Ciências Biológicas

# Matemática para Ciências Biológicas

Genário Sobreira Santiago
Rui Eduardo Brasileiro Paiva

EdUECE

Geografia
História
Educação Física
Química
Ciências Biológicas
Artes Plásticas
Computação
Física
Matemática
Pedagogia

Ciências Biológicas

# Matemática para Ciências Biológicas

Genário Sobreira Santiago
Rui Eduardo Brasileiro Paiva

2ª edição
Reimpressão
Fortaleza - Ceará

EdUECE

2015

Geografia
História
Educação Física
Química
Ciências Biológicas
Artes Plásticas
Computação
Física
Matemática
Pedagogia

Editora Filiada à

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DAS EDITORAS UNIVERSITÁRIAS



Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Sistema de Bibliotecas
Biblioteca Central Prof. Antônio Martins Filho
Thelma Marylanda Silva de Melo – CRB-3 / 623
Bibliotecária

S231m Santiago, Genário Sobreira.
Matemática para ciências biológicas / Genário Sobreira Santiago , Rui Eduardo Brasileiro Paiva. 2. ed. Reimpressão – Fortaleza : EdUECE, 2015.
125 p. ; il. (Ciências Biológicas)

ISBN: 978-85-78263-52-2

1. Matemática. 2. Ciências biológicas. I. Paiva, Rui Eduardo Brasileiro. II. Título.

CDD: 510

Editora da Universidade Estadual do Ceará – EdUECE
Av. Dr. Silas Munguba, 1700 – Campus do Itaperi – Reitoria – Fortaleza – Ceará
CEP: 60714-903 – Fone: (85) 3101-9893
Internet: www.uece.br – E-mail: eduece@uece.br
Secretaria de Apoio às Tecnologias Educacionais
Fone: (85) 3101-9962

# Sumário

# Apresentação

O título deste livro “Matemática para Ciências Biológicas” sugere que existe uma matemática específica para as ciências biológicas. Mas, evidentemente, isso não é verdade. Muito pelo contrário, a matemática que se aplica à Biologia é a mesma matemática que se aplica a outros ramos do conhecimento. O assunto básico aqui abordado atesta isso – o cálculo diferencial e integral talvez seja o segmento mais fértil da matemática, e suas ferramentas são usadas em assuntos tão diversos quanto psicologia e física quântica.

Este modesto trabalho não tem a pretensão de ser um livro de cálculo, mas tão somente uma introdução bastante elementar do assunto, de modo que os resultados mostrados não são demonstrados. Isto porque se destina a alunos do curso Ciências Biológicas, que, via de regra, não são afeitos a tal disciplina.

O capítulo I trata do estudo das funções, abordando desde a definição até a ideia intuitiva de limites. É dada uma importância particular à construção de gráficos das principais funções elementares – funções do primeiro e do segundo graus, exponenciais e logarítmicas.

No capítulo II, é introduzido um assunto novo, que normalmente não é abordado no nível médio – a função derivada. Inicialmente, discute-se a ideia de reta tangente para se chegar à definição de derivada. As propriedades operatórias das derivadas são apresentadas e imediatamente utilizadas na resolução de exercícios contextualizados dentro da Biologia.

Por tratar-se de um livro aplicado, o capítulo III assume uma importância particular. Estudamos as aplicações da derivada, particularmente em problemas de otimização. Discutimos, de forma sucinta, as informações fornecidas pelas derivadas primeira e segunda, tais como crescimento (decrescimento) de funções, máximos e mínimos e concavidade.

Finalmente, no capítulo IV, são apresentadas noções elementares de cálculo integral. Assim, começamos com a ideia de antidiferenciação e seu uso em problemas aplicados. Em seguida, aborda-se o conceito de equação diferencial dando ênfase a uma importante aplicação em Biologia – crescimento e decrescimento exponenciais.

**Os Autores**

# Capítulo 1

# Funções e Limites

## Objetivos

- Compreender o conceito de função;
- Definir função e esboçar os gráficos das principais funções elementares;
- Compreender o conceito intuitivo de limites e usar suas principais propriedades operatórias;
- Aplicar os conhecimentos aprendidos, particularmente, na área de Ciências Biológicas.

## 1. Conceito e definição de função

O conceito de função surge de maneira natural e espontânea toda vez que consideramos duas grandezas que estejam relacionadas entre si, de maneira que cada valor de uma delas corresponde a um único valor da outra. Assim, relações funcionais ocorrem em todos os ramos do conhecimento: o salário varia com o número de horas trabalhadas, a receita varia com o número de artigos vendidos, a velocidade e a aceleração de um móvel variam com o tempo. Em Ciências Biológicas, também é bastante conveniente expressar este tipo de correspondência entre quantidades variáveis, como se pode observar nos exemplos seguintes: o tamanho de uma população varia com o tempo, a taxa de crescimento de um tecido canceroso relaciona-se com o efeito do tratamento radioativo e a amplitude dos impulsos elétricos gerados no músculo cardíaco também é função do tempo.

**Exemplo 1.1 -** Um paciente foi submetido a um eletrocardiograma em uma clínica, e o resultado é mostrado no quadro 1.1, onde *t* representa o tempo e *v* a voltagem (tensão).

**Quadro 1.1 Valores de (v), como função de (t), em um eletrocardiograma**

| Tempo (t) | 0 | 1 | 2 | 3 | 5 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Voltagem (v) | 0 | 4 | 0 | 4 | 0 | 2 | 4 |

Como podemos observar, para cada valor da variável *t*, existe um único valor da variável *v*, isto é, para um mesmo tempo *t,* não podem ser registradas duas voltagens, o que motiva a seguinte definição.

*Definição*: Uma função $f$ de um conjunto $A$ em um conjunto $B$ é uma correspondência que associa a cada elemento $x \in A$ exatamente um elemento $y \in B$, e escrevemos $f: A \to B$.

O conjunto $A$ chama-se *domínio* de $f$ $(D_f)$, enquanto o conjunto $B$ chama-se *contradomínio* de $f$ $(CD_f)$. O conjunto de valores de $y$ em $B$, associados aos valores $x$ em $A$, é chamado *imagem* de $f$ $(Im_f)$. No exemplo 1.1, temos que $D_f = \{0, 1, 2, 3, 5, 7, 8\}$ e $CD_f = \{0, 2, 4\} = Im_f$. Os elementos $x$ e $y$ são chamados variáveis independente e dependente, respectivamente.

O conjunto imagem está sempre contido no contradomínio de $f$ $(Im_f \subset CD_f)$, mas nem sempre $Im_f = CD_f$, como podemos depreender do exemplo seguinte.

**Exemplo 1.2 -** Sejam os conjuntos $A = \{0, 1, 2, 3\}$ e $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, e a função $f: A \to B$ definida por $f(x) = x$. Temos, então, que $D_f = A$ e $CD_f = B$, no entanto, o conjunto imagem $Im_f = \{0, 1, 2, 3\}$ é diferente de $B$.

O exemplo a seguir mostra que devemos fazer uma distinção entre o domínio estritamente matemático e o domínio de validade, considerando-se fatos de ordem biológica, que, muitas vezes, são restritos a determinados intervalos.

**Exemplo 1.3 -** Hill, um fisiologista inglês, postulou que a velocidade de contração de um músculo, ao ser submetido a um peso, é dada pela expressão

$$(p + a)(v + b) = k,$$

onde $a, b$ e $k$ são constantes, e $p$ é a força aplicada ao músculo. Explicitando $v$, na expressão acima, temos:

$$v = \frac{k}{p + a} - b$$

Essa fórmula expressa a velocidade de contração em unidades de comprimento por segundo $(cm/s)$, como função da força peso $(p)$ aplicada ao músculo. Utilizando dados experimentais de Hill, para o caso do músculo do sapo, onde $k = 87{,}81$; $a = 14{,}35$ e $b = 1{,}03$, é possível construir o quadro 1.2 e o gráfico (figura 1.1) mostrados a seguir (em valores aproximados).

| Quadro 1.2. Valores da velocidade de contração (v), como função do peso (p) | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $p$ | 0 | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 |
| $v$ | 5,09 | 2,58 | 1,52 | 0,95 | 0,58 | 0,33 | 0,15 | 0,01 |

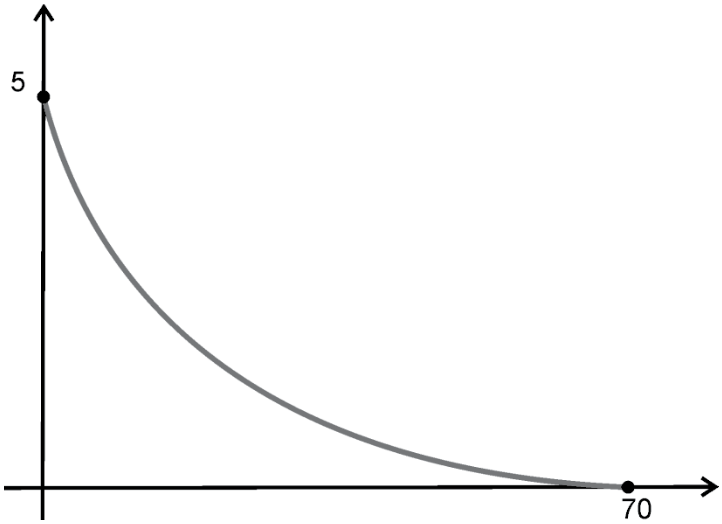



Figura 1.1 – Contração Muscular segundo um modelo proposto pelo fisiologista A. V. Hill.

Note que, para $p < 0$ e $p > 70$, a expressão deixa de ter sentido fisiológico.

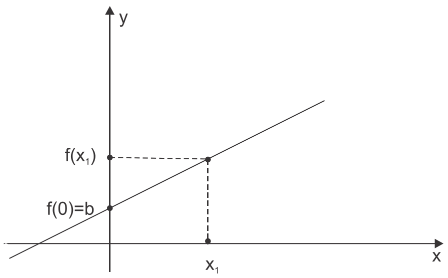
## 2. Algumas funções elementares

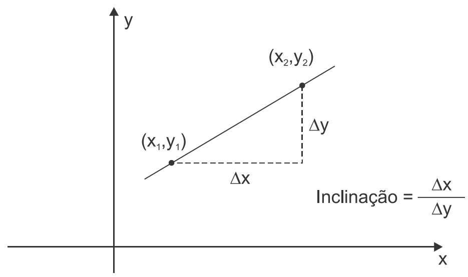
### 2.1 Função afim

Chama-se função linear toda função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = mx + b$, onde $m$ e $b$ são constantes reais. O parâmetro $m$ é chamado inclinação ou declividade da reta, que representa o gráfico de toda função afim. Ademais, como $f(0) = b$, o parâmetro $b$ é a ordenada do ponto onde a reta corta o eixo $y$. Observe que essa inclinação que representa o coeficiente angular $m$ da reta é dada pela taxa de variação de $y$ (variável dependente) em relação a $x$ (variável independente), conforme mostram as figuras 1.2.A e 1.2.B.

*Inclinação da reta*: A inclinação de uma reta não vertical, passando pelos pontos $(x_1, y_1)$ e $(x_2, y_2)$, é dada pela expressão:

$$\boxed{Inclinação\ (m) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$$




**Exemplo 1.4** - Seja °F a temperatura em graus Fahrenheit e °C a temperatura correspondente em graus Celsius. Estas duas escalas de temperatura estão relacionadas linearmente através da seguinte equação:

$$C(F) = \frac{5}{9} \cdot F - \frac{160}{9}$$

a) Esboce o gráfico de C como função de F;

b) Encontre $C$ quando $F = 18, 32$ e $50$;

c) Exprima $F$ como função de $C$, isto é, determine a função inversa que permita encontrar a temperatura em $F$ conhecida a temperatura em $C$.

**Solução:**

a) Para traçar a reta que representa esta função, basta tomar dois pontos dessa reta. Calculando os interceptos nos eixos $C$ e $F$, encontramos os pontos $\left(0, -\frac{160}{9}\right)$ e $(32, 0)$, respectivamente, e podemos, então, esboçar o gráfico mostrado na figura 1.3.

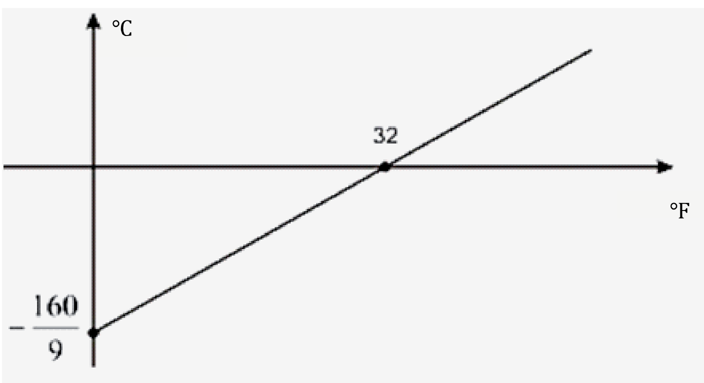



Figura 1.3

b) Temos:

$$C(18) = \frac{5}{9} \cdot (18) - \frac{160}{9} \quad \therefore \quad C(18) = -\frac{70}{9}$$

$$C(32) = \frac{5}{9} \cdot (32) - \frac{160}{9} \quad \therefore \quad C(32) = 0$$

$$C(50) = \frac{5}{9} \cdot (50) - \frac{160}{9} \quad \therefore \quad C(50) = 10$$

Com efeito,

$$C = \frac{5}{9} \cdot F - \frac{160}{9} \quad \Rightarrow \quad C = \frac{5 \cdot F - 160}{9} \quad \Rightarrow \quad 9C = 5 \cdot F - 160$$

E, assim,

$$F = \frac{9}{5} \cdot C - 32$$

é a função inversa de

$$C = \frac{5}{9} \cdot F - \frac{160}{9}$$

e, então, seus gráficos são simétricos em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares, isto é, a reta $y = x$ (Verifique!).

**Botânica**, *do grego botaniké (parádosis), é o estudo científico da vida das plantas e das algas. Como um campo da Biologia, é também, muitas vezes, referenciado como a Ciência das Plantas ou Biologia Vegetal. A Botânica abrange uma miríade de disciplinas científicas que estudam crescimento, reprodução, metabolismo, desenvolvimento, doenças e evolução da vida das plantas.*

**Exemplo 1.5** - Um botânico mede o crescimento de uma planta, em centímetros, todos os dias. Ligando os pontos colocados por ele num gráfico, resulta a figura 1.4 abaixo. Se for mantida sempre esta relação entre tempo e altura, que altura a planta terá no 30º dia?

