b f(x) dx$, depende apenas dos bordos dessa região, ou seja de $f(x)$ e dos extremos a e b .

Consequentemente, se $x \in [a, b]$ for a posição de um bordo móvel, então a área de bordo móvel

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

define apenas a porção R da área entre a e x



Por convenção o símbolo (x) é usado para representar a posição do bordo móvel e o símbolo mudo da integral definida passa a ser t .

(Primeiro TFC) Seja f é uma função contínua no intervalo $[a, b]$ e a função cumulativa $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ onde $x \in [a, b]$. Então tem-se que

$$F'(x) = f(x)$$

Na demonstração, como

$$\begin{aligned} F(x+h) &= \int_a^{x+h} f(t) dt \\ &= \int_a^x f(t) dt + \int_x^{x+h} f(t) dt \end{aligned}$$

Então pelo teorema do valor médio para integrais definidas,

$$\begin{aligned} F(x+h) - F(x) &= \int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \\ &= \int_x^{x+h} f(t) dt \end{aligned}$$

$$= f(\chi)h \quad \text{para algum } \chi \in [x, x+h]$$

Segue pois que

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} (F(x+h) - F(x)) / h \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (f(\chi)h) / h \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Ex: Tem-se que $(d/(dx)) (\int_a^x \ln t dt) = \ln x$

Mas para calcular $(d/(dx)) (\int_a^{e^x} \ln t dt)$ é preciso fazer primeiro uma mudança de variável

$$u = e^x \Rightarrow (du)/(dx) = e^x$$

$$\begin{aligned} (d/(dx)) (\int_a^{e^x} \ln t dt) &= (d/(du)) (\int_a^u \ln t dt) (du)/(dx) \\ &= (\ln e^x) e^x \\ &= x e^x \end{aligned}$$

O segundo TFC estabelece a ligação entre a integral definida com a primitiva numa forma diferencial exacta.

(Segundo TFC ou regra de Barrow) Se $f(x) dx$ for uma forma exacta num intervalo $[a, b]$, ou seja, se existir uma função $F(x)$ tal que $dF(x) = f(x) dx$, então

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Na demonstração, deixe $F(x)$ ser tal que $dF(x) = f(x) dx$

Por definição de derivada exterior tem-se que

$$(d/(dx)) F(x) = f(x)$$

e pelo primeiro TFC

$$(d/(dx)) (\int_a^x f(t) dt) = f(x)$$

Então a diferença entre os dois só pode ser uma constante

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt + c$$

Como

$$F(a) = \int_a^a f(t) dt + c = c$$

e

$$F(b) = \int_a^b f(t) dt + c$$

Então

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(t) dt$$

O segundo TFC, permite calcular áreas apenas com recurso a primitivas, sem recorrer ao

limite de somas de Riemann!

Ex: Calcular a área da região limitada pela curva $y=x^2$, o eixo x e a recta $x=3$.

Como a primitiva é dada por $\int x^2 dx = (x^3)/3 + c$, a área calcula-se

$$\int_0^3 x^2 dx = (3^3)/3 = 9$$

Ex: Calcular a integral definida de $f(x)=x^3$ de $x=1$ até $x=2$

Como a primitiva é dada por $\int x^3 dx = (x^4)/4 + c$, a integral definida calcula-se

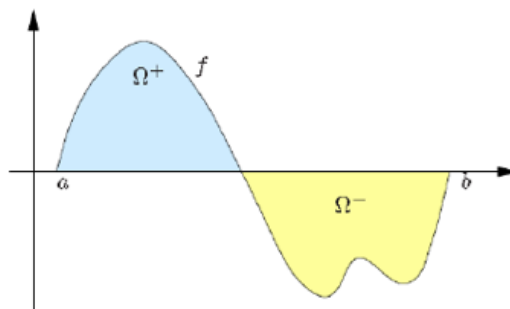
$$\int_1^2 x^3 dx = (2^4)/4 - (1^4)/4 = 4 - (1/4) = (15)/4$$

Aplicações da integral definida

Cálculo de área de figuras planas

A soma de Riemann calcula uma área sinalizada.

Se o sinal da função varia no intervalo $[a,b]$, o sinal da área varia de maneira correspondente.

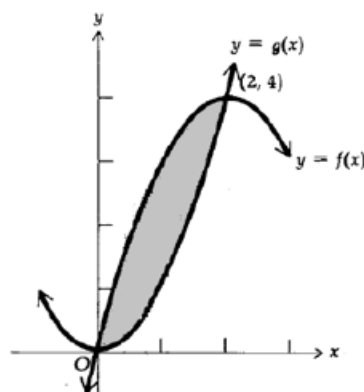


Ex: A área dada por $\int_0^{2\pi} \sin x = -\cos 2\pi - (-\cos 0) = 0$ pois enquanto $\int_0^{\pi} \sin x = 1$ a outra metade $\int_{\pi}^{2\pi} \sin x = -1$

A área de uma região do plano xy delimitada por curvas que são gráficos de funções $f(x)$ e $g(x)$ num intervalo $[a,b]$ é dada por

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$

sendo positiva nas regiões onde $f(x) > g(x)$ e negativa caso contrário.



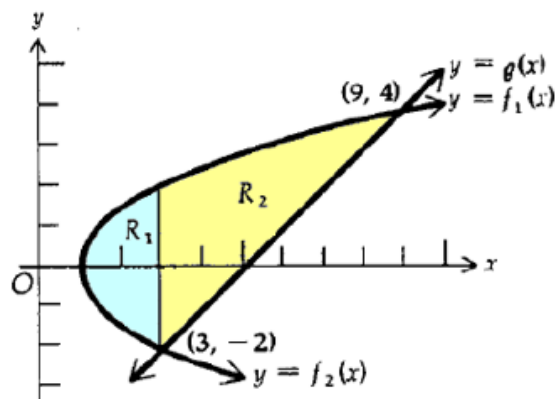
A integral definida $\int_a^b f(x) dx$ é um caso especial em que $g(x)=0, x \in [a, b]$ é a função nula.