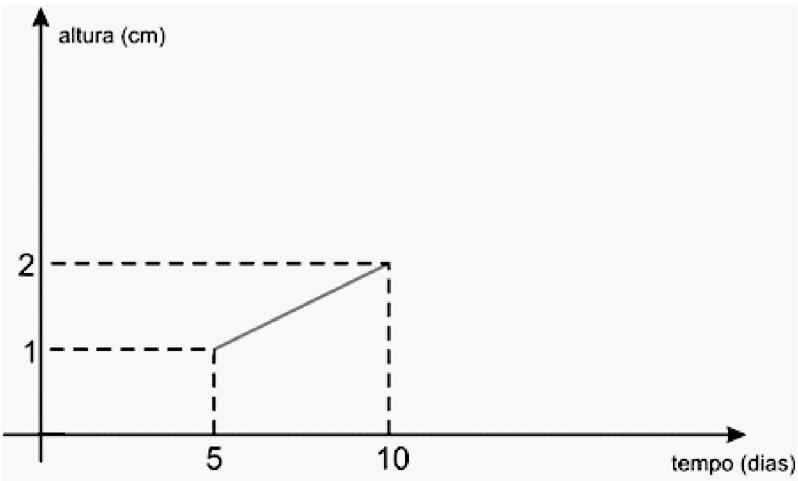



Figura 1.4

**Solução:**

Para acharmos o valor pedido, devemos determinar a equação que expressa a altura $(a)$, como função tempo $(t)$. De acordo com o gráfico, a reta passa pelos pontos $(5, 1)$ e $(10, 2)$, logo o coeficiente angular da reta é dado por

$$m = \frac{2-1}{10-5} = \frac{1}{5}$$

e, então, a equação da reta é dada pela expressão $a - a_0 = m(t - t_0)$, obtida a partir da inclinação $m$ quando $(t_0, a_0)$ é um ponto dado e $(t, a)$ é um ponto qualquer da reta. Assim, tomando o ponto $(5, 1)$, vem que

$$a - 1 = \frac{1}{5}(t-5) \quad \Rightarrow \quad a(t) = \frac{t}{5}$$

é a equação da reta que permite calcular qualquer altura sendo dado o tempo. Logo, para $t = 30$ dias, temos:

$$a = \frac{30}{5} = 6\,cm$$

## 2.2 Função quadrática

A função $y = ax^2 + bx + c$ é chamada função quadrática, sendo $a, b$ e $c$ constantes e $a \neq 0$, chamados coeficientes. Esta função também tem domínio $\mathbb{R}$, isto é, considera-se que $f$ *aplica* $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Assim, a função $f(x) = 2x^2 + 2x + 1$ é uma função quadrática com $a = 2,\ b = 2$ e $c = 1$. Alguns gráficos representativos da função quadrática são mostrados na figura 1.5

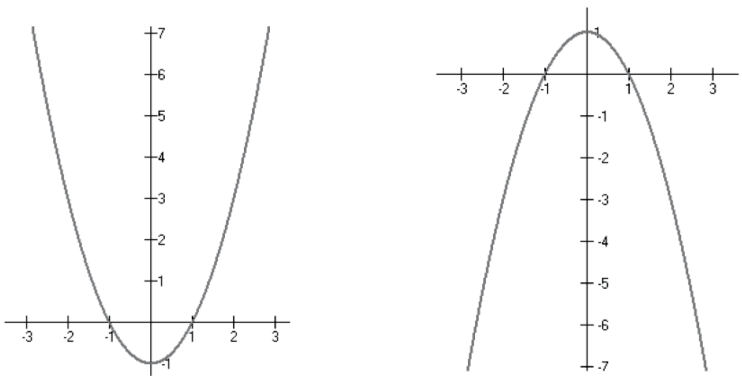


Figura 1.5

A partir disso, podemos fazer algumas observações importantes, que são ilustradas na figura 1.6:

**1.** O gráfico da função quadrática é uma parábola cujo eixo de simetria é perpendicular ao eixo $x$;

**2.** Se $a > 0$, a parábola tem concavidade voltada para "cima";

**3.** Se $a < 0$, a parábola tem concavidade voltada para "baixo";

**4.** Sendo $\Delta = b^2 - 4ac$ (discriminante), a parábola:

- Intercepta o eixo $x$ em dois pontos distintos quando $\Delta > 0$;
- Tangencia o eixo $x$ quando $\Delta = 0$;
- Não tem ponto comum com o eixo $x$ quando $\Delta < 0$;
- Tem como vértice o ponto $V\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$, o qual é o ponto de máximo se $a < 0$ ou o ponto de mínimo se $a > 0$.

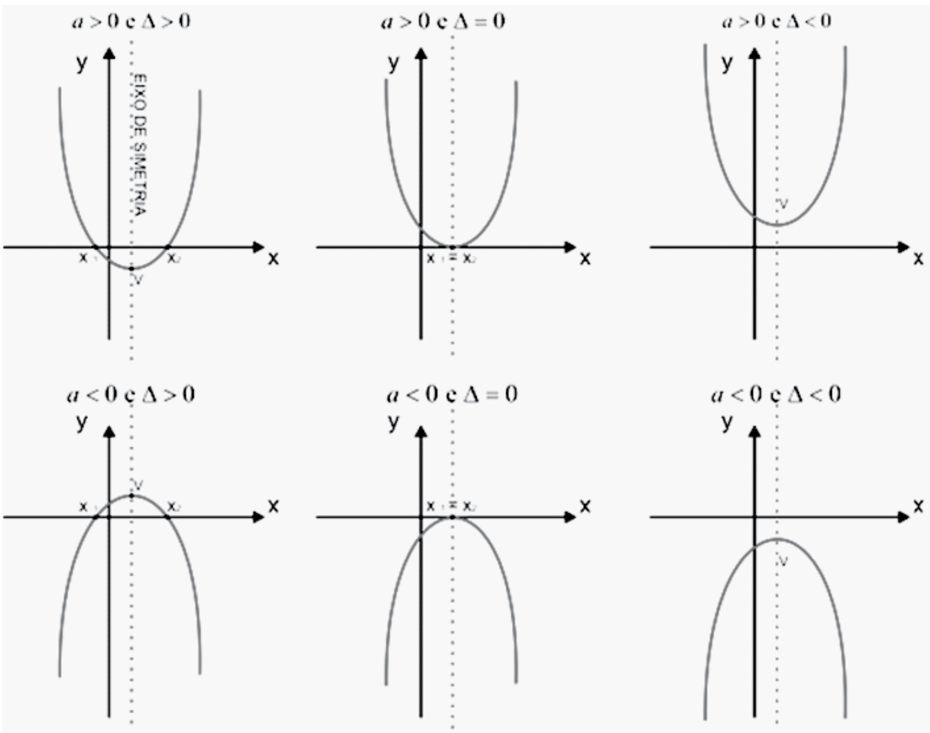



Figura 1.6

**Exemplo 1.6**- Uma pulga, ao saltar, teve sua posição no espaço descrita em função do tempo pela expressão $h(t) = 4{,}4\,t - 4{,}9\,t^2$. Onde $h$ é a altura atingida, em metros. Em que instante a pulga atinge a altura máxima do solo?

**Solução:**

O número

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-4{,}4}{2(-4{,}9)} = \frac{-4{,}4}{-9{,}8} \cong 0,45$$

Então, para $t \cong 0,45\ s$, a altura é:

$$h(0{,}45) \cong 4{,}4 \cdot (0.45) - 4{,}9 \cdot (0{,}45)^2$$

Ou seja, $h(0{,}45) \cong 0{,}98\ m$.

**Exemplo 1.7**- O instituto de meteorologia de uma cidade do sul do país registrou a temperatura local nas 12 primeiras horas de um dia de inverno. Uma lei que pode representar a temperatura $(T)$ em função da hora $(x)$ é:

$$T(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{7}{2}x + k$$

Com $0 \leq x \leq 12$ e $k$ uma constante real, determine:

a) o valor de $k$, sabendo que, às 3 horas da manhã, a temperatura indicou 0ºC;

b) a temperatura mínima registrada.

**Solução:**

a) Para $x = 3$ horas, temos que $T = 0°\mathrm{C}$. Assim,

$$T(3) = 0 \Rightarrow \frac{1}{4}(3)^2 - \frac{7}{2}(3) + k = 0 \Rightarrow k = \frac{33}{4}$$

b) Basta encontrar o mínimo da função

$$T(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{7}{2}x + \frac{33}{4}$$

A abscissa do ponto de mínimo é $x=\frac{7/2}{2/4}=\frac{7}{2}\cdot\frac{4}{2}=7$. Então, quando $x=7$ horas, a temperatura mínima registrada foi de

$$T(7)=\frac{1}{4}\cdot(7)^2-\frac{7}{2}\cdot(7)+\frac{33}{4}=-4^oC$$

## 2.3 Operações com funções

Podemos combinar funções para obter novas funções. Para exemplificar esta situação, consideremos as funções $f\colon A\rightarrow B$ e $g\colon A\rightarrow B$. Combinando as funções $f$ e $g$, podemos obter outras funções, tais como:

- *função soma:* $s(x)=f(x)+g(x)$;
- *função diferença*: $d(x)=f(x)-g(x)$;
- *função produto*: $p(x)=f(x)\cdot g(x)$; e
- *função quociente*: $q(x)=f(x)/g(x)$, sendo $g(x)\neq 0$.

O quadro 1.3, a seguir, faz uma síntese do que foi exposto:

| Quadro 1.3. Operações aritméticas com funções | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Nome da função | Notação | Domínio | Contradomínio | Sentença aberta que a define |
| Soma | $f+g$ | $D_f\cap D_g$ | $\mathbb{R}$ | $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$ |
| Diferença | $f-g$ | $D_f\cap D_g$ | $\mathbb{R}$ | $(f-g)(x)=f(x)-g(x)$ |
| Produto | $f\cdot g$ | $D_f\cap D_g$ | $\mathbb{R}$ | $(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$ |
| Quociente | $f/g$ | $D_f\cap D_g$ Com $g(x)\neq 0$ | $\mathbb{R}$ | $(f/g)(x)=f(x)/g(x)$ |

**Exemplo 1.8**- Sejam as funções $f$ e $g$ definidas, respectivamente, por:

$$f(x)=\sqrt{x-2} \qquad \text{e} \qquad g(x)\sqrt{5-x}$$

a) Determine $D_f$ e $D_g$;

b) Determine os domínios das funções $f+g$, $f-g$, $f\cdot g$ e $f/g$;

c) Dê as sentenças abertas que definem cada uma das funções.

**Solução:**

a) $D_f = [2, +\infty)$ e $D_g = (-\infty, 5]$.

b) Como $D_f \cap D_g = [2,5]$, tem-se $D_{(f+g)} = D_{(f-g)} = D_{(f \cdot g)} = D_f \cap D_g = [2,5]$. Além disso, todo elemento $x$ que pertence ao domínio de $f/g$ é tal que: $x \in D_f \cap D_g$ e $g(x) \neq 0$, então $D_{f/g} = [2,5)$.

c)

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \sqrt{x-2} + \sqrt{5-x}$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = \sqrt{x-2} - \sqrt{5-x}$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = \sqrt{x-2} \cdot \sqrt{5-x}$$

$$(f/g)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{5-x}}$$

Vejamos outro exemplo:

**Exemplo 1.9-** O custo total, em reais, para fabricar $n$ unidades (doses) da vacina contra a poliomielite é dado pela função $C(n) = n^3 - 8n^2 + 5n + 20$.

a) Determine o custo de fabricação de 10 doses da vacina;

b) Determine o custo de fabricação da 10ª dose da vacina.

**Solução:**

a) O custo de fabricação de 10 doses é o valor da função para $n = 10$

C(10) = $10^3 - 8 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 20 = 1000 - 800 + 50 + 20 = 270$ reais.

b) O custo de fabricação da 10ª dose é a diferença entre o custo de fabricação de 10 doses e o custo de fabricação de 9 unidades.

Custo da 10ª dose = C(10) – C(9)

= 270 – [93 – 8(9)2 + 5(9) + 20]

= 270 – (729 – 648 + 45 + 20)

= 270 – 146

= 124 reais.

Ocorrem, com bastante frequência, situações nas quais uma grandeza é dada como função de uma variável que, por sua vez, pode ser escrita como função de outra variável. Combinando as funções de forma apropriada, é possível expressar a grandeza original em função da segunda variável. Esse processo é conhecido como *composição de funções*.

**Exemplo 1.10 -** Sejam $f$ e $g$ funções de domínio real definidas por $f(x) = 4x + 3$ e $g(x) = x - 1$. Determine o valor de:

a) $f(g(x))$;
b) $g(f(x))$.

**Solução:**

a) $f(g(x)) = 4g(x) + 3 \quad \therefore \quad f(g(x)) = 4(x-1) + 3 \quad \therefore \quad f(g(x)) = 4x - 1$.
b) $g(f(x)) = f(x) - 1 \quad \therefore \quad g(f(x)) = 4x + 3 - 1 \quad \therefore \quad g(f(x)) = 4x - 2$.

**Exemplo 1.11 -** Os ambientalistas estimam que, em certa cidade, a concentração média de monóxido de carbono no ar durante o dia será $c(p) = 0{,}5p + 1$ partes por milhão $(ppm)$ quando sua população for de $p$ mil habitantes. Um estudo demográfico indica que a população da cidade, dentro de $t$ anos, será $p(t) = 10 + 0{,}1t^2$ mil habitantes. Assim:

a) Determine a concentração média de monóxido de carbono no ar durante o dia em função do tempo;
b) Daqui a quanto tempo a concentração monóxido de carbono atingirá o valor de $6{,}8\ ppm$?

**Solução:**

a) Como a concentração monóxido de carbono está relacionada à variável $p$ através da equação:

$$c(p) = 0{,}5p + 1,$$

e a variável $p$ está relacionada à variável $t$ através da equação :

$$p(t) = 10 + 0{,}1t^2,$$

a função composta $c(p(t)) = 0{,}5(10 + 0{,}1t^2) + 1$, ou equivalentemente,

$$c(p(t)) = 6 + 0{,}05t^2,$$

expressa a concentração de monóxido de carbono no ar em função da variável $t$.

b) Fazendo $c\big(p(t)\big) = 6{,}8$ e explicitando $t$, temos:

$$6 + 0{,}05t^2 = 6{,}8 \quad \therefore \quad 0{,}05t^2 = 0{,}8 \quad \therefore \quad t^2 = \frac{0{,}8}{0{,}05} = 16$$

Portanto, $t = \sqrt{16} = 4$. Assim, a concentração de monóxido de carbono no ar atingirá o valor de $6{,}8\,ppm$ daqui a 4 anos.

## 2.4 Funções exponenciais e logarítmicas

### 2.4.1 O Número $e$

Na álgebra, é comum usar bases $b = 2$ e $b = 10$, mas, no cálculo, é muito mais conveniente usar como base um número representado pela letra "$e$" e definido da seguinte maneira:

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

À primeira vista, parece que esse limite tende a $1$, já que $\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ tende a $1$ quando $n \to \infty$, e $1^n = 1$ para qualquer $n$. No entanto, o processo de calcular limite não funciona dessa forma. De fato, uma observação do quadro 1.4 nos permite especular que tal limite se aproxima do número irracional, $2{,}71828\ldots$, que definimos como $e$.

**Quadro 1.4. Comportamento de $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ quando x cresce infinitamente.**

| $x$ | 10 | 100 | 1000 | 10000 | $x \to \infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 2,5937 | 2,7048 | 2,7169 | 2,7181 | $f(x) \to e$ |

Portanto, podemos escrever:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

O gráfico da função $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$, definida para $1 + \frac{1}{x} > 0$, logo $x > 0$ ou $x < -1$, tem o aspecto indicado na figura 1.7, segue:

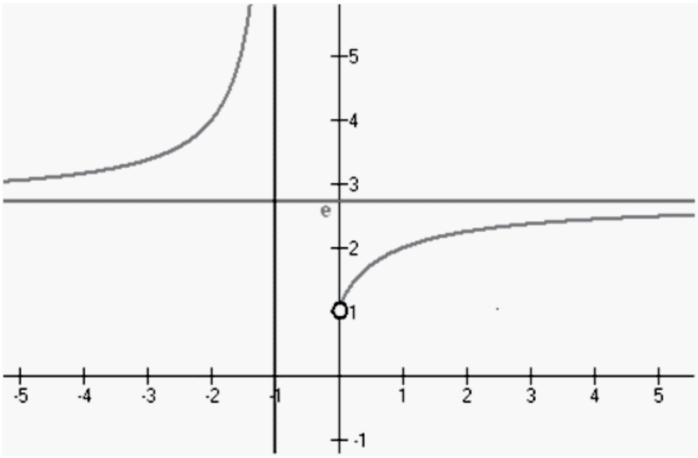



Figura 1.7

### 2.4.2 Função exponencial

Dado um número real $a$, tal que $0 < a \neq 1$, chamamos *função exponencial de base* $\boldsymbol{a}$ a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que associa, a cada real $x$, o número $a^x$. As propriedades seguintes caracterizam as funções exponenciais (figura 1.8).

**P$_1$.** Na função exponencial $f(x) = a^x$, temos:

$$x = 0 \Rightarrow a^0 = 1$$

Isto é, o par ordenado $(0,1)$ pertence à função, e o gráfico corta o eixo $y$ no ponto de ordenada $1$;

**P$_2$.** A curva representativa está toda acima do eixo $x$, pois $y = a^x$, para todo $x \in \mathbb{R}$;

**P$_3$.** Se $a > 1$, a função é crescente, isto é, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$;

**P$_4$.** Se $0 < a < 1$, a função é decrescente, isto é $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

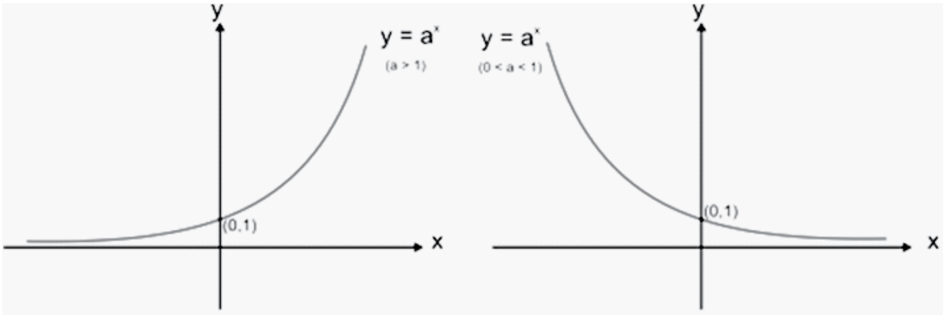



Figura 1.8

**Exemplo 1.12 -** Construir o gráfico da função $f(x) = 2^x$.

Para construir o gráfico de $f(x) = 2^x$, vamos plotar alguns pontos do gráfico que estão no quadro 1.5.

| Quadro 1.5. Valores de $f(x) = 2^x$ para alguns valores de x. | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| $f(x)$ | $1/8$ | $1/4$ | $1/2$ | 1 | 2 | 4 | 8 |

O gráfico, então, tem o aspecto da figura 1.9.

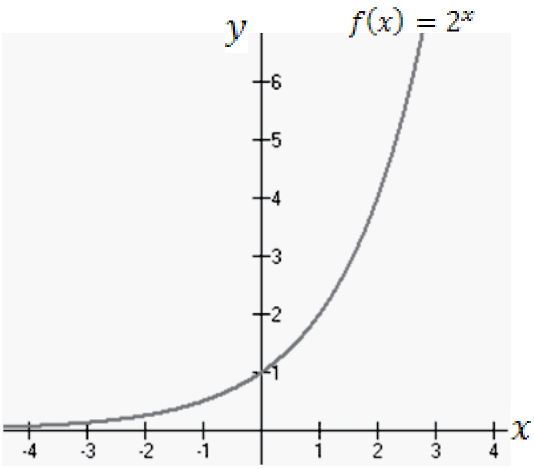



Figura 1.9. – Gráfico da função exponencial na base 2.

**Exemplo 1.13 -** O número de bactérias de uma cultura, $t$ horas após o início de um certo experimento, é dado pela expressão $n(t) = 1200 \cdot 2^{0,4t}$. Nestas condições, quanto tempo após o início do experimento a cultura terá 38.400 bactérias?

**Solução:**

Basta fazer $n(t) = 38.400$. Assim, temos:

$$1200 \cdot 2^{0,4t} = 38.400 \quad \Rightarrow \quad 2^{0,4t} = \frac{38.400}{1200} = 32$$

Então,

$$2^{0,4t} = 2^5 \quad \therefore \quad 0,4t = 5 \quad \therefore \quad t = 12,5$$

Portanto, a cultura terá 38.400 bactérias após 12h30min.

**Exemplo 1.14 -** Segundo dados de uma pesquisa, a população de certa região do país vem decrescendo em relação ao tempo $t$, contado em anos aproximadamente, segundo a relação

$$p(t) = p_0 \cdot 2^{-0,25t}$$

Sendo $p_0$ uma constante que representa a população inicial dessa região, e $p(t)$, a população $t$ anos após, determine quantos anos se passarão para que essa população fique reduzida à quarta parte do que era inicialmente.

**Solução:**

Segundo o enunciado, devemos resolver a equação:

$$p(t) = \frac{1}{4}p_0 \quad \Rightarrow \quad p_0 \cdot 2^{-0,25t} = \frac{p_0}{4}$$

Resolvendo para $t$, vem:

$$2^{-0,25t} = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad 2^{-0,25t} = 2^{-2} \quad \Rightarrow \quad t = 8$$

Portanto, depois de 8 anos, a população estará reduzida a $^1/_4$ da inicial.

### 1.2.4.3 Função logarítmica

O logaritmo de $x$ na base $a$ é o número $y$ tal que $a^y = x$, propriedade que indicamos escrevendo $y = \log_a x$. Quando a base $a$ é igual a $e$, o número $y$ tal que $e^y = x$ é conhecido como *logaritmo natural* **de** $\boldsymbol{x}$, propriedade que indicamos escrevendo $y = \ln x$. Ou seja,

$$y = \ln x \quad \Leftrightarrow \quad e^y = x$$

Em todos os casos, o logaritmo existe apenas para $x > 0$.

As propriedades, a seguir, caracterizam as funções logarítmicas (figura 1.10):

**P$_1$.** Na função logarítmica $f(x) = \log_a x$, temos:
$f(1) = \log_a 1 = 0$, isto é, o par ordenado $(1,0)$ pertence à função, e o gráfico corta o eixo $x$ no ponto de abscissa $1$;

**P$_2$.** A curva representativa da função está toda à direita do eixo $y$ $(x > 0)$;

**P$_3$.** Se $a > 1$, a função é crescente, isto é, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$;

**P$_4$.** Se $0 < a < 1$, a função é decrescente, isto é, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

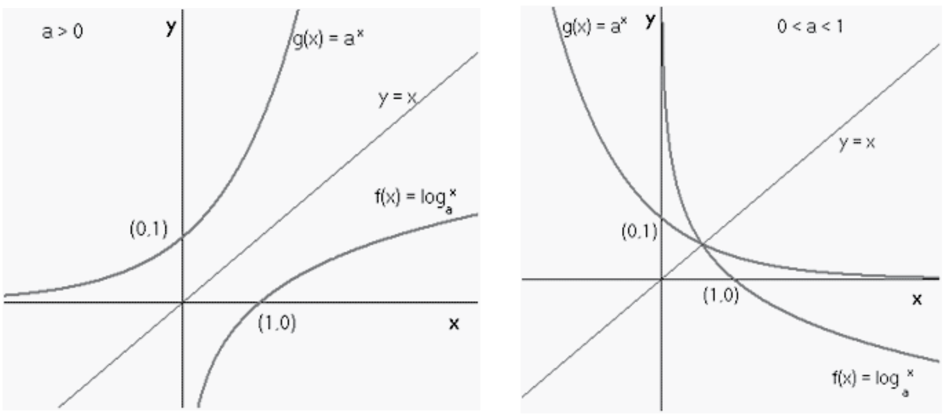



Figura 1.10

**Exemplo 1.15** - Determine:

a) $\ln e$ b) $\ln 1$ c) $\ln \sqrt{e}$

**Solução:**

a) $\ln e = x \quad \Rightarrow \quad e^x = x \quad \Rightarrow \quad x = 1 \quad \Rightarrow \quad \ln e = 1$;

b) $\ln 1 = x \quad \Rightarrow \quad e^x = 1 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \quad \Rightarrow \quad \ln 1 = 0$;

c) $\ln \sqrt{e} = x \ \Rightarrow \ \ln e^{\frac{1}{2}} = x \ \Rightarrow \ x = \frac{1}{2}\ln e \ \Rightarrow \ x = \frac{1}{2} \ \Rightarrow \ \ln \sqrt{e} = \frac{1}{2}$.

**Exemplo 1.16 -** Mostre que as funções: exponencial natural (base $e$) e logaritmo natural (base $e$) são inversas uma da outra.

**Solução:**

Sendo $f(x) = e^x$ e $g(x) = \ln x$, basta mostrar que $f(g(x)) = g(f(x)) = x$, isto é, a composição de uma função com sua inversa dá a função identidade.

De fato:

$$f(g(x)) = e^{\ln x} = x \quad \text{e} \quad g(f(x)) = \ln e^x = x$$

**Exemplo 1.17 -** Sabemos que o número de bactérias numa cultura, depois de um tempo $t$, é dado por $n(t) = n_0 \cdot e^{kt}$, em que $n_0$ é o número inicial (quando $t = 0$), e $k$ é a taxa de crescimento relativo. Em quanto tempo o número de bactérias dobrará se a taxa de crescimento contínuo é de $5\%$ ao minuto?

**Solução:**

Pelos dados do problema, a pergunta é: em quanto tempo $n = 2n_0$? Assim, temos:

$$n(t) = n_0 \cdot e^{kt} \;\Rightarrow\; 2n_0 = n_0 \cdot e^{0{,}05t} \;\Rightarrow\; 2 = e^{0{,}05t}$$

Daí, aplicando a função logaritmo natural a ambos os lados da igualdade, vem:

$$\ln 2 = \ln e^{0{,}05t} \quad \Rightarrow \quad t = \frac{\ln 2}{0{,}05}$$

Usando uma calculadora, obtemos $\ln 2 = 0,6931$. Portanto:

$$t = \frac{0,6931}{0{,}05} = 13{,}8\,min$$

Ou, equivalentemente, $13\;min\;48\;s$.

13,8*min* = 13*min* + 0,8*min*.

Ademais,

0,8*min* → *p seg*.

1*min* → 60 *seg*.

*Portanto;*

*p* = 0,8·60 = 48 *seg*.

**Exemplo 1.18** - Em quantos anos 500 gramas de uma substância radioativa, que se desintegra a uma taxa de $3\%$ ao ano, se reduzir-se-ão a 100g?

**Solução:**

Seja $Q = Q_0 e^{-kt}$, em que $Q$ é a massa da substância, $k$ é taxa de decaimento radioativo e $t$ é o tempo em anos. Então:

$$Q = Q_0 e^{-kt} \quad \Rightarrow \quad 100 = 500 \cdot e^{-0{,}03t}$$

Que é equivalente a:

$$\frac{1}{5} = e^{-0{,}03t} \quad \Rightarrow \quad \ln\left(\frac{1}{5}\right) = -0{,}03t \cdot \ln e$$

E assim,

$$\ln 1 - \ln 5 = -0{,}03t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{\ln 5}{0{,}03} = \frac{1{,}6094}{0{,}03} \cong 53{,}6 \; anos$$

# 3. Limites de funções

## 3.1 Noção intuitiva de limite

As operações relacionadas à ideia de limite serão necessárias para compreensão das ideias de diferenciação e de integração, operações a serem discutidas numa parte subsequente do nosso curso. Neste contexto, é fácil compreender, portanto, que o conceito de limite é o esteio que dá sustentação a todo o cálculo. Abordaremos o conceito de limite da mesma forma que ele foi desenvolvido historicamente. Será, portanto, uma abordagem intuitiva que será feita através de exemplos específicos.

**Exemplo 1.19** - Vamos analisar o comportamento da função $f: \mathbb{R} - \{3\} \to \mathbb{R}$, dada por

$$f(x) = \frac{2x^2 - 6x}{x - 3}$$

quando $x$ se aproxima de 3. Com $x \neq 3$, podemos reescrever a função $f$ como:

$$f(x) = \frac{2x(x-3)}{x-3} = 2x,$$

cuja representação gráfica aparece abaixo (figura 1.11).