Ex: A área delimitada pelas curvas $y=x^2$ e $y=-x^2+4x$ é dada por

$$\begin{aligned} \int_0^2 ((-x^2+4x) - x^2) dx &= \int_0^2 (-2x^2+4x) dx \\ &= \left[-\frac{2}{3}x^3+2x^2 \right]_{x=0}^{x=2} - \left[-\frac{2}{3}x^3+2x^2 \right]_{x=0} \\ &= -\frac{16}{3}+8 \\ &= \frac{8}{3} \end{aligned}$$

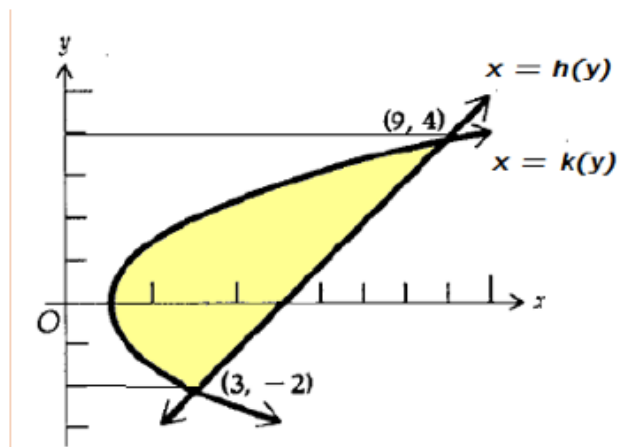
Os limites da integração correspondem às abscissas dos pontos de intersecção das duas curvas.

No cálculo de área de uma região do plano xy delimitada por curvas simples dadas por equações nas variáveis (x,y), as curvas podem coincidir com gráficos de funções (explícitas) apenas em regiões verticalmente simples (faixas verticais) onde é possível calcular $(f(x)-g(x))dx$



ou regiões horizontalmente simples (faixas horizontais) onde é possível

calcular $(h(y) - k(y)) dy$



Ex: A área da região delimitada pelas equações $2x-y^2-2=0$ e $x-y-5=0$

A intersecção das duas curvas é obtida substituindo $y=x-5$ na primeira equação e resolvendo

$$2x - (x-5)^2 - 2 = 0$$

obtem-se $x=3$ e $x=9$

A equação $2x - y^2 - 2 = 0$ define implicitamente duas funções: $y = \sqrt{2x-2}$ e $y = -\sqrt{2x-2}$ ambas no domínio $[1, +\infty)$

A área calculada nas duas regiões verticalmente simples $x \in [1, 3]$ e $x \in [3, 9]$ resulta em

$$\begin{aligned} A &= \int_1^3 (\sqrt{2x-2} - (-\sqrt{2x-2})) dx + \int_3^9 (\sqrt{2x-2} - (x-5)) dx \\ &= \left[\frac{2}{3} (2x-2)^{3/2} \right]_1^3 + \left[\frac{1}{3} (2x-2)^{3/2} - \left(\frac{x^2}{2} - 5x \right) \right]_3^9 \\ &= 18 \end{aligned}$$

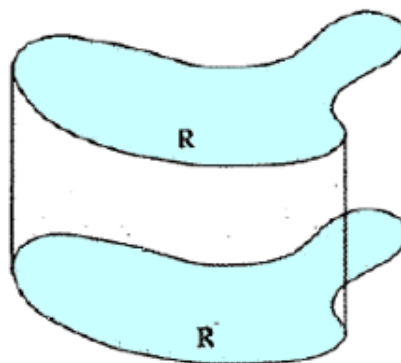
A área calculada na única região horizontalmente simples $y \in [-2, 4]$ resulta em

$$A = \int_{-2}^4 ((y+5) - ((y^2)/2 + 1)) dy = \left[((y^2)/2) + 4y - ((y^3)/6) \right]_{-2}^4 = 18$$

Volume de sólidos por corte, disco circular e por invólucros cilíndricos

Sólidos cilíndricos são obtidos pela extrusão do interior de uma região R delimitada por uma curva, desde um plano a outro plano paralelo.

Se a extrusão for perpendicular aos planos paralelos, o sólido cilíndrico diz-se reto.



Se a área da região R for invariante na extrusão, o volume V do sólido é a área da base A multiplicada pela altura h do sólido (comprimento da extrusão).

$$V = Ah$$

Se em cada etapa da extrusão, a curva se deforma de maneira contínua, a área $A(x)$ de um corte do sólido depende da posição x da extrusão e o volume do sólido é dado por

$$V = \int_a^b A(x) dx$$

Mesmo que a extrusão não seja perpendicular, o volume do sólido é dado pela mesma fórmula, se h for medido perpendicularmente aos planos paralelos, pois pelo princípio de Cavalieri, se a área do corte for igual em todas as etapas, o volume dos dois sólidos também é igual.

Ex: Use um corte para encontrar o volume de uma pirâmide reta cuja altura é h e o quadrado de base tem lado s .

Pela proporção de triângulos, o corte a uma posição y da base é um quadrado de lado igual a $(s/h)(h-y)$, logo a área do corte nessa posição é $A(y) = ((s^2)/(h^2))(h-y)^2$.

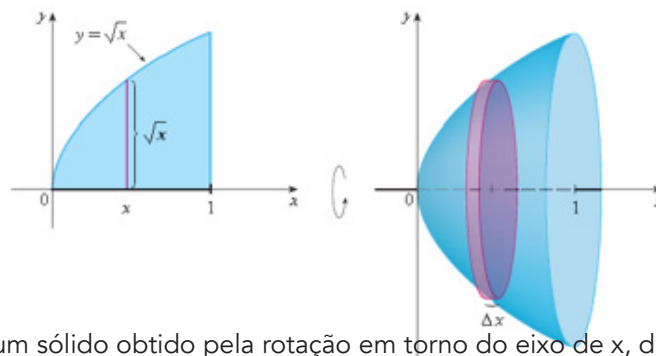
O volume da pirâmide quadrangular reta é dado por

$$\begin{aligned} V &= \int_0^h ((s^2)/(h^2))(h-y)^2 dy \\ &= \left[-((s^2)/(h^2))((h-y)^3/3) \right]_{y=0}^{y=h} \\ &= (1/3)s^2h \end{aligned}$$

Um sólido de revolução é obtido pela rotação de uma região num plano em torno de um eixo de revolução que pode ou não interceptar essa região.

Tomando elementos de área perpendiculares ao eixo de revolução, o elemento de volume é um disco circular cujo raio variável é dado pela função $f(x)$, e o volume pode ser calculado por

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

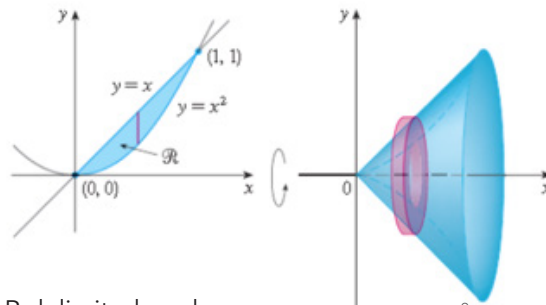


Ex: O volume de um sólido obtido pela rotação em torno do eixo de x , de uma região sob a curva $y=\sqrt{x}$, desde 0 até 1, é dado por

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^1 [\sqrt{x}]^2 dx \\ &= \pi \int_0^1 x dx \\ &= \pi \left[(x^2)/2 \right]_0^1 \\ &= (\pi/2) \end{aligned}$$