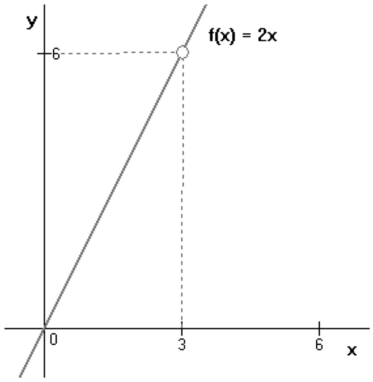



Figura 1.11

O quadro 1.6 mostra o que ocorre quando atribuímos a $x$ valores próximos de 3.

| Quadro 1.6 Valores de f (x) para valores de X próximos de 3. | | | |
|---|---|---|---|
| $x$ | $f(x)$ | $x$ | $f(x)$ |
| 2,99 | 5,98 | 3,01 | 6,02 |
| 2,999 | 5,998 | 3,001 | 6,002 |
| 2,9999 | 5,9998 | 3,0001 | 6,0002 |
| 2,99999 | 5,99998 | 3,00001 | 6,00002 |

A análise do quadro 1.6 e do gráfico (figura 1.11) mostra que, quando $x$ se aproxima de 3, por valores maiores ou menores que 3, $f(x)$ se aproxima de 6. Dizemos que o limite de $f(x)$, quando $x$ tende a 3, é 6, e escrevemos:

$$\lim_{x \to 3} f(x) = 6$$

para indicar que $x$ se aproxima de 3 pela direita, usamos $\lim_{x \to 3^+} f(x)$ , e, de modo análogo para a esquerda; $\lim_{x \to 3^-} f(x)$. De modo geral, se $f(x)$ se aproxima de um número $L$, quando $x$ se aproxima de um número $a$, tanto pela esquerda quanto pela direita, $L$ é o limite de $f(x)$ quando $x$ tende a $a$, e escreve-se

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

conforme se observa na figura 1.12

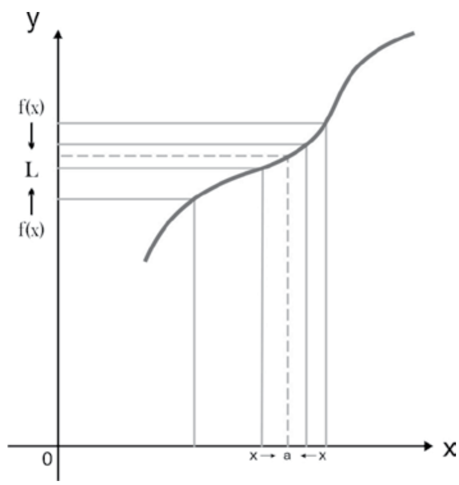



Figura 1.12

## 3.2 Considerações importantes

Para a existência de $\lim_{x\to a} f(x)$ o que interessa não é o particular valor que $f$ possa tomar no ponto $x = a$, mas o conjunto de valores que $f$ possa assumir numa vizinhança de $a$.

**Exemplo 1.20.** Seja a função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\begin{cases}2x+1, & x\neq 1\\ 4, & x=1\end{cases}$, temos que:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}(2x+1) = 3 \neq f(1)$$

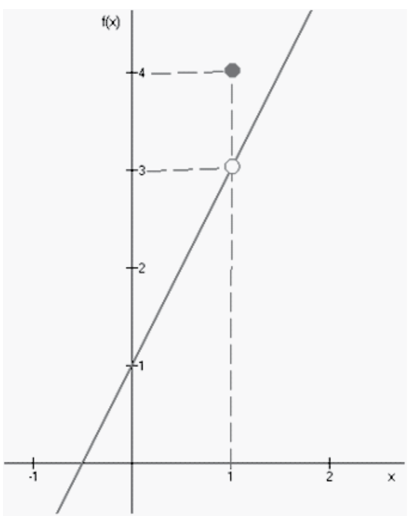



Figura 1.13

Este exemplo mostra que o valor de $f$ no ponto $x = 1$ não interessa no cálculo $\lim_{x\to 1} f(x)$. Notemos que, mesmo que a função não esteja definida em $x = 1$, o limite pode existir neste ponto, como pode ser observado no exemplo 1.19, onde a função não está definida em $x = 3$, mas $\lim_{x\to 3} f(x)$ existe.

**Exemplo 1.21 -** Consideremos as funções $f$ e $g$, assim definidas : $f(x) = \frac{2x^2-x-1}{x-1}$ e $g(x) = 2x + 1$. Quando $x \to 1$ $(x \neq 1)$, temos que

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} g(x) = 3$$

De fato, para $(x \neq 1)$,

$$f(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{x - 1} = \frac{(2x+1).(x-1)}{x-1} = 2x + 1$$

Este exemplo mostra que, se uma função $f$ não é definida para $x = a$, não se pode concluir que não exista $\lim_{x\to a} f(x)$, pois o que interessa no cálculo de $\lim_{x\to a} f(x)$ é o comportamento de $f$ numa vizinhança de $a$.

Por outro lado, o fato de se definir $f$ no ponto $a$, ou seja, $f(a)$ existe, não implica a existência de $\lim_{x\to a} f(x)$, como muito bem ilustram os dois próximos exemplos.

**Exemplo 1. 22 -** Seja a função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x \geq 1 \\ 2x-1, & x < 1 \end{cases}$, cujo gráfico encontra-se na figura 1.14, a seguir :

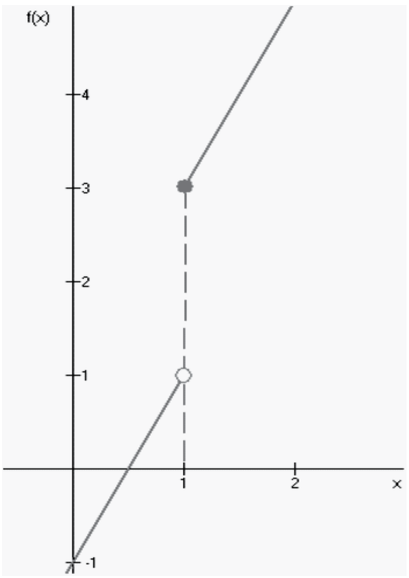



Figura 1.14

A figura mostra que, fazendo $x \to 1$ pela direita, $f(x) \to 3$. Fazendo $x \to 1$, pela esquerda, $f(x) \to 1$. Dizemos, neste caso, que os limites laterais são diferentes. Portanto, $\lim_{x\to 1} f(x)$ não existe, embora a função esteja definida em $x = 1$, pois $f(1) = 3$.

**Exemplo 1.23.** A população (em milhares) de uma colônia de bactérias $t$ minutos após a introdução de uma toxina é dada pela função:

$$f(t) = \begin{cases} t^2 + 7, & t < 5 \\ -8t + 72, & t \geq 5 \end{cases}$$

Assim:

a) Construa um esboço do gráfico de $f$;

b) Responda o tempo que a colônia leva para se extinguir;

c) Informe o $\lim_{t\to 5} f(t)$.

**Solução:**

a)

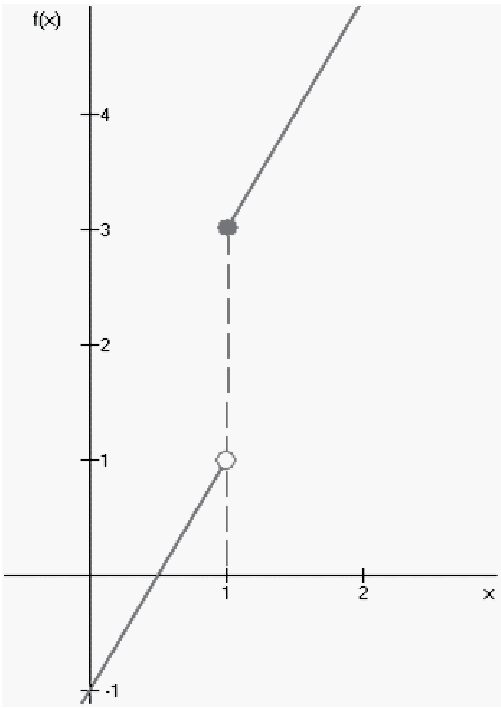



Figura 1.15

b) $\lim_{t\to 9} f(t) = \lim_{t\to 9}(-8t + 72) = -8(9) + 72 = 0.$

c) Temos que:

$$\lim_{t\to 5^-} f(t) = \lim_{t\to 5^-} (t^2 + 7) = 25 + 7 = 32$$

e

$$\lim_{t\to 5^+} f(t) = \lim_{t\to 5^+} (-8t + 72) = -8(5) + 72 = 32$$

Então,

$$\lim_{t\to 5} f(t) = 32$$

Por último, vale destacar que pode acontecer de não ser definida $f$ em $x = a$ e também de não existir $\lim_{x\to a} f(x)$.

**Exemplo 1.24 -** Seja a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(t) = \begin{cases} x, & x < 2 \\ 4, & x > 2 \end{cases}$$

cujo gráfico encontra-se na figura 1.16, a seguir, mostre que não existe $\lim_{x\to 2} f(x)$.

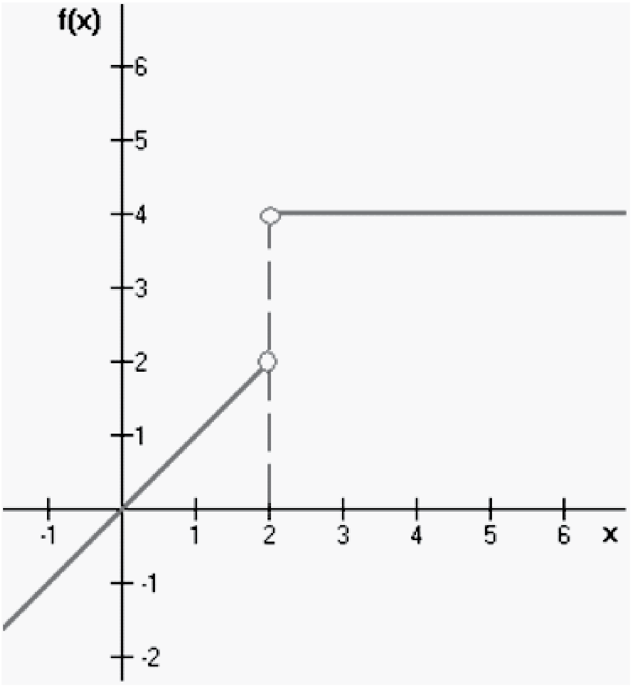



Figura 1.16

**Solução:**

Fazendo $x \to 2$, pela direita,

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = 4$$

Fazendo $x \to 2$, pela esquerda,

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = 2$$

Então, como os limites laterais são diferentes, não existe $\lim_{x\to 2} f(x)$. Observe também que $f$ não está definida em $x = 2$.

## 3.3 Propriedades operatórias dos limites

Se $\lim_{x\to a} f(x) = L$ e $\lim_{x\to a} g(x) = M$, então, vale as seguintes propriedades:

**P₁.** $\lim_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x) = L \pm M$;

**P₂.** $\lim_{x\to a}[f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x) = L \cdot M$;

**P₃.** $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \dfrac{L}{M}$, desde que $M \neq 0$;

**P₄.** $\lim_{x\to a} f(x)^n = \left(\lim_{x\to a} f(x)\right)^n = L^n$, $\quad n \in \mathbb{N}^*$;

**P₅.** $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)} = \sqrt[n]{L}$, $\quad n \in \mathbb{N}^*$ e $f(x) \geq 0$ (Se $L < 0$, $n$ é ímpar);

**P₆.** $\lim_{x\to a}[\ln f(x)] = \ln\left[\lim_{x\to a} f(x)\right] = \ln L$ Se $L > 0$.

**Exemplo 1.25** - Calcule os seguintes limites:

a) $\lim_{x\to 3}(x^2 + 2^x)$;

b) $\lim_{x\to 0}\frac{2x+1}{2x-1}$;

c) $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}}[2sen(x).\cos(x)]$;

d) $\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2-4}$;

e) $\lim_{x\to 1}\frac{x^4-1}{x-1}$;

f) $\lim_{x\to 2}\frac{x+1}{x-2}$;

**Solução:**

a) Como a função é contínua em todo seu domínio, o valor do limite é o valor da função no ponto, isto é, $f(3)$. Então, $\lim_{x\to 3}\left(x^2+2^x\right)=3^2+2^3=17$.

b) Como $\lim_{x\to 0} 2x-1=-1\neq 0$, temos que

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x+1}{2x-1}=\frac{\lim_{x\to 0} 2x+1}{\lim_{x\to 0} 2x-1}=-1$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{4}}[2sen(x).\cos(x)]=2sen\left(\frac{\pi}{4}\right).\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$$

c) Como $sen\, x$ e $\cos x$ são contínuas em $x=\frac{\pi}{4}$, temos:

d) Como $x^2-4$ se anula para $x=\pm 2$, não podemos usar o mesmo recurso usado no item b. Isto é dos casos de indeterminação, que podemos removê-la através de uma simples fatoração. De fato:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{x+2}=4$$

e) É válido o mesmo argumento do item anterior. Veja:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^4-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^3+x^2+x+1)}{x-1}=4$$

f) A regra do quociente não se aplica para

$$\lim_{x\to 2}\frac{x+1}{x-2},$$

já que o limite do denominador é zero. Como o limite do numerador é 3, que é diferente de zero, chegamos à conclusão que o limite não existe (figura 1.17) .

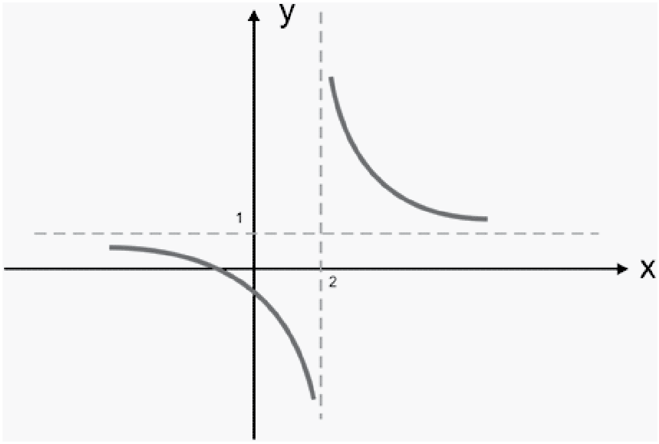



Figura 1.17

### 3.4 Limites e continuidade

Segundo o dicionário de autoria de Aurélio B.H. Ferreira, continuidade é a qualidade ou caráter do que é contínuo. Geometricamente, podemos dizer que é contínua uma função cujo gráfico pode ser construído sem tirar a caneta do papel (figura 1.18).

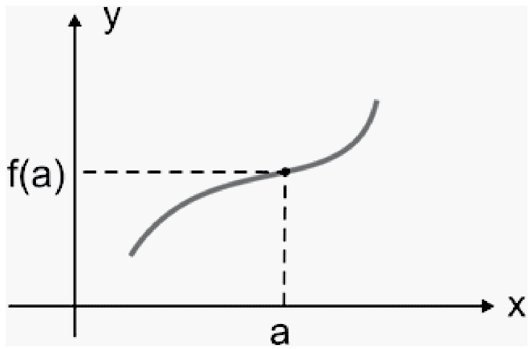



Figura 1.18

Para se obter uma definição precisa de continuidade, é preciso lançar mão do conceito de limite:

*"Seja $f$ uma função definida em um intervalo $I$, e seja $a \in I$. Dizemos que a função é contínua no ponto $\underline{a}$ se $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$".*

Da definição acima, decorre que f é contínua no ponto a se, e somente se, forem verificadas três condições:

**i** $f$ é definida para $x = a$;
**ii** Existe $\lim_{x\to a} f(x)$;
**iii** $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

A função é descontínua em $a$ se ocorrer ao menos uma das seguintes condições:

a) $f$ **NÃO** está definida em $x = a$;

**Exemplo 1.26 –** A função $f(x) = \frac{(x-2)(x-3)}{x-3}$ é descontínua no ponto $x = 3$, pois não se define $f(3)$. Veja que $\lim_{x\to 3} f(x) = 1$, mas isto não é suficiente para a continuidade (figura 1.19).

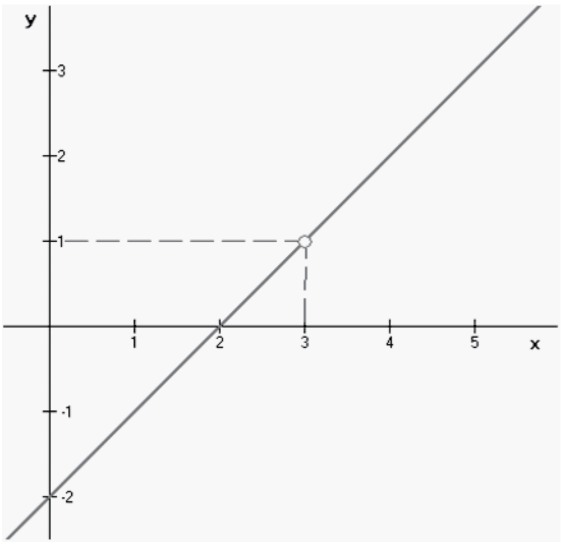


Figura 1.19

b) **NÃO** existe $lim_{x\to a} f(x)$;

**Exemplo 1.27 –** Observe a figura 1.20 da função $f$ definida abaixo.

A função definida por $f(x) = \begin{cases} x-2, & x \le 3 \\ 2, & x > 3 \end{cases}$ é descontínua em $x = 3$, pois $\lim_{x\to 3^-} f(x) = 1$ e $\lim_{x\to 3^+} f(x) = 2$, e, portanto, não existe $\lim_{x\to 3} f(x)$.

c) Existe $\lim_{x\to a} f(x)$, $f(a)$ está definido, mas $\lim_{x\to a} f(x) \neq f(a)$.

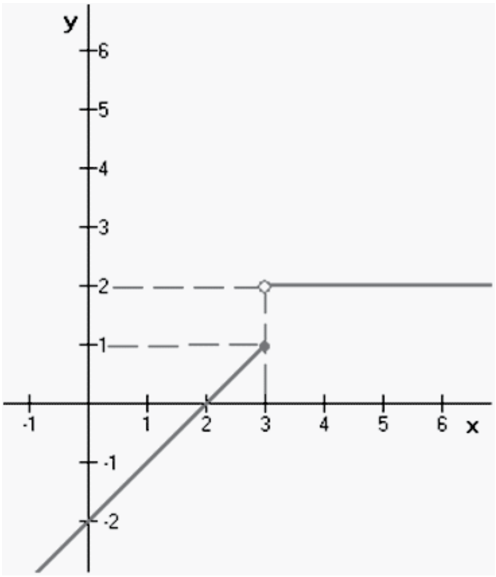



Figura 1.20

**Exemplo 1.28 -** A função definida por $f(x) = \begin{cases} \frac{(x-2)(x-3)}{x-3}, & x \neq 3 \\ 2, & x = 3 \end{cases}$ é descontínua no ponto $x = 3$, pois $\lim_{x \to 3} f(x) = 1$ e $f(3) = 2$.

**Exemplo 1.29** - A figura 1.21 apresenta a curva de aprendizado de certo indivíduo. Tendo, no início, nenhum conhecimento do assunto ensinado, o indivíduo progride constantemente em direção à compreensão desse assunto no intervalo de tempo $0 \leq t \leq t_1$. Nesse intervalo, o progresso do indivíduo diminui à medida que se aproxima o instante $t_1$, pois o indivíduo não consegue compreender um conceito particularmente difícil. De repente, a compreensão ocorre no instante $t_1$, elevando seu conhecimento do assunto a um nível mais alto. A curva é descontínua em $t_1$.

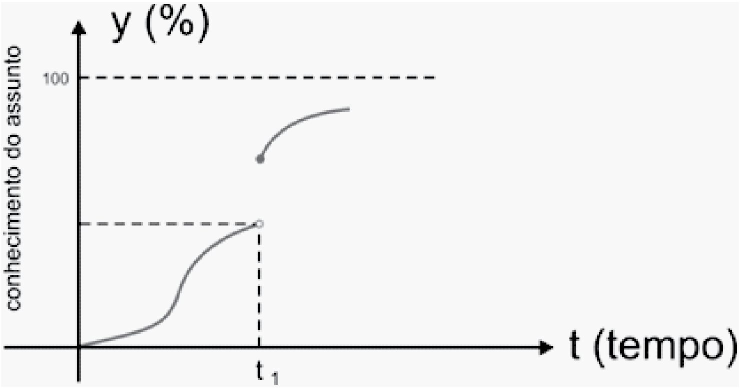



Figura 1.21

## Texto complementar

### O rápido crescimento da função exponencial e a vagarosidade do logaritmo

Como a função exponencial é crescente e tem derivada igual a si mesma, portanto sempre positiva, seu gráfico tem concavidade voltada para cima. Isso está bem representado na figura 1.23, construída a partir do gráfico do logaritmo.

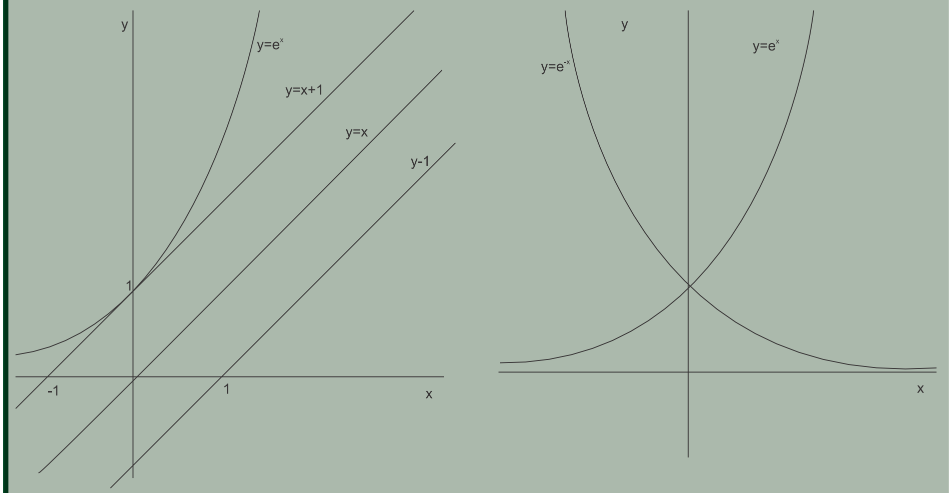



Figura 1.23

Uma propriedade importante da exponencial $e^x$ é seu rápido crescimento com o crescer do $x$. Infelizmente, essa propriedade nem sempre é devidamente enfatizada no ensino de 2º grau, talvez porque o ensino de logaritmo continue sendo feito como se ele fosse apenas um instrumento de cálculo à moda antiga, sem maiores preocupações com aspecto funcional do logaritmo e da exponencial.

Suponhamos que você, como professor, estivesse ensinando essas funções a seus alunos. Pois bem, faça os gráficos delas na lousa, mas proponha à sua classe a seguinte "brincadeira" (que, por sinal, vai animar muito a turma):

- Pessoal, agora vocês vão fazer o gráfico da função exponencial aí no caderno. Você, Marcelo, venha à lousa me ajudar. Eu vou dando os números (se você tiver uma calculadora de bolso, use-a para fazer os cálculos na hora. Fica mais interessante) e você vai escrevendo. Vamos começar fazendo uma tabela (quadro 1.8), pondo, numa primeira coluna, alguns valores de $x$; numa segunda coluna, os valores correspondentes da função $y = x^2$, só para efeito de comparação; e, finalmente, numa terceira coluna, listamos os valores correspondentes de $y = e^x$. Vamos usar o centímetro como unidade de comprimento nos dois eixos. Vamos lá, pessoal!

Veja, na página seguinte, a tabela que Marcelo escreveu na lousa, com valores arredondados, e veja até onde o professor e sua turma conseguem ir na construção do gráfico. Quando $x = 5$ cm, Marcelo terá de marcar 25 cm na vertical para a função $y = x^2$ e 148 (quase um metro e meio) para a função exponencial; quando $x = 10$

cm, Marcelo terá de marcar, na vertical, $x^2 = 100$ cm = 1 metro e $e^x = 220$ metros, a altura de um prédio de mais de 70 andares ! Quando x passa por volta de 30 cm e $x^2$ por volta de 9 metros, $e^x$ já está assumindo a distância da Terra ao Sol! E quando $x$ estiver por volta de 40 cm e $x^2$ por volta de 1.700 metros, $e^x$ estará assumindo o valor de um ano-luz; e 4,3 anos-luz, ou seja, a distância da estrela mais próxima de nós (Alfa da constelação do Centauro), quando $x$ for pouco mais de 42 cm!

**Quadro 1.8 – Comparação entre os crescimentos das funções potência e exponencial natural.**

| $x$ | $y = x^2$ | $y = e^x$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 cm |
| 3 | 4 | 20 cm |
| 5 | 25 | 148 cm |
| 10 | 100 | 220 m |
| 15 | 225 | 33 km |
| 20 | 400 | 4.852 km |
| 30,3357 | 920 | Distância da Terra ao Sol |
| 41,39 | 1.713 | 1 ano-luz |
| 42,85 | 1.836 | 4,3 anos-luz |

Distância da Terra ao Sol = 149.500.000 km

1 ano-luz = 946.728 $10^7$ km

4,3 anos-luz = 407.093 $10^8$ km = distância da estrela mais próxima do Sol.

Estes poucos cálculos mostram claramente o quão rapidamente cresce a função exponencial com o crescer de seu argumento.
Em correspondência ao rápido crescimento da função exponencial, está o vagaroso crescimento da função logarítmica. De fato, como estamos lidando com funções que são a inversa uma da outra, o gráfico do logaritmo é simplesmente o reflexo do gráfico da função correspondente em relação à reta $y = x$, como ilustra a figura 1.23.
Isto significa que a 3ª coluna da tabela representa os valores de $x$, e a 1ª representa os correspondentes valores de $\ln x$. Assim, para conseguirmos subir 5 cm na vertical das ordenadas, é preciso fazer $x = 148$ cm; para subir 10 cm, é preciso andar 220 metros na horizontal; para subir apenas 20 cm, é preciso caminhar 4.852 km na horizontal; para subir pouco mais de 40 cm, é preciso caminhar 1 ano-luz na horizontal! E assim por diante. A função $y = \ln x$ é realmente uma função de crescimento muito vagaroso (Ávila, 1994).

## Síntese da Capítulo

Neste capítulo, fizemos uma abordagem geral sobre funções. Começamos discutindo as primeiras ideias sobre funções, para depois podermos chegar a uma definição matematicamente precisa. Foi dada também muita ênfase à construção de gráficos durante todo o texto, já que esse assunto tem um grande apelo geométrico que deve ser explorado. Finalmente, introduzimos a ideia de limite, que é a principal ferramenta a ser utilizada nos capítulos seguintes, nos quais serão abordadas a derivação e a integração de funções de uma variável. Exemplos escolhidos dentro da área de Biologia permeiam todo o texto.

## Atividades de avaliação

**1.** Considere um processo de divisão celular em que cada célula se subdivide em outras duas a cada hora.

a) Partindo-se de uma única célula, iniciou-se uma experiência científica. Faça um quadro para representar a quantidade de células presentes nessa cultura após 1, 2, 3, 4, 5 e 6 horas do início da experiência;

b) Qual o tempo mínimo de horas (completas) necessárias para que haja mais de 1.000 células na cultura?;

c) Qual é a lei que relaciona o número de células $(n)$, encontrado na cultura após $t$ horas do início da experiência?

**2.** Para estudar a rapidez com que os animais aprendem, um estudante de etologia executou um experimento no qual um rato teve que percorrer, várias vezes, um labirinto. Suponha que o tempo necessário para o rato encontrar a saída do labirinto, na n-ésima tentativa, seja dado, em minutos, aproximadamente por:

$$f(n) = 3 + \frac{12}{n}$$

a) Qual é domínio da função $f$ ?;

b) Para que valores de n a função $f$ tem significado no contexto do experimento?;

c) Quanto tempo o rato levou para encontrar a saída do labirinto na terceira tentativa?;

d) Em que tentativa o rato conseguiu encontrar a saída, pela primeira vez, em 4 minutos ou menos?;

**Etologia** - A Etologia originou-se a partir da zoologia. Está ligada aos nomes de Konrad Lorenz e de Niko Tinbergen, sob influência da teoria darwiniana, tendo como uma de suas preocupações básicas a evolução do comportamento através do processo de seleção natural. Segundo Darwin (1850 apud Bowlby,1982), cada espécie é dotada de seu próprio repertório peculiar de padrões de comportamento, da mesma forma que é dotada de suas próprias peculiaridades anatômicas. Os etólogos estudam esses padrões de comportamento específicos das espécies, fazendo-o, preferencialmente, no ambiente natural, uma vez que acreditam que detalhes importantes do comportamento só podem ser observados durante o contato estreito e continuado com espécies particulares que se encontram livres no seu ambiente.

e) De acordo com a função $f$ dada, o que acontece com o tempo necessário para que o rato encontre a saída do labirinto quando o número de tentativas aumenta? O rato conseguirá, depois de certo número de tentativas, encontrar a saída em menos de 3 minutos?