Se o elemento de área perpendicular ao eixo de revolução não se interceptar com o eixo de revolução, o elemento de volume é um anel circular com raios interior e exterior variável dados pelas funções $f(x)$ e $g(x)$, O volume pode ser calculado por

$$V = \pi \int_a^b (f(x)^2 - g(x)^2) dx$$



Ex: O volume da região R delimitada pelas curvas $y=x$ e $y=x^2$ e rodada em torno do eixo do x, é dado por

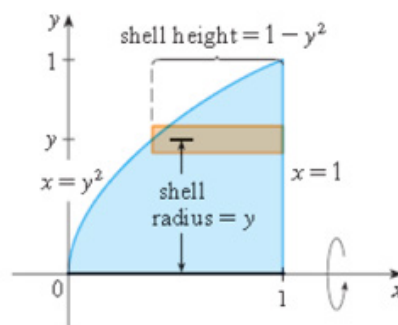
$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^1 (x^2 - (x^2)^2) dx \\ &= \pi \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right]_0^1 \\ &= \frac{2\pi}{15} \end{aligned}$$

Tomando elementos de área paralelos ao eixo de revolução obtem-se um invólucro cilíndrico, a uma distância x do eixo de revolução, com altura variável f(x) e cujo volume é dado por

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x) dx$$

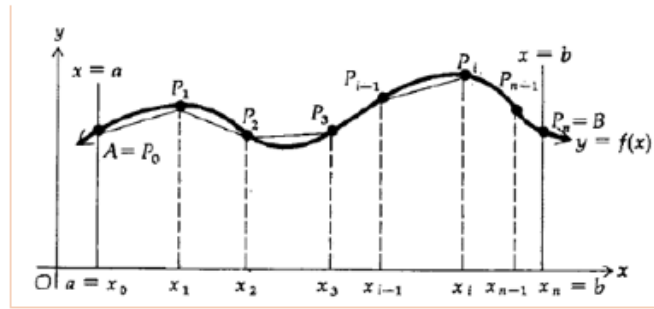
Ex: O mesmo volume de um sólido obtido pela rotação em torno do eixo de x, de uma região sob a curva $y=\sqrt{x}$, desde 0 até 1, agora calculado por invólucros cilíndricos (shells), resulta em

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^1 y(1-y^2) dy \\ &= 2\pi \left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{4} \right]_0^1 \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$



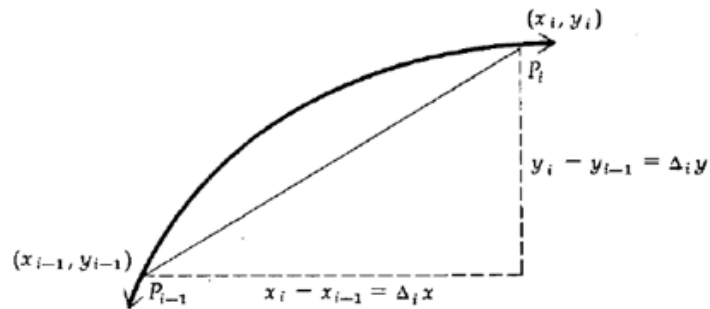
Comprimento de arco

O comprimento de arco do gráfico de uma função $f(x)$ no intervalo $[a,b]$, é calculado pelo mesmo método de aproximação infinitesimal já usado para calcular derivadas e áreas. Com uma partição do intervalo $[a,b]$, com norma $\|\Delta\|$, somam-se o comprimento dos segmentos



No limite quando $\Delta x \rightarrow 0$, o comprimento do arco é dado, se o limite existir, por

$$L = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} |P_i - P_{i-1}|$$

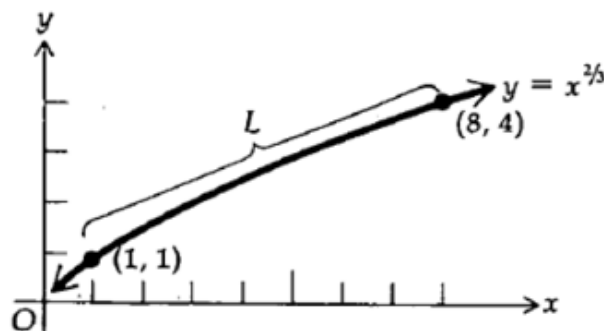


Como $|P_i - P_{i-1}|$ pode ser estimado, com auxílio do teorema de valor médio aplicado a $f(x)$ no intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, por

$$\begin{aligned} |P_i - P_{i-1}| &= \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \\ &= \sqrt{(\Delta x)^2 + (f'(x_i) \Delta x)^2} \quad \text{onde } x_i \in [x_{i-1}, x_i] \\ &= \sqrt{1 + (f'(x_i))^2} \Delta x \end{aligned}$$

O comprimento do arco é dado pela integral de Riemann

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$



Ex: O comprimento do arco da curva $y = x^{2/3}$ do ponto (1,1) a (8,4) é dado por

$$\begin{aligned} L &= \int_1^8 \sqrt{1 + \left(\frac{2}{3} x^{-1/3}\right)^2} dx \\ &= \frac{1}{3} \int_1^8 \left(\sqrt{9x^{2/3} + 4} \right) / (x^{1/3}) dx \end{aligned}$$

Pelo método de substituição

$$u = 9x^{\{2/3\}} + 4$$

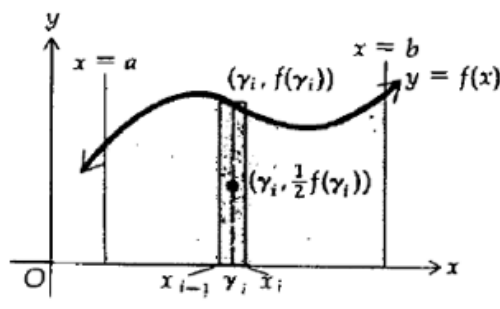
$$du = 6x^{\{-1/3\}} dx$$

obtem-se

$$\begin{aligned} L &= (1/(18)) \int_{13}^{40} u^{\{1/2\}} du \\ &= (1/(27)) [40^{\{3/2\}} - 13^{\{3/2\}}] \\ &\approx 7,6 \end{aligned}$$

Momento de massa e centróide de região plana

Considere uma lâmina homogênea de densidade uniforme k em toda uma região plana delimitada pela curva $y=f(x)$, pelo eixo x e pelas rectas $x=a$ e $x=b$.



A massa total da lâmina é dada por

$$M = k \int_a^b f(x) dx$$

O momento de massa da lâmina L depende do eixo escolhido

· em relação ao eixo de rotação y é dado por

$$M_{\{y\}} = k \int_a^b x f(x) dx$$

· em relação ao eixo de rotação x é dado por

$$M_{\{x\}} = (k/2) \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

O centro de massa da lâmina é independente da densidade e por isso é designado de centróide, sendo dado por

$$x = ((M_{\{y\}})/M) = ((\int_a^b x f(x) dx) / (\int_a^b f(x) dx))$$

$$y = ((M_{\{x\}})/M) = ((\int_a^b [f(x)]^2 dx) / (2 \int_a^b f(x) dx))$$

Conclusão

Nesta unidade foi definida a Integral de Riemann e suas propriedades, apresentaram-se teoremas importantes nomeadamente o Teorema de valor médio para integrais definidas e os teoremas Fundamentais do Cálculo. Foram estudadas aplicações da integral definida: Cálculo de área de figuras planas, volume de sólidos por corte, disco circular e por invólucros cilíndricos, comprimento de arco, momento de massa e centróide de região plana.

Avaliação

Agrupe um mínimo de 5 e um máximo de 10 das perguntas seguintes em cada teste de avaliação de 1 hora, sem consultas.

Escolha perguntas-tipo diferentes na preparação de cada teste, mudando as parâmetros e dados de base para evitar colagens.

Cada pergunta vale entre 10% e 20%, conforme o número de perguntas seleccionadas.

1. **Pergunta:** Use o método da aproximação infinitesimal para calcular a área da região delimitada por $y=x^3+3$, eixo x , e recta $x=0$ e $x=2$;

Resposta:

$$\Delta_{i,x} = ((2-0)/n) = (2/n)$$

$$\Delta_{i,x} = x_{i,x} - x_{i-1,x}$$

$$x_{i,x} = i\Delta_{i,x} = ((2i)/n) \text{ para } i=1, \dots, n$$

Pode-se usar tanto $f(x_{i,x})$ como $f(x_{i-1,x})$ para a altura dos rectângulos, e $\Delta_{i,x}$ para a base dos rectângulos:

$$\begin{aligned} A &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_{i,x}) \Delta_{i,x} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (x_{i,x}^3 + 3) \Delta_{i,x} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (((2i)/n)^3 + 3) (2/n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n ((16i^3)/(n^3)) + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (6/n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} ((16)/(n^3)) ((n^2(n+1)^2)/4) + \lim_{n \rightarrow \infty} (6/n)n \\ &= 4+6 \\ &= 10 \end{aligned}$$

2. **Pergunta:** Encontre a área exacta da região delimitada por $y=x^3$, $y=0$, $x=1$ e $x=2$

Resposta:

$$\begin{aligned} \int_1^2 x^3 dx &= [(x^4)/4]_1^2 \\ &= ((2^4)/4) - ((1^4)/4) \\ &= 4 - (1/4) \end{aligned}$$

$$= (15)/4)$$

3. **Pergunta:** Encontre a área exacta da região delimitada por $y=(1/x)$, $y=0$, $x=3$ e $x=4$

Resposta:

$$\begin{aligned}\int_{\square\square}^{\square\square}(1/x)dx &= [\ln x]_{\square\square}^{\square\square} \\ &= \ln 4 - \ln 3 \\ &= \ln(4/3) \\ &= 0.28768\end{aligned}$$

4. **Pergunta:** Encontre a área exacta da região delimitada por $y=(1/x)$, $y=0$, $x=3$ e $x=4$

Resposta:

$$\int_{-\{(\pi/6)\}}^{\{(\pi/3)\}} \tan x dx$$

Como encontrar $\int \tan x dx$?

Observe a derivada exterior

$$d \sec x = \sec x \tan x dx$$

Logo

$$\tan x dx = (d \sec x) / (\sec x) = d \ln |\sec x|$$

Então

$$\begin{aligned}\int \tan x dx &= \int d \ln |\sec x| \\ &= \ln |\sec x| + c\end{aligned}$$

Daí se obtém a área solicitada

$$\begin{aligned}\int_{-\{(\pi/6)\}}^{\{(\pi/3)\}} \tan x dx &= [\ln |\sec x|]_{-\{(\pi/6)\}}^{\{(\pi/3)\}} \\ &= \ln |\sec(\pi/3)| - \ln |\sec(-(\pi/6))| \\ &= \ln 2 - \ln 1 \\ &= \ln \sqrt{3} \\ &= 0.54931\end{aligned}$$

5. **Pergunta:** Use o teorema do valor médio para integrais para provar a desigualdade $\int_{\square^2}^{\square^2} (1/(x^2+4)) dx \leq (1/2)$

Resposta: No intervalo $[0,2]$, a função situa-se entre $0 \leq (1/(x^2+4)) \leq (1/4)$, então o valor médio da função tem de estar entre os mesmos valores:

$$0 \leq ((\int_{\square^2}^{\square^2} (1/(x^2+4)) dx) / (2-0)) \leq (1/4) \square 0 \leq \int_{\square^2}^{\square^2} (1/(x^2+4)) dx \leq (1/2)$$

6. **Pergunta:** Encontre o valor médio da função $f(x)=x$ dada no intervalo $[-1,2]$, e indique um ponto χ onde $f(\chi)$ atinge esse valor médio.

Resposta:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^2 x dx &= \left[(x^2)/2 \right]_{-1}^2 \\&= ((2^2)/2) - (((-1)^2)/2) \\&= 2 - (1/2) \\&= (3/2) \\f(\chi) &= (((3/2))/(2 - (-1))) \\&= (1/2) \\\chi &= (1/2)\end{aligned}$$

7. **Pergunta:** Calcule as derivadas das integrais de bordo móvel $(d/(dx)) (\int_{-x}^x \sqrt{4+t} dt)$

Resposta: $\sqrt{x+4}$

8. **Pergunta:** Calcule as derivadas das integrais de bordo móvel $(d/(dx)) (\int_{-x}^x \sqrt{1+t} dt)$

Resposta: $-\sqrt{x+1}$

e) $(d/(dx)) (\int_{-x}^x \cos(t^2+1) dt)$

9. **Pergunta:** Deduza a fórmula para o volume de um cone circular recto com h unidades de altura e a unidades de raios de base, usando um corte.

Resposta: Colocando o vértice do cone sobre a origem e o eixo do cone no eixo de x , o raio do cone é dado por $f(x) = (a/h)x$ e a área do corte é $\pi((a/h)x)^2$, logo

$$\begin{aligned}V &= \int_0^h \pi((a/h)x)^2 dx \\&= ((\pi a^2)/(h^2)) \left[(x^3)/3 \right]_0^h \\&= ((\pi a^2)/(h^2)) ((h^3)/3) \\&= ((\pi a^2 h)/3)\end{aligned}$$

10. **Pergunta:** Calcule o volume do sólido gerado pela rotação da região limitada por um arco da curva do seno em torno do eixo de x .