**3.** Foi observado que o número de cricris que um grilo faz por minuto depende da temperatura. Os resultados experimentais estão no quadro 1.7 (para $T < 3°\text{C}$, os grilos permanecem silenciosos):

**Quadro 1.7. Número de cricris dos grilos (c), segundo a temperatura ambiente em ºC**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Número de cricris (c) | 0 | 5 | 10 | 20 | 60 |
| Temperatura T (ºC) | 3 | 4 | 5 | 7 | 15 |

a) Expresse $T$ com função linear de $C$;

b) Quantos "cricris" faz um grilo, por minuto, quando a temperatura ambiente é 25 $°\text{C}$ ?;

c) Se um grilo faz 37 cricris em 30 segundos, qual será a temperatura ambiente?

**4.** Determinada proteína é sintetizada por um microrganismo e será utilizada quando for iniciado o processo de divisão celular. De fato, a síntese dessa proteína prosseguirá até ser atingido determinado valor. A partir daí, inicia-se o processo de divisão celular, quando ela começa a ser consumida e decresce em quantidade. Em condições experimentais, verificou-se que a quantidade da proteína era dada por:

$$p(t) = a + bt - ct^2,$$

onde $t$ se mede em minutos, enquanto $a, b$ e $c$ são constantes positivas.

a) Faça um gráfico representativo da situação da função $p = f(t)$;

b) Em que instante a proteína começa a ser utilizada?

**5.** Estima-se que, daqui a *t* anos, um certo bairro terá uma população de

$$p(t) = 20 - \frac{6}{(t+1)} \; mil \; habitantes.$$

a) Qual será a população do bairro daqui a 9 anos ?;

b) Qual será o aumento da população durante o 9º ano?

**6.** Uma pesquisa ecológica determinou que a população ($s$) de sapos de uma determinada região, medida em centenas, depende da população ($m$) de insetos, medida em milhares, de acordo com a equação $s(m)=65+\sqrt{\frac{m}{8}}$. A população de insetos, por sua vez, varia com a precipitação $(p)$ de chuva, em centímetros, de acordo com a equação $m(p)=43p+7{,}5$.

a) Expresse a população de sapos como função da precipitação;

b) Calcule a população de sapos quando a precipitação é de 1,5 $cm$.

**7.** A taxa de crescimento populacional da bactéria *Escherichia coli* no intestino humano é proporcional ao seu tamanho. Em condições laboratoriais ideais, quando esta bactéria é desenvolvida em caldo de cultura, o número de células na cultura dobra, aproximadamente, a cada 20 minutos.

a) Se a quantidade inicial de células era de 100, determine a função $Q(t)$ que expressa o crescimento exponencial do número de células desta bactéria em função do tempo;

b) Se a quantidade inicial de células fosse 1000, como isso alteraria o nosso modelo?

**8.** Os biólogos afirmaram que, sob condições ideais, o número de bactérias numa cultura cresce exponencialmente. Suponha que existem inicialmente 2.000 bactérias e que existirão 6.000 bactérias 20 minutos depois. Quantas bactérias existirão após 1 hora? (Use o modelo obtido no item a da atividade anterior)

**9.** A constante de decaimento radioativo para o estrôncio 90 é $\mu=0{,}0244$, quando o tempo é medido em anos. Quanto tempo a quantidade $P_0$ de estrôncio demora para cair até metade do seu tamanho original? (Use o modelo obtido no item a, com $\mu$ = 0,0244 e ln 2 = 0,69314718)

**10.** Suponha que o crescimento populacional de duas cidades A e B é descrito pela equação $P(t)=P_0e^{kt}$, onde:

$P_0$ é a população no início da observação;

$k$ é a taxa de crescimento populacional;

$t$ é o tempo em anos;

$e$ é a base do logaritmo natural;

$P(t)$ é a população t anos após o início da observação.

Se, no início de nossa observação, a população da cidade A é o quíntuplo da população da cidade B, e se a taxa de crescimento de A permanecerá em 2% ao ano e a de B em 10% ao ano, em quantos anos, aproximadamente, as duas cidades possuirão o mesmo número de habitantes? Considere $\ln 5=1{,}6$.

**11.** Os biólogos dizem que há uma alometria entre duas variáveis, $x$ e $y$, quando é possível determinar duas constantes, $c$ e $n$, de maneira que $y = cx^n$. Nesses casos, consideremos uma experiência hipotética na qual se obteve os seguintes dados:

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| 2 | 16 |
| 20 | 40 |

Supondo que haja uma relação de alometria entre $x$ e $y$ e considerando $\log 2 = 0{,}301$, determine o valor de $n$.

**12.** Sendo $f(x) = \frac{4x^2-1}{2x-1}$ definida em $\mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$, determine $\lim_{x\to\frac{1}{2}} f(x)$.

Se as funções $f$ e $g$ são tais que $f(x) = g(x)$, para $x \neq a$ e $f(a) \neq g(a)$, elas possuem o mesmo comportamento em relação ao cálculo do limite quando $x \to a$.

**13.** Um gás (tal como vapor d'água ou oxigênio) é mantido à temperatura constante no pistão (figura 1.22). À medida que o gás é comprimido, o volume V decresce até que atinja uma certa pressão crítica. Além dessa pressão, o gás assume forma líquida. Use o gráfico da figura 1.16 para resolver e interpretar.

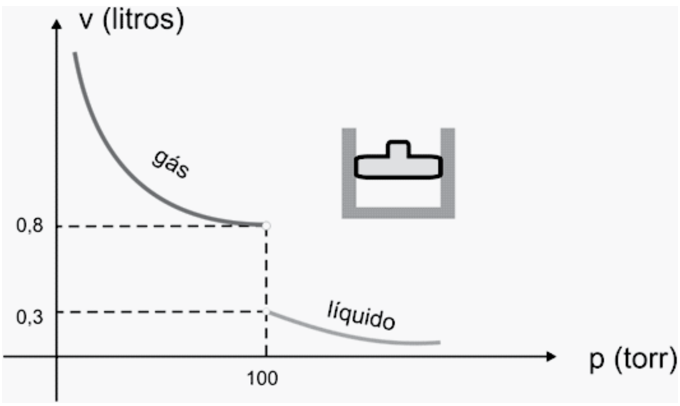



Figura 1.22

a) $\lim_{p\to 100^-} V$ b) $\lim_{p\to 100^+} V$ c) $\lim_{p\to 100} V$

**14.** Esboce o gráfico da função definida por

$$f(x) = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ 3, & 0 \leq x \leq 3 \\ x, & x > 3 \end{cases}$$

e verifique se existe $\lim_{x\to 0} f(x)$.

**15.** Calcule os limites:

a) $\lim_{h\to 1}\frac{\sqrt{h}-1}{h-1}$;

c) $\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x^2-4}$;

b) $\lim_{x\to -1}\frac{x^2+3x+2}{x^2-1}$;

d) $\lim_{x\to 0}(\cos x + sen\ x)$.

**16.** Numa floresta tropical da África a temperatura $t$ $(°C)$ varia conforme o mês do ano, segundo a função

$$t(m) = \begin{cases} m+1, & 1 \le m \le 3 \\ 3m-3, & 3 < m \le 5 \\ 4m-10, & 5 < m \le 12 \end{cases}$$

a) Esboce o gráfico da função $t$;

b) A função é descontínua em $x = 3$? E em $x = 5$?

**17.** A um mês de uma competição, um atleta de 75 kg é submetido a um treinamento específico para aumento de massa muscular, em que se anunciam ganhos de 180 gramas por dia. Suponha que isso realmente ocorra.

a) Determine o "peso" do atleta após uma semana de treinamento;

b) Encontre a lei que relaciona o "peso" do atleta (p) em função do número de dias de treinamento (n). Esboce o gráfico dessa função;

c) Será possível que o atleta atinja ao menos 80 kg em um mês de treinamento?

**18.** Leia esta notícia:

A mãe não precisa se preocupar se o bebê emagrecer nos primeiros dias de vida. Segundo o pediatra Marcelo Silber, do hospital Albert Einstein (SP), é comum a criança perder, em média, 10% do peso logo após o nascimento. "Esse peso é recuperado com o desenvolvimento e a amamentação", diz ele. No primeiro mês, o recém-nascido engorda cerca de 30 gramas por dia (Folha de São Paulo, 9/1/2003).

Suponha que uma criança tenha nascido com 3 quilos e, nos cinco primeiros dias, tenha perdido o percentual de "peso" sugerido no texto. A partir do sexto dia, começa a engordar na proporção descrita nessa reportagem. Determine o "peso" da criança no 13º e no 20º dia de vida, respectivamente.

**19.** Cíntia, Paulo e Paula leram a seguinte informação numa revista: "Conhece-se, há mais de um século, uma fórmula para expressar o peso ideal do corpo humano adulto em função da altura:

$$P = (a-100) - \left(\frac{a-150}{k}\right),$$

em que $P$ é o peso, em quilos; $a$ é a altura, em centímetros; $k = 4$, para homens, e $k = 2$, para mulheres".

a) Cíntia, que pesa 54 quilos, fez rapidamente as contas com $k = 2$ e constatou que, segundo a fórmula, estava 3 quilos abaixo do seu peso ideal. Calcule a altura de Cíntia.

b) Paulo e Paula têm a mesma altura e ficaram felizes em saber que estavam ambos exatamente com seu peso ideal, segundo a informação da revista.

Sabendo que Paulo pesa dois quilos a mais do que Paula, determine o peso de cada um deles.

**20.** Em um laboratório, dois tipos de bactérias, tipo A e tipo B, estão sendo pesquisados. Para uma das experiências, foram preparadas duas lâminas, que ficaram em observação por um período de 3 dias. Em cada lâmina, no mesmo instante, foram colocadas culturas dos dois tipos de bactérias, assim distribuídas:

Lâmina 1 : cultura de bactérias do tipo A;

*Lâmina 2 : cultura de bactérias do tipo B.*

Sabe-se que o número de bactérias em cada lâmina, em função do tempo t, em horas, durante o período da experiência, é dado pelas funções definidas por:

*I. bactérias do tipo A:* $a(t) = -10t^2 + 800t + 2000$;

*II. bactérias do tipo B:* $b(t) = -10t^2 + 900t + 100$.

Analise as afirmações seguintes, classificando-as como verdadeiras (V) ou falsas (F). Justifique.

a) Antes de completar 24 horas de experiência, a cultura da lâmina 1 e a cultura da lâmina 2 apresentaram, num mesmo instante, o mesmo número de bactérias;

b) O número de bactérias mencionadas no item anterior é, em cada lâmina, inferior a 13 mil;

c) Foram colocadas 900 bactérias do tipo B na lâmina 2;

d) Durante a experiência, o número de bactérias do tipo B chegou a 4.350 em dois instantes.

**21.** Os fisiologistas afirmam que, para um indivíduo sadio e em repouso, o número $N$ de batimentos cardíacos por minuto varia em função da temperatura ambiente, em graus Celsius, segundo a função $N(t) = 0{,}1t^2 - 4t + 90$. Qual o número de batimentos cardíacos de uma pessoa que está dormindo quando a temperatura ambiente for de 20ºC?

**22.** Imagine um país com uma população de 100 milhões de habitantes e a uma taxa de crescimento populacional de 2,4% ao ano. Em quantos anos a população desse país atingirá 5 bilhões de habitantes? Considere log2 = 0,301.

**23.** Estima-se que 1350 $m^2$ de terra sejam necessários para fornecer alimentos para uma pessoa. Admite-se, também, que há 30 x 1350 bilhões de $m^2$ de terra arável no mundo e que, portanto, uma população máxima de 30 bilhões de pessoas pode ser sustentada, se não forem exploradas outras fontes de alimento. A população mundial, no início de 1987, foi estimada em 5 bilhões de habitantes. Considerando que a população continua a crescer a uma taxa de 2% ao ano, e usando as aproximações ln 1,02 = 0,02; ln 2 = 0,70 e ln 3 = 1,10, determine em quantos anos, a partir de 1987, a Terra teria máxima população que poderia ser sustentada.

**24.** A intensidade de um terremoto, medido na escala Richter, é um número que varia de $I = 0$ até $I = 8{,}9$, para o maior terremoto conhecido. $I$ é dado por

$$I = \frac{2}{3}\log\left(\frac{E}{E_0}\right).$$

Onde: $E$ – energia liberada no terremoto em Quilowatt-hora, e

$E_0 = 7 \times 10^{-3}\ Kwh$.

a) Qual a energia liberada num terremoto de intensidade 8 na escala Richter?;

b) Aumentando de uma unidade a intensidade do terremoto, por quanto fica multiplicada a energia liberada? (Sugestão: use as propriedades dos logaritmos).

## Referências

AGUIAR, A.F.A.; XAVIER, A.F.S.; RODRIGUES, J.E.M. **Cálculo para ciências médicas e biológicas**. São Paulo: Editora Harbra, 1988. 351 p.

ÁVILA, G.S.S. **Introdução às funções e à derivada**. São Paulo: Atual Editora, 1994, 174 p.

GUELLI, C.A.; IEZZI, G.; DOLCE, O. **Álgebra IV**. São Paulo: Editora Moderna, v.8, 1969. 255 p.

HOFFMANN, L.; BRADLEY, G.L. **Cálculo : Um curso moderno e suas aplicações**. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 2002. 524 p.

IEZZI, G. *et al.* **Matemática : ciência e aplicações**. 4ª ed. São Paulo: Editora Moderna, v.1, 2006. 352 p.

IEZZI, G.; DOLCE, O.; MURAKAMI, C. **Fundamentos de matemática elementar**. 6ªed. São Paulo: Editora Moderna, 1983.v.2 . 172 p.

KIYUKAVA, R.; SHIGEKIYO, C.T.; YAMAMOTO, K. **Os elos da matemática**. São Paulo: Editora Saraiva, 1991.v.3. 336p.

NETO, A.A. *et al*.**Conjuntos e funções**. São Paulo: Editora Moderna, 1979.v.1. 344 p.

SWOKOWSKI, E.W. **Cálculo com geometria analítica**. São Paulo : Makron Books, 1994.v.1.744 p.

TAN, S.T. **Matemática aplicada à administração e economia**. 5ª ed. São Paulo: Pioneira Thonson, 2003. 638 p.

# Capítulo 2

# Introdução ao Estudo das Derivadas

## Objetivos

- Discutir a ideia de derivada, usando o conceito de reta tangente;
- Definir derivada e interpretar a derivada como taxa de variação;
- Estabelecer regras para o cálculo de derivadas.
- Aplicar derivadas em problemas de Biologia.