Resposta:

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \pi \sin^2 x dx &= (\pi/2) \int_0^\pi (1 - \cos 2x) dx \\&= (\pi/2) (x - (\sin 2x)/2) \Big|_0^\pi \\&= ((\pi^2)/2)\end{aligned}$$

Nota: as tres fórmulas trigonométricas básicas de apoio ao cálculo integral de funções trigonométricas:

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

A partir da fórmula da soma, quando $a=b$ obtem-se usado em cima na substituição

$$\sin^2 a = (1/2) (1 - \cos 2a)$$

Resumo da Unidade 3

Nesta unidade apresentaram-se as ferramentas indispensáveis na aplicação do método do cálculo: as primitivas de funções elementares, a integral de uma forma diferencial, o teorema fundamental do cálculo, as técnicas de integração, a integral de Riemann, a interpretação geométrica da integral de Riemann e o cálculo de áreas e volumes elementares usando a integração.

Também foram apresentadas algumas aplicações, nomeadamente o cálculo de área de figuras planas, volume de sólidos por corte, disco circular e por invólucros cilíndricos, comprimento de arco, momento de massa e centróide de região plana.

Avaliação da Unidade 3

Instruções

Agrupe um mínimo de 5 e um máximo de 10 das perguntas seguintes em cada teste de avaliação de 2 horas, sem consultas. Escolha perguntas-tipo diferentes na preparação de cada teste, mudando os parâmetros e dados de base para evitar colagens.

Critérios de avaliação

Cada pergunta vale entre 10% e 20%, conforme o número de perguntas seleccionadas.

Avaliação

Seguem perguntas-tipo, com as respectivas soluções detalhadas:

Da Unidade 3.1

1. **Pergunta:** Efectue as seguintes primitivações: $\int (3 - 2t + t^2) dt$

Resposta:

$$\int (3 - 2t + t^2) dt = 3t - t^2 + (t^3)/3 + c$$

$$\text{Verificação: } (d/(dt)) (3t - t^2 + (t^3)/3 + c) = t^2 - 2t + 3$$

2. **Pergunta:** Efectue as seguintes primitivações: $\int ([3] \sqrt{x} + (1/([3] \sqrt{x}))) dx$

Resposta:

$$\begin{aligned}\int ([3]\sqrt[3]{x} + (1/([3]\sqrt[3]{x}))) dx &= \int (x^{\{1/3\}} + x^{\{-(1/3)\}}) dx \\ &= ((x^{\{4/3\}})/(4/3)) + ((x^{\{2/3\}})/(2/3)) + c \\ &= (3/4)x[3]\sqrt[3]{x} + (3/2)[3]\sqrt[3]{x^2} + c\end{aligned}$$

Verificação: $(d/(dx))((3/4)x[3]\sqrt[3]{x} + (3/2)[3]\sqrt[3]{x^2} + c) = [3]\sqrt[3]{x} + (1/([3]\sqrt[3]{x}))$

3. **Pergunta:** Efectue as seguintes primitivações: $\int x^3(2-x^2)^{1/2} dx$

Resposta: $\int x^3(2-x^2)^{1/2} dx$

Deixa $u=2-x^2 \Rightarrow du=-2xdx$

$$\begin{aligned}\int x^3(2-x^2)^{1/2} dx &= -(1/2) \int x^2(2-x^2)^{1/2} x dx \\ &= -(1/2) \int (2-u)u^{1/2} du \\ &= -(1/2) \int (2u^{1/2} - u^{3/2}) du \\ &= -(1/2) ((2u^{3/2})/(3/2)) + (1/2) ((u^{5/2})/(5/2)) + c \\ &= ((2-x^2)^{3/2})/(28) - ((2-x^2)^{5/2})/(13) + c \\ &= (2-x^2)^{3/2} (((2-x^2))/(28)) - (1/(13)) + c\end{aligned}$$

Verificação: $(d/(dx))((2-x^2)^{3/2} (((2-x^2))/(28)) - (1/(13))) + c = x^3(2-x^2)^{1/2}$

4. **Pergunta:** Efectue as seguintes primitivações: $\int ((x^3 dx)/(\sqrt{1-2x^2})) dx$

Resposta: $\int ((x^3 dx)/(\sqrt{1-2x^2})) dx$

Deixe $u=1-2x^2 \Rightarrow du=-4xdx$

$$\begin{aligned}\int ((x^3 dx)/(\sqrt{1-2x^2})) &= -(1/4) \int ((x^2(-4xdx))/(\sqrt{1-2x^2})) \\ &= -(1/4) \int (((1-u)/2) du)/(\sqrt{u}) \\ &= -(1/8) \int (u^{\{-(1/2)\}} - u^{\{(1/2)\}}) du \\ &= -(1/8) (((u^{\{(1/2)\}})/(1/2)) - ((u^{\{(3/2)\}})/(3/2))) + c \\ &= -((\sqrt{u})/4) + (1/(12))\sqrt[3]{u^3} + c \\ &= -((\sqrt{1-2x^2})/4) + (1/(12))\sqrt[3]{(1-2x^2)^3} + c\end{aligned}$$

Verificação: $(d/(dx))(-((\sqrt{1-2x^2})/4) + (1/(12))\sqrt[3]{(1-2x^2)^3} + c) = ((x^3)/(\sqrt{1-2x^2}))$

5. **Pergunta:** Efectue as seguintes primitivações: $\int ((x^3)/((1-2x^2)^2)) dx$

Resposta: $\int ((x^3)/((1-2x^2)^2)) dx$

Deixe $u=1-2x \Rightarrow du=-2dx$

$$\begin{aligned} \int \frac{(x^3)}{(1-2x)^4} dx &= -\frac{1}{8} \int \frac{(-8x^3 dx)}{(1-2x)^4} \\ &= -\frac{1}{8} \int \frac{du}{u^4} \\ &= -\frac{1}{8} \int u^{-4} du \\ &= -\frac{1}{8} \left(\frac{u^{-3}}{-3} \right) + c \\ &= \frac{1}{24} (1-2x)^{-3} + c \end{aligned}$$

Verificação: $\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{24} (1-2x)^{-3} + c \right) = \frac{x^3}{(1-2x)^4}$

6. **Pergunta:** Efectue as seguintes primitivações: $\int (\tan 2x + \cot 2x)^2 dx$

Resposta:

$$\begin{aligned} \int (\tan 2x + \cot 2x)^2 dx &= \int (\tan^2 2x + 2 \tan 2x \cot 2x + \cot^2 2x) dx \\ &= \int \tan^2 2x dx + \int 2 dx + \int \cot^2 2x dx \\ &= \frac{1}{2} \tan 2x - x - \frac{1}{2} \cot 2x - x + 2x + c \\ &= \frac{1}{2} \tan 2x - \frac{1}{2} \cot 2x + c \end{aligned}$$

Pois cada uma das primitivas resulta em:

$$\begin{aligned} \int \tan^2 2x dx &= \int (\sec^2 2x - 1) dx \\ &= \frac{1}{2} \tan 2x - x + c \\ \int \cot^2 2x dx &= \int (\csc^2 2x - 1) dx \\ &= -\frac{1}{2} \cot 2x - x + c \end{aligned}$$

Verificação: $\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2} \tan 2x - \frac{1}{2} \cot 2x + c \right) = \cot^2 2x + \tan^2 2x + 2$

7. **Pergunta:** Efectue as seguintes primitivações: $\int \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{(\sqrt{x})} dx$

Resposta: $\int \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{(\sqrt{x})} dx = \int \frac{(x-2\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x})} dx$

$$\begin{aligned} &= \int (x^{\frac{1}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}) dx \\ &= \left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right) - 2x + \left(\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right) + c \\ &= \frac{2}{3} x\sqrt{x} - 2x + 2\sqrt{x} + c \end{aligned}$$

Verificação: $\frac{d}{dx} \left(\frac{2}{3} x\sqrt{x} - 2x + 2\sqrt{x} + c \right) = \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{(\sqrt{x})}$

8. **Pergunta:** Encontre a solução da equação diferencial:

$$\left(\frac{dy}{dx} \right) = 3x^2 + 2x - 7$$

Resposta:

$$(dy/dx) = 3x^2 + 2x - 7$$

$$dy = ((dy)/(dx)) dx$$

$$= (3x^2 + 2x - 7) dx$$

$$= d(x^3 + x^2 - 7x)$$

Logo

$$y = x^3 + x^2 - 7x + c$$

$$\text{Verificação: } (d/dx)(x^3 + x^2 - 7x + c) = 3x^2 + 2x - 7$$

9. **Pergunta:** Encontre a solução da equação diferencial:

$$(d^2y/dx^2) = 5x^2 + 1$$

$$\text{Resposta: } ((d^2y)/(dx^2)) = 5x^2 + 1 \Rightarrow (d/(dx))((dy)/(dx)) = 5x^2 + 1$$

Deixe

$$(dy)/(dx) = u$$

Logo

$$(du)/(dx) = 5x^2 + 1$$

Resolvendo a primeira equação de 1ª ordem

$$du = ((du)/(dx)) dx$$

$$= (5x^2 + 1) dx$$

$$= d((5/3)x^3 + x)$$

Logo

$$u = (5/3)x^3 + x + c$$

Substituindo u

$$(dy)/(dx) = (5/3)x^3 + x + c$$

Resolvendo a segunda equação de 1ª ordem

$$dy = ((dy)/(dx)) dx$$

$$= ((5/3)x^3 + x + c) dx$$

$$= d((5/(12))x^4 + (x^2)/2 + cx)$$

Logo

$$y = (5/(12))x^4 + (x^2)/2 + cx + c$$

10. **Pergunta:** Encontre a solução da equação diferencial determinada pelas condições iniciais:

$$\left(\frac{d^2 u}{dv^2} \right) = 4(1+3v)^2; \text{ condições iniciais: } u(-1) = -1 \text{ e } \left(\frac{du}{dv} \right)(-1) = -2$$

Resposta:

$$\left(\frac{d^2 u}{dv^2} \right) = 4(1+3v)^2 \Rightarrow \left(\frac{du}{dv} \right) = \int 4(1+3v)^2 dv$$

Deixe

$$\left(\frac{du}{dv} \right) = y$$

Logo

$$\left(\frac{dy}{dv} \right) = 4(1+3v)^2$$

Resolvendo a primeira equação de 1ª ordem

$$dy = \left(\frac{dy}{dv} \right) dv$$

$$= 4(1+3v)^2 dv$$

$$= d\left(\frac{4}{9}(1+3v)^3 \right)$$

Logo

$$y = \frac{4}{9}(1+3v)^3 + c$$

Substituindo a primeira condição inicial $\left(\frac{du}{dv} \right)(-1) = -2 \Rightarrow y(-1) = -2$

$$-2 = \frac{4}{9}(1+3(-1))^3 + c \Rightarrow c = \frac{14}{9}$$

Substituindo y

$$\left(\frac{du}{dv} \right) = \frac{4}{9}(1+3v)^3 + \frac{14}{9}$$

Resolvendo a segunda equação de 1ª ordem

$$du = \left(\frac{du}{dv} \right) dv$$

$$= \left(\frac{4}{9}(1+3v)^3 + \frac{14}{9} \right) dv$$

$$= d\left(\frac{1}{27}(1+3v)^4 + \frac{14}{9}v \right)$$

Logo

$$u = \frac{1}{27}(1+3v)^4 + \frac{14}{9}v + c$$

Substituindo a segunda condição inicial $u(-1) = -1$

$$-1 = \frac{1}{27}(1+3(-1))^4 + \frac{14}{9}(-1) + c \Rightarrow c = -\frac{1}{27}$$

Logo

$$u = \frac{1}{27}(1+3v)^4 + \frac{14}{9}v - \frac{1}{27}$$

Da Unidade 3.2

1. **Pergunta:** Encontre os cinco primeiros elementos de sequência de somas parciais (s_n) e obtenha uma fórmula para o termo geral s_n . Determine também se a série infinita é convergente ou divergente; se for convergente determine a sua soma: $\sum_{n=1}^{\infty} n$

Resposta:

$$\sum_{n=1}^5 n = 1+2+3+4+5=15$$

$$s_n = \sum_{k=1}^n k$$

$$= (n(n+1))/2$$

Calculando o limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n(n+1))/2 = +\infty \quad \square \text{divergente}$$

2. **Pergunta:** Encontre os cinco primeiros elementos de sequência de somas parciais (s_n) e obtenha uma fórmula para o termo geral s_n . Determine também se a série infinita é convergente ou divergente; se for convergente determine a sua soma: $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(n/(n+1))$

Resposta:

$$\sum_{n=1}^5 \ln(n/(n+1)) = \ln(1/2) + \ln(2/3) + \ln(3/4) + \ln(4/5) + \ln(5/6)$$

$$s_m = \sum_{n=1}^m \ln(n/(n+1))$$

$$= \ln \prod_{n=1}^m (n/(n+1))$$

$$= \ln(1/(m+1))$$

Calculando o limite

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \ln(1/(m+1)) = -\infty \quad \square \text{divergente}$$

3. **Pergunta:** Determine se a série é convergente ou divergente, se for convergente ache a sua soma: $\sum_{n=1}^{\infty} (4/3) ((5/7))^n$