## 1. A derivada e a reta tangente

Os gregos definiram a reta tangente a um ponto de uma circunferência como sendo a reta que toca a circunferência neste ponto e é perpendicular ao raio no ponto de tangência. Porém, no caso de uma curva qualquer, a situação é mais delicada e vai exigir o conceito de limite. De fato:

**1.** Precisamos definir o raio de uma curva qualquer, o que é tão complicado quanto caracterizar a reta tangente;

**2.** Uma reta que passa por um único ponto de uma curva nem sempre é uma tangente; e

**3.** Uma verdadeira tangente pode tocar a curva em mais de um ponto (figura 2.1)

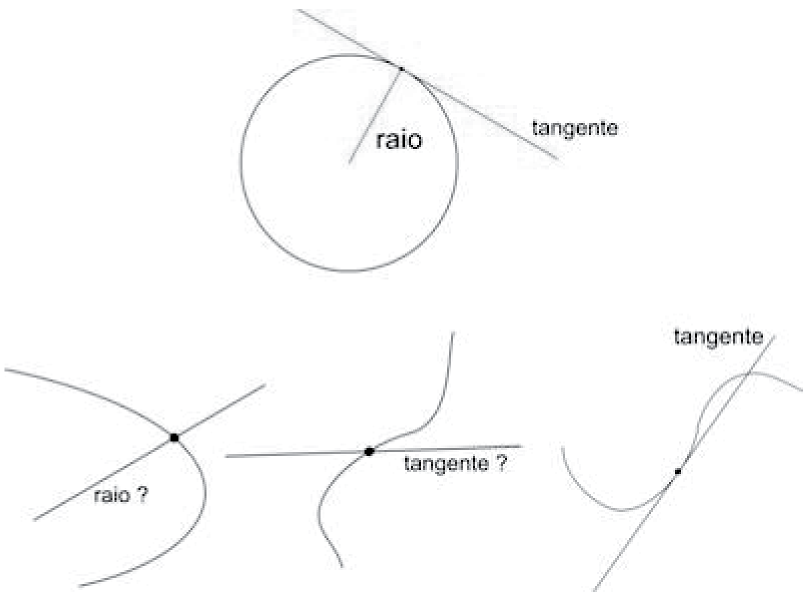



Figura 2.1

Assim, para uma curva qualquer, foi preciso esperar até o século XVII para se ter uma definição satisfatória de tangente.

Para resolver a questão, vamos considerar a função $y = f(x)$ e seu gráfico representativo mostrado na figura 2.2.

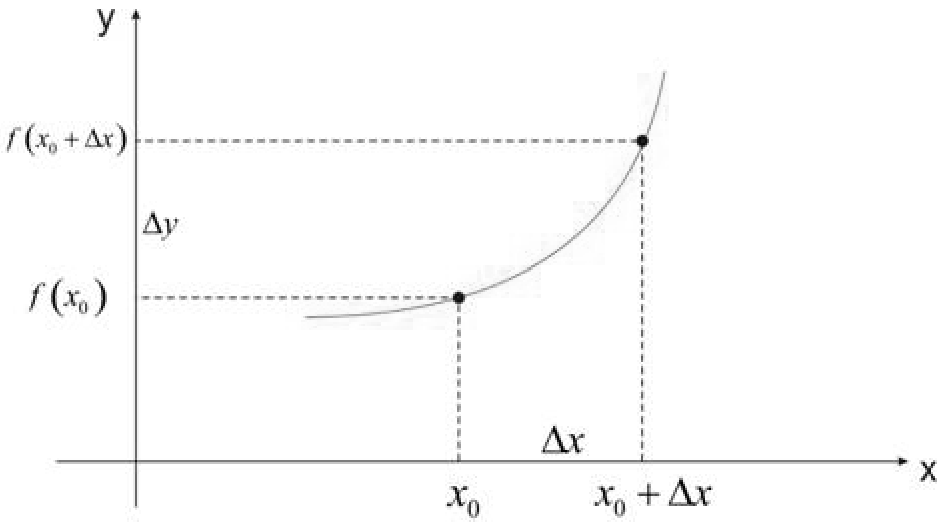



Figura 2.2

Sejam $x$ e $f(x)$ as coordenadas do ponto $P$ onde desejamos traçar a tangente. Consideremos um outro ponto $Q$ do gráfico de $f$, cujas coordenadas são $Q(x + \Delta x, f(x + \Delta x))$. O declive da reta secante $PQ$ é dado pelo quociente:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

chamado *razão incremental*, pois $\Delta x$ é realmente um incremento que damos à abscissa de $P$, para obtermos a abscissa de $Q$. Ao considerarmos o quociente de dois incrementos $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, na verdade, estamos considerando-o como uma *taxa média da variação* de $y$ em relação a $x$.

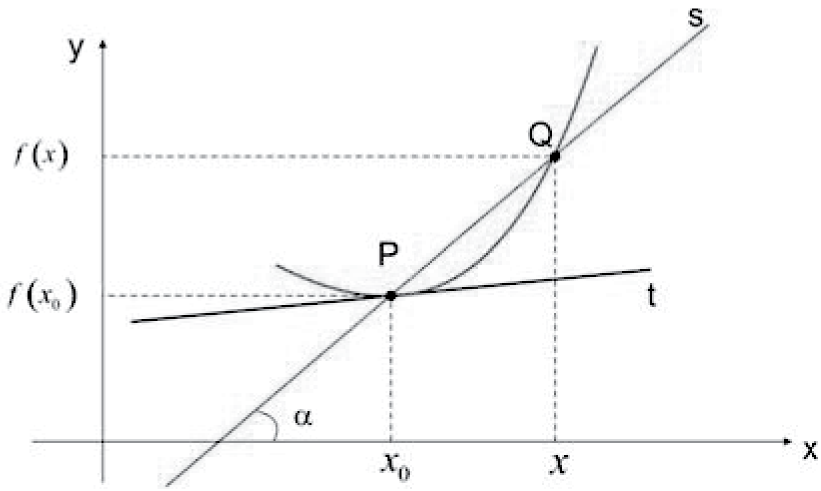



Figura 2.3

Vamos imaginar agora (figura 2.3) que, enquanto o ponto $P$ permanece fixo, o ponto $Q$ aproxima-se de $P$, passando por sucessivas posições $Q_1, Q_2, Q_3$ etc; logo, a secante $PQ$ assumirá as posições $PQ_1, PQ_2, PQ_3$ etc. O que se espera é que a razão incremental, que é o declive da reta secante, aproxime-se de um determinado valor "$m$", a medida que o ponto $Q$ se aproxima do ponto $P$. Isto acontecendo, definimos a *reta tangente* à uma curva em $P$ como sendo aquela que passa por $P$ e que tem declive "$m$" (*podemos interpretar a tangente como o limite de uma família de secantes*). Observe que fazer $Q$ se aproximar de $P$ é o mesmo que fazer $\Delta x$ se aproximar de zero na razão incremental.

Quando fazemos $\Delta x \to 0$, e a razão incremental se aproxima de um valor finito, dizemos que "$m$" é o limite da razão incremental com $\Delta x \to 0$, e escrevemos:

$$m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Esse quociente que representa *a taxa instantânea de variação* é chamado de *derivada da função* $f$, que é expressa por uma das notações a seguir:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

**Exemplo 2.1** - Calcular o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de $y = x^2$ no ponto de abscissa $x = 1$.

**Solução:**

Queremos determinar $m = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ quando $x = 1$. Para tanto, inicialmente, observemos que:

- $f(x) = x^2$;
- $f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^2$.

Assim, pela definição de derivada, temos:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - (x)^2}{\Delta x}
\end{aligned}
$$

Donde obtemos:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x(\Delta x) + (\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x}$$

Ou seja,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(2x + \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x)$$

Como $\Delta x \to 0$ temos que $f'(x) = 2x$, função que nos dá a derivada (declive) em qualquer ponto da curva $y = x^2$. Como desejamos a tangente passando por (1,1), segue-se que $f'(1) = 2$ é o coeficiente angular pedido.

A figura 2.4 mostra um esboço do gráfico de $y = x^2$ e a tangente $t$ pelo ponto (1,1).

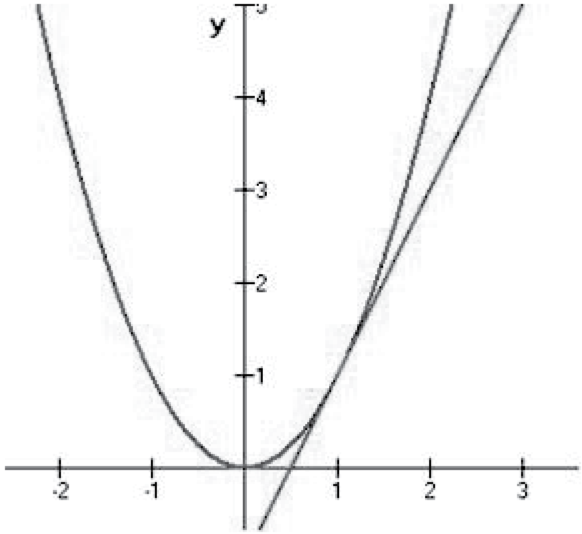



Figura 2.4

**Exemplo 2.2** - Uma placa com uma cultura de bactérias está sendo observada, e o controle da população é feito a cada hora. Concluiu-se, a partir destas observações, que a equação $N(t) = 50\sqrt{t} + 300$ dá, com boa aproximação, o número de bactérias depois de $t$ horas. Qual é a equação que nos dá a *taxa instantânea de crescimento* da população de bactérias na placa?

**Solução:**

Pela definição de derivada, temos:

$$\frac{dN}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{N(t+\Delta t) - N(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{50\sqrt{t+\Delta t} + 300 - \left(50\sqrt{t} + 300\right)}{\Delta t}$$

E, assim:

$$\frac{dN}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} 50 \left( \frac{\sqrt{t+\Delta t} - \sqrt{t}}{\Delta t} \right)$$

Não podemos tomar o limite nesta expressão sem antes modificá-la, senão chegaremos a uma indeterminação do tipo $^0/_0$. Multiplicando o numerador e o denominador pela expressão $\sqrt{t+\Delta t} - \sqrt{t}$, obtemos:

$$\frac{dN}{dt} = \left[ \lim_{\Delta t \to 0} 50 \left( \frac{\sqrt{t+\Delta t} - \sqrt{t}}{\Delta t} \right) \cdot \left( \frac{\sqrt{t+\Delta t} - \sqrt{t}}{\sqrt{t+\Delta t} - \sqrt{t}} \right) \right]$$

que nos dá

$$\frac{dN}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} 50\left(\frac{t + \Delta t - t}{\Delta t\left(\sqrt{t+\Delta t} - \sqrt{t}\right)}\right) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{50}{\sqrt{t+\Delta t} + \sqrt{t}} = \frac{25}{\sqrt{t}}$$

Para se calcular a derivada de uma função mais complexa, é impraticável o uso da definição. Assim, os matemáticos demonstraram uma série de teoremas que nos permitem calcular derivadas com certa facilidade sem recorrer à definição. Esses teoremas, que aqui chamaremos de regras, são assunto do próximo tópico. No entanto, não são demonstrados, pois julgamos que foge aos nossos objetivos, que estão centrados nas aplicações.

## 2. Regras de derivação

### 2.1 Regra da constante

Para qualquer constante $k$, temos que $\frac{d(k)}{dx} = 0$, onde $k$ representa a função constante $y = k$. Em símbolos:

$$\boxed{y = k \;\Rightarrow\; \frac{dy}{dx} = 0}$$

### 2.2 Regra da potência

Para qualquer número real $n$, temos que $\frac{d(x^n)}{dx} = nx^{n-1}$. Em símbolos:

$$\boxed{y = x^n \;\Rightarrow\; \frac{dy}{dx} = nx^{n-1}}$$

### 2.3 Regra da multiplicação por uma constante

Se $k$ é uma constante e $f$ uma função derivável, $kf$ também é derivável e

$$\frac{d\big(kf(x)\big)}{dx} = k\frac{df}{dx} = kf'(x)$$

Em símbolos:

$$\boxed{y = kf(x) \;\Rightarrow\; y' = kf'(x)}$$

**Exemplo 2.3 -** Calcular a derivada das seguintes funções:

a) $y = 3$; b) $y = x^8$;

c) $y = 2x^6$; d) $y = \sqrt{x}$.

**Solução:**

a) $y = 3 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 0$, pois 3 é uma constante;

b) $y = x^8 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 8x^{8-1} \therefore \frac{dy}{dx} = 8x^7$;

c) $y = 2x^6 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2 \cdot 6x^{6-1} \therefore \frac{dy}{dx} = 12x^5$;

d) $y = \sqrt{x} = x^{1/2} \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}x^{-1/2} \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

**Exemplo 2.4 -** Encontre a reta tangente à curva $y = \sqrt{x}$ no ponto de abscissa $x = 4$ e esboce o seu gráfico.

*Solução:*

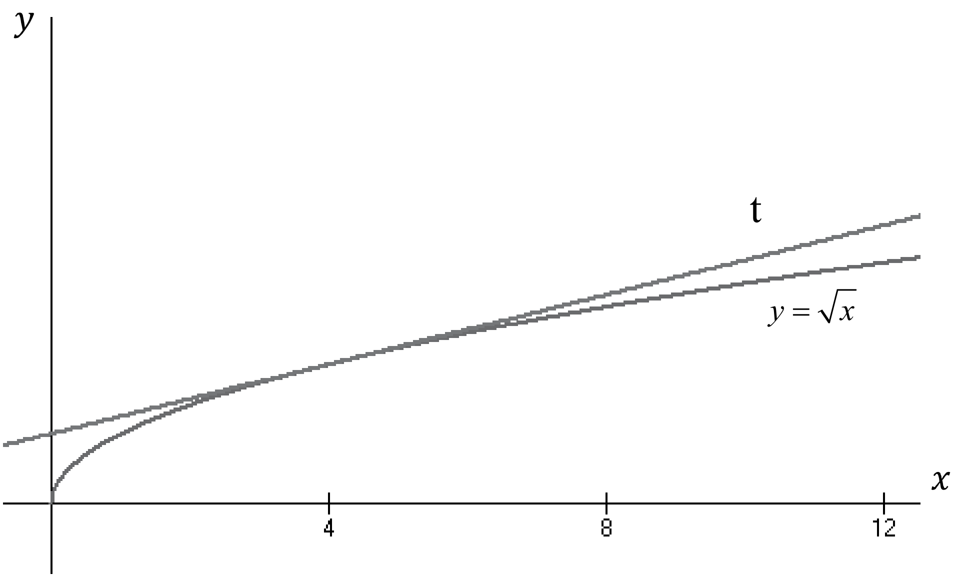



Figura 2.5

Um esboço do gráfico é mostrado na figura 2.5. Para encontrarmos a reta tangente, é suficiente que se conheça um ponto da curva e o coeficiente angular da reta. O coeficiente angular é a derivada no ponto $x = 4$, isto é, $f'(4)$. No exemplo 2.3, já achamos que a derivada desta função, em um ponto qualquer da curva, é dada por:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}},$$

de modo que:

$$f'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$$

Como a reta passa pelo ponto (4,2),tem como equação $y-2=\frac{1}{4}(x-4)$.