Resposta:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (4/3) ((5/7))^n = (4/3) \sum_{n=1}^{\infty} ((5/7))^n$$

$$= (4/3) (((5/7)) / (1 - (5/7)))$$

$$= (10/3)$$

4. **Pergunta:** Determine se a série é convergente ou divergente, se for convergente ache a sua soma: $\sum_{n=1}^{\infty} (2/(n(n+2)))$

Resposta:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (2/(n(n+2))) = \sum_{n=1}^{\infty} ((1/n) - (1/(n+2)))$$

$$= 1 + (1/2) - 2 \lim_{n \rightarrow \infty} (1/n)$$

$$= (3/2)$$

$$= ((10)/3)$$

5. **Pergunta:** Determine se a série é convergente ou divergente, se for convergente ache a sua soma: $\sum_{n=1}^{\infty} (2^n + 3^n)$

Resposta:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (2^n + 3^n) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n + \sum_{n=1}^{\infty} 3^n$$

logo diverge, pois a natureza de uma série não é alterada se somada com uma série convergente.

6. **Pergunta:** Determine se a série dada é convergente ou divergente: $\sum_{n=1}^{\infty} ((n!) / ((2n)!))$

Resposta:

$$0 \leq ((n!) / ((2n)!)) = (1 / ((n+1) \cdot (2n))) \leq (1 / (2^n))$$

$$0 \leq \sum_{n=1}^{\infty} ((n!) / ((2n)!)) \leq \sum_{n=1}^{\infty} (1 / (2^n)) = 1$$

Logo

$$\sum_{n=1}^{\infty} ((n!) / ((2n)!)) \text{ converge}$$

Pois a sequencia de somas parciais (termos positivos) é crescente e limitada.

7. **Pergunta:** Determine se a série dada é convergente ou divergente: $\sum_{n=1}^{\infty} ((2^n) / (n!))$

Resposta:

Pelo teste da razão

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |(((2^{n+1}) / ((n+1)!)) / ((2^n) / (n!)))| = \lim_{n \rightarrow \infty} |((n! 2^{n+1}) / (2^n (n+1)!))|$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} |((2 / (n+1)))|$$

$$= 0$$

8. **Pergunta:** Determine se a série alternada é convergente ou divergente: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} ((n^2) / (n^3 + 2))$

Resposta:

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} ((n^2) / (n^3 + 2))$ converge pois o termo geral é decrescente e um infinitesimo

Para $n > 2$ tem-se

$$4n+2 \leq n^4 + n^2$$

$$4n+2 \leq n^4 + 2n^3 + n^2$$

$$n^4 + 2n^3 + n^2 + 4n + 2 \leq n^4 + 3n^3 + 3n^2$$

$$(n+1)^2 (n^3+2) \leq n^2 ((n+1)^3+2) \quad \square$$

$$(((n+1)^2) / ((n+1)^3+2)) \leq ((n^2) / (n^3+2))$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} ((n^2) / (n^3+2)) = 0$$

9. **Pergunta:** Determine se a série alternada é convergente ou divergente

$$: \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n ((e^n) / n)$$

Resposta: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n ((e^n) / n)$

diverge pois o termo geral não é decrescente nem um infinitesimo

$$(((e^{n+1}) / (n+1))) / (((e^n) / n))) = ((ne^{n+1}) / ((n+1)e^n))$$

$$= ((ne) / ((n+1))) > 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n ((e^n) / n) \neq 0$$

10. **Pergunta:** Determine se a série alternada é convergente ou divergente

$$: \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n ((\ln n) / n)$$

Resposta: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n ((\ln n) / n)$ converge pois o termo geral é decrescente e um infinitesimo

$$(((\ln(n+1)) / (n+1))) / (((\ln n) / n))) = ((n \ln(n+1)) / ((n+1) \ln n))$$

$$= ((\ln(n+1)^n) / (\ln n^{n+1})) \leq 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} ((\ln n) / n) = 0$$

11. **Pergunta:** Determine se a série dada é absolutamente convergente, condicionalmente convergente ou divergente: $\sum_{n=1}^{\infty} (-2/3)^n$

Resposta:

$\sum_{n=1}^{\infty} (-2/3)^n$ é absolutamente convergente, pois

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(-2/3)^n| = \sum_{n=1}^{\infty} |(2/3)^n|$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} ((2/3)^n)$$

$$= ((2/3) / (1 - (2/3)))$$

$$= 2$$

12. **Pergunta:** Determine se a série dada é absolutamente convergente, condicionalmente convergente ou divergente: $\sum_{n=1}^{\infty} ((1 + (1/n))^2 / (e^n))$

$$(((1 + (1/n))^2) / (e^n))$$

Resposta: $\sum_{n=1}^{\infty} (((1 + (1/n))^2) / (e^n))$ é absolutamente convergente pelo teste da raíz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{(((1 + (1/n))^2) / (e^n))} = \lim_{n \rightarrow \infty} (1/e)$$

$$(1 + (1/n))^2 = (1/e) < 1$$

Da Unidade 3.3

- Pergunta:** Use o método da aproximação infinitesimal para calcular a área da região delimitada por $y=x^2$, eixo x , e as rectas $x=-2$ e $x=1$;

Resposta:

$$\Delta_{i,x} = ((1 - (-2)) / n) = (3/n)$$

$$\Delta_{i,x} = x_{i,x} - x_{i-1,x}$$

$$x_{i-1,x} = -2 + (i-1)\Delta_{i,x} = ((3(i-1))/n) - 2 \text{ para } i=1, \dots, n$$

Neste segundo exemplo usa-se $f(x_{i-1})$ para rectângulos inscritos

$$\begin{aligned} A &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n x_{i-1,x}^2 \Delta_{i,x} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n ((3(i-1))/n - 2)^2 (3/n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n ((3^2(i-1)^2)/(n^2)) - 4((3(i-1))/n) + 4(3/n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} ((27)/(n^3)) \sum_{i=1}^n (i-1)^2 - \lim_{n \rightarrow \infty} ((36)/(n^2)) \sum_{i=1}^n (i-1) + \lim_{n \rightarrow \infty} ((12)/n) \sum_{i=1}^n 1 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} ((27)/(n^3)) \sum_{i=0}^{n-1} i^2 - \lim_{n \rightarrow \infty} ((36)/(n^2)) \sum_{i=0}^{n-1} i + \lim_{n \rightarrow \infty} ((12)/n) n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} ((27)/(n^3)) \sum_{i=1}^{n-1} i^2 - \lim_{n \rightarrow \infty} ((36)/(n^2)) \sum_{i=1}^{n-1} i + 12 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} ((27)/(n^3)) ((n-1)(n)(2(n-1)+1))/6 - \lim_{n \rightarrow \infty} ((36)/(n^2)) ((n-1)n)/2 + 12 \\ &= 9 - 18 + 12 \\ &= 3 \end{aligned}$$

- Pergunta:** Encontre a área exacta da região delimitada por $y=(x^3+1)$, $y=0$, $x=-2$ e $x=2$

Resposta:

$$\begin{aligned} \int_{-2}^2 (x^3+1) dx &= [(x^4)/4 + x]_{-2}^2 \\ &= ((2^4)/4 + 2) - (((-2)^4)/4 + (-2)) \\ &= 4 \end{aligned}$$

- Pergunta:** Encontre a área exacta da região delimitada por $y=\sec x$, $y=0$, $x=-(\pi/3)$ e $x=(\pi/3)$

Resposta:

$$\int_{-(\pi/3)}^{(\pi/3)} \sec x dx =$$

Como encontrar $\int \sec x dx$?