**Exemplo 2.5 -** A velocidade do sangue pode ser descrita pela função $s(t) = 8\sqrt{t}$, a medida que vai do coração, percorre a aorta e outras artérias e, finalmente, atinge os vasos capilares, com consequente perda de velocidade.

a) Qual a velocidade média, desde $t = 4$ até $t = 9$?

b) Qual a velocidade instantânea no momento $t = 4$? E em $t = 9$?

**Solução**:

a) Chamando de $v_m$ a velocidade média, temos:

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(9) - s(4)}{9 - 4} = \frac{8}{5}$$

b) $s'(t) = 8 \cdot \left(\sqrt{t}\right)' \quad \therefore \quad s'(t) = \frac{4}{\sqrt{t}}$

Logo,

$$s'(4) = \frac{4}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2} \qquad e \qquad s'(9) = \frac{4}{\sqrt{9}} = \frac{4}{3}$$

## 2.4 Regra da soma

Se $f(x)$ e $g(x)$ são duas funções deriváveis, para qualquer $x$, então, a função $s(x) = f(x) + g(x)$ também é derivável, e $s'(x) = f'(x) + g'(x)$.

$$\boxed{s(x) = f(x) + g(x) \Rightarrow \frac{ds}{dx} = \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx}}$$

**Exemplo 2.6 -** Estima-se que, daqui a $x$ meses, a população de certo município será

$$P(x) = x^2 + 20x + 8.000$$

a) Qual será a taxa de variação da população com o tempo daqui a 15 meses? (*observação*: a partir de agora, taxa de variação instantânea será referida apenas como taxa de variação).

b) Qual será a variação da população durante o 16º mês?

**Solução**:

a) A taxa de variação da população com o respectivo tempo é a derivada da função população:

$$Taxa\ de\ variação: \frac{dP}{dt} = 2x + 20$$

A taxa de variação daqui a 15 meses será, portanto:

$P'(15) = 2(15) + 20 = 50$ habitantes / mês.

b) A variação da população durante o 16º mês é igual a diferença entre a população após 16 meses e a população após 15 meses.

*Variação da População*: *P*(16) – *P*(15) = 8.576 – 8.525 = 51 habitantes.

**Exemplo 2.7-** Um estudo ambiental, realizado em certo bairro, revela que, daqui a *t* anos, a concentração de monóxido de carbono no ar será $Q(t) = 0{,}05t^2 + 0{,}1t + 3{,}4$ partes por milhão (ppm).

a) Qual será a taxa de variação da concentração de monóxido de carbono com o tempo daqui a 1 ano ?

b) Qual será a variação da concentração de monóxido de carbono durante o 1º ano?

c) Qual será a variação da concentração de monóxido de carbono durante os dois anos seguintes?

**Solução:**

$$Q(t) = 0{,}05t^2 + 0{,}1t + 3{,}4 \quad \Rightarrow \quad Q'(t) = \frac{dQ}{dt} = 0{,}1t + 0{,}1$$

Logo, daqui a 1 ano, $Q'(1) = 0{,}1 + 0{,}1$ ppm / ano.

b) A variação da concentração de monóxido de carbono durante o 1º ano será *variação da concentração*:

$Q(1) - Q(0) = (0{,}05 + 0{,}1 + 3{,}4) - 3{,}4 = 0{,}15$ ppm.

c) De modo análogo, variação da concentração:

$Q(3) - Q(1) = \left[0{,}05\,(3)^2 + 0{,}1(3) + 3{,}4\right] - \left[0{,}05 + 0{,}1 + 3{,}4\right] = 0{,}6$ ppm.

## 2.5 Regra do produto

Se $f(x)$ e $g(x)$ são duas funções deriváveis, para qualquer $x$, então, a função $P(x) = f(x) \cdot g(x)$ também é derivável, e sua derivada é $P'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$.

$$\boxed{P(x) = f(x) \cdot g(x) \;\Rightarrow\; P'(x) = \frac{dP}{dx} = \frac{df}{dx} \cdot g(x) + f(x) \cdot \frac{dg}{dx}}$$

**Exemplo 2.8** - Escreva a equação da reta tangente à curva $y = (2x + 1)(x^2 - x + 3)$ no ponto de abscissa $x = 0$.

**Solução:**

$$y' = \frac{dy}{dx} = (2x + 1)' \cdot (x^2 - x + 3) + (2x + 1) \cdot (x^2 - x + 3)'$$

Daí, $y' = 2 \cdot (x^2 - x + 3) + (2x + 1) \cdot (2x - 1)$. Então, para $x = 0$, vem

$$y(0) = [2(0) + 1][0^2 - 0 + 3] = 3$$

e

$$y'(0) = 2 \cdot (0^2 - 0 + 3) + [2(0) + 1] \cdot [2(0) - 1] = 5$$

Portanto, a equação da reta tangente à curva no ponto (0,3) é:

$$y - 3 = 5(x - 0) \qquad \text{ou} \qquad y = 5x + 3$$

**Exemplo 2.9** - Seja a função $Q = Q(t)$ que mede a quantidade média de determinado comprimido consumido por habitantes de uma grande cidade depois de $t$ dias. Seja ainda $H = H(t)$ o número de consumidores desta droga aí residentes.

a) Escreva a função $R = R(t)$ que expressa a quantidade total de comprimidos consumidos diariamente;

b) Se a quantidade média de comprimidos naquela cidade está aumentando à razão $\frac{dQ}{dt}$, e o número de consumidores também está crescendo a uma taxa igual a $\frac{dH}{dt}$, a que taxa estará crescendo a quantidade total consumida do medicamento na cidade?

**Solução:**

a) A função pedida, que está sendo chamada $R$, é o produto das funções $Q$ e $H$, logo:

$$R(t) = Q(t) \cdot H(t)$$

b) A resposta dessa pergunta é dada simplesmente pela derivada de $R$ em relação a $t$, isto é,

$$R'(t) = \frac{dR}{dt} = Q'(t) \cdot H(t) + Q(t) \cdot H'(t)$$

Assim, a taxa de variação instantânea com que o consumo total cresce é igual a taxa de crescimento da quantidade de comprimidos consumidos por habitante vezes o número de consumidores, acrescida da quantidade média de comprimidos consumidos por habitante, vezes a taxa segundo a qual o número de consumidores varia.

## 2.6 Regra do quociente

Se $f(x)$ e $g(x)$ são funções deriváveis, para qualquer $x$, a função

$$Q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

também é uma função derivável, e sua derivada é

$$Q'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}, \qquad g(x) \neq 0$$

Então,

$$\boxed{Q(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad \Rightarrow \quad Q(x) = \frac{dQ}{dx} = \frac{\frac{df}{dx} \cdot g(x) - f(x) \cdot \frac{dg}{dx}}{[g(x)]^2}}$$

**Exemplo 2.10 -** Calcular a derivada da função seguinte:

$$y = \frac{3x^3}{x-7}, \qquad x - 7 \neq 0$$

**Solução:**

$$y' = \frac{(3x^3)' \cdot (x-7) - 3x^3 \cdot (x-7)'}{(x-7)^2} = \frac{9x^2 \cdot (x-7) - 3x^3}{(x-7)^2} = \frac{3x^2 \cdot (2x-21)}{(x-7)^2}$$

**Exemplo 2.11 -** Calcula-se que, daqui a $t$ anos, a população de certo bairro será $P(t) = 20 - \dfrac{6}{t-1}$ mil habitantes.

a) Qual será a variação da população durante o 3º mês ?

b) Qual a taxa de variação daqui a 3 meses?

**Solução:**

a) a variação da população durante o 3º mês será

$$P(3) - P(2) = \left(20 - \frac{6}{3-1}\right) - \left(20 - \frac{6}{2-1}\right) = 3$$

mil habitantes / mês

b) a taxa de variação da população com o tempo é dada pela derivada de $P$ em relação a $t$, ou seja, $P'(t)$.

$$P'(t) = \frac{dP}{dt} = \left[20 - \frac{6}{t-1}\right]' = 0 - \frac{0 \cdot (t-1) - 6 \cdot 1}{(t-1)^2} = \frac{6}{(t-1)^2}$$

Logo, $P'(t)$. = $\dfrac{6}{(3-1)^2} = \dfrac{6}{4}$ = 1, 5 mil habitantes.

## 2.7 Regra da função composta (regra da cadeia)

Seja *y* uma função de *u*, e *u*, uma função de *x*. Então, *y* pode ser considerada como função de *x*, e sua derivada em relação a *x* (dy/dx) é dada pela derivada de *y* em relação a *u*, multiplicada pela derivada de *u* em relação a *x*.

$$\boxed{y = y(u) \text{ e } u = u(x) \quad \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}}$$

**Exemplo 2.12 -** Calcule a derivada da função $y = \sqrt{x^2 + 3x + 2}$

**Solução:**

Fazendo

$$u = x^2 + 3x + 2 \Rightarrow \begin{cases} y = \sqrt{u} \Rightarrow \dfrac{dy}{du} = \dfrac{1}{2\sqrt{u}} \\ u = x^2 + 3x + 2 \Rightarrow \dfrac{du}{dx} = 2x + 3 \end{cases}$$

Logo ,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{2x+3}{2\sqrt{x^2+3x+2}}$$

**Exemplo 2.13 -** Os pinípedes são uma subordem dos carnívoros aquáticos, tais como focas e morsas, cujos pés evoluem para nadadeiras. A relação comprimento-peso durante o crescimento fetal é dada por $W(L) = (6.10^{-5}) \cdot L^{2,74}$, onde *L* é o comprimento, em centímetros, e *W* é o peso, em quilogramas. Estabeleça uma fórmula para a taxa de crescimento do peso em relação ao tempo *t*.

**Solução:**

Como $W = W(t)$ e $L = L(t)$, devemos usar a regra da cadeia para derivar a composta das duas funções anteriores. Então, como

$$\frac{dW}{dL} = 2{,}74(6 \cdot 10^{-5}) \cdot L^{1{,}74} = (1{,}644 \cdot 10^{-4}) \cdot L^{1{,}74}$$

Segue-se que:

$$\frac{dW}{dt} = \frac{dW}{dL} \cdot \frac{dL}{dt} = 2{,}74(6 \cdot 10^{-5}) \cdot L^{1{,}74} = (1{,}644 \cdot 10^{-4}) \cdot L^{1{,}74} \cdot \frac{dL}{dt}$$

## 2.8 Derivadas das funções logarítmica e exponencial

Nestes casos, também não apresentaremos deduções das fórmulas das funções derivadas por razões já citadas. Considerando que $u = u(x)$ e usando a regra da cadeia, temos o seguinte esquema que usaremos nas aplicações.

| FUNÇÃO | DERIVADA |
|---|---|
| $y = a^x$ | $y' = a^x \ln a$ |
| $y = e^x$ | $y' = e^x$ |
| $y = \log_a x$ | $y' = \dfrac{1}{x \ln a}$ |
| $y = \ln x$ | $y' = \dfrac{1}{x}$ |

| FUNÇÃO DE FUNÇÃO (COMPOSTA) | DERIVADA |
|---|---|
| $y = a^u$ | $y' = a^u \ln a \cdot u'$ |
| $y = e^u$ | $y' = e^u \cdot u'$ |
| $y = \log_a u$ | $y' = \dfrac{u'}{u \ln a}$ |
| $y = \ln u$ | $y' = \dfrac{u'}{u}$ |

**Granulócito –** É um leucócito caracterizado por um núcleo polilobulado e por seu conteúdo granular. Os neutrófilos, eosinófilos e basófilos são granulócitos.

Fonte: biologia-soraia.blogspot

Exemplo 2.14

a) Use a regra da cadeia para achar a derivada de $y = \ln u$, onde *u* é uma função de *x*.

b) Use o resultado do item "a" para derivar $y = \ln(2x^2 + x)$, $2x^2 + x > 0$.

**Solução:**

a) Se $y = \ln u$, $u > 0$, e *u* é derivável, temos que $y = \ln u(x)$

$$y = \ln u \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \qquad \qquad \dfrac{dy}{du} = \dfrac{1}{u} \\ u = u(x) \quad \Rightarrow \quad \dfrac{du}{dx} = u'(x) \end{cases}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{u'}{u}$$

b) Faça

$$u = 2x^2 + x \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y = \ln u \quad \Rightarrow \dfrac{dy}{du} = \dfrac{1}{u} \\ \\ u = 2x^2 + x \quad \Rightarrow \dfrac{du}{dx} = 4x + 1 \end{cases}$$

Então,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{4x+1}{2x^2+x}$$

**Exemplo 2.15**

a) Use a regra da cadeia para achar a derivada de $y = e^u$, onde $u = u(x)$;

b) Use o resultado de "a" para derivar $y = e^{2x+4}$.

**Solução:**

a)

$$y = e^u \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{dy}{du} = e^u \\ \\ u = u(x) \quad \Rightarrow \dfrac{du}{dx} = u'(x) \end{cases}$$

Então,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = e^u \cdot u'$$

b) De acordo com o item "a", temos que

$$y = e^{2x+4} \quad \Rightarrow \quad y' = 2e^{2x+4}$$

**Exemplo 2.16 -** Um conceito bastante importante, tanto em Biologia como em Química, é o de entropia. A entropia é uma medida da desordem de um sistema e do quanto o sistema é aleatório. A entropia *S* está relacionada à probabilidade *P*, de acordo com a fórmula $S(P) = k \cdot \ln P$, onde $k, P > 0$ e $k$ é constante.

a) Determine $\dfrac{dS}{dP}$;

b) Calcule $\dfrac{d^2S}{dP^2}$.

**Solução:**

a) Temos:

$$S(P) = k \cdot \ln P \quad \Rightarrow \quad \frac{dS}{dP} = k \cdot \frac{1}{P}$$

b) A notação

$$\frac{d^2S}{dP^2} = S''(P)$$

é uma notação para a 2ª derivada (derivada de $S'(P)$. Assim,

$$S''(P) = \frac{d^2S}{dP^2} = -\frac{k}{P^2}$$

**Exemplo 2.17 -** A quantidade de bactérias presentes numa cultura controlada, no instante *t* (horas), pode ser calculada pela equação $N(t) = 150 \cdot e^{t/3}$.

a) Qual a quantidade inicial de bactérias?

b) Qual a quantidade depois de 1 hora?

c) Qual a velocidade instantânea de crescimento no instante *t* = 