Observe as derivadas exteriores

$$d \sec x = \sec x \tan x \, dx$$

$$d \tan x = \sec^2 x \, dx$$

Logo

$$d(\sec x + \tan x) = \sec x (\sec x + \tan x) \, dx$$

Este facto dá-nos a estratégia para encontrar a forma exacta:

$$\sec x \, dx = ((\sec x (\sec x + \tan x)) / ((\sec x + \tan x))) \, dx$$

Fazendo a substituição $u = (\sec x + \tan x)$ obtem-se

$$du = d(\sec x + \tan x) = \sec x (\sec x + \tan x) \, dx$$

Logo

$$\sec x \, dx = ((\sec x (\sec x + \tan x)) / ((\sec x + \tan x))) \, dx = (du / u) = d \ln |u|$$

Então

$$\begin{aligned} \int \sec x \, dx &= \int d \ln |u| \\ &= \ln |u| + c \\ &= \ln |\sec x + \tan x| + c \end{aligned}$$

Daí se obtém a área solicitada

$$\begin{aligned} \int_{-(\pi/3)}^{(\pi/3)} \sec x \, dx &= [\ln |\sec x + \tan x|]_{-(\pi/3)}^{(\pi/3)} \\ &= \ln |\sec(\pi/3) + \tan(\pi/3)| - \ln |\sec(-\pi/3) + \tan(-\pi/3)| \\ &= \ln(\sqrt{3} + 2) - \ln(2 - \sqrt{3}) \\ &= 2.6339 \end{aligned}$$

4. **Pergunta:** Use o teorema do valor médio para integrais para provar a desigualdade $\int_{-(\pi/6)}^{(\pi/6)} \cos x^2 \, dx \leq (\pi/3)$

Resposta: No intervalo $[-(\pi/6), (\pi/6)]$, a função situa-se entre $(\sqrt{3}/2) \leq \cos x \leq 1$ e $(3/4) \leq \cos^2 x \leq 1$, então o valor médio da função tem de estar entre os mesmos valores:

$$(3/4) \leq ((\int_{-(\pi/6)}^{(\pi/6)} \cos x^2 \, dx) / ((\pi/6) - (-(\pi/6)))) \leq 1 \leq (\pi/4) \leq \int_{-(\pi/6)}^{(\pi/6)} \cos x^2 \, dx \leq (\pi/3)$$

5. **Pergunta:** Encontre o valor médio da função $f(x) = x^2$ dada no intervalo $[-1, 2]$, e indique um ponto χ onde $f(\chi)$ atinge esse valor médio.

Resposta:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^2 x^2 \, dx &= [(x^3)/3]_{-1}^2 \\ &= ((2^3)/3) - (((-1)^3)/3) \end{aligned}$$

$$= (8/3) + (1/3)$$

$$= 3$$

$$f(x) = (3 / (2 - (-1)))$$

$$= 1$$

$x^2=1 \Rightarrow x=1$ a outra solução $x=-1$ não satisfaz

6. **Pergunta:** Calcule as derivadas das integrais de bordo móvel $(d/(dx))$
 $(\int_0^x (1/(t+4)) dt)$

Resposta: $(1/(x+4))$

7. **Pergunta:** Calcule as derivadas das integrais de bordo móvel $(d/(dx))$
 $(\int_0^{\tan x} (1/(1+t^2)) dt)$

Resposta: 1

8. **Pergunta:** Calcule a área da região delimitada pelas curvas $y=x^2$, $x=y^3$ e $x+y=2$

Resposta:

Buscando as intersecções, substituindo $y=2-x$ em cada uma das equações

$$(2-x) = x^2 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1 \vee x = -2$$

$$x = (2-x)^3 \Rightarrow x^3 - 6x^2 + 13x - 8 = 0 \Rightarrow x = 1$$

A abcissa da intersecção é $x=1$

$$\int_0^1 (x^2 - x^3) dx = [(x^3)/3] - [(x^4)/4] \Big|_0^1$$

$$= (1/3) - (1/4)$$

$$= (1/(12))$$

9. **Pergunta:** Calcule a área da região delimitada pelas curvas

$y=\sin x$; $y=\cos x$ entre dois pontos de intersecção consecutivos.

Resposta:

$$\int_{\pi/4}^{5\pi/4} (\sin x - \cos x) dx = -(\cos(5\pi/4) + \sin(5\pi/4)) + (\cos(\pi/4) + \sin(\pi/4))$$

$$= 2\sqrt{2}$$

Referências do Curso

Leituras e outros recursos obrigatórios:

- O CÁLCULO COM GEOMETRIA ANALÍTICA, 3.ed. , Volume 1, Louis Leithold, Editora HARBRA Ltda, São Paulo, 1994
- CALCULUS WITH ANALYTIC GEOMETRY, 2.ed., Smmons, G, McGraw-Hill, 1996;
- CALCULUS, Gilbert Strang, Massachussets Institute of Technology, Wellesley-Cambridge Press, 1991, <http://ocw.mit.edu/resources/res-18-001-calculus-online-textbook-spring-2005/textbook/>

Leituras e outros recursos opcionais:

- <https://pt.khanacademy.org/math/>
- <http://www.wikipedia.org/>
- <http://www.wolfram.com/>
- <http://www.youtube.com/channel/UC4atV0sjMDVUW1v2ebQkCmQ>

Sede da Universidade Virtual africana

The African Virtual University
Headquarters

Cape Office Park

Ring Road Kilimani

PO Box 25405-00603

Nairobi, Kenya

Tel: +254 20 25283333

contact@avu.org

oer@avu.org

Escritório Regional da Universidade Virtual Africana em Dakar

Université Virtuelle Africaine

Bureau Régional de l'Afrique de l'Ouest

Sicap Liberté VI Extension

Villa No.8 VDN

B.P. 50609 Dakar, Sénégal

Tel: +221 338670324

bureauregional@avu.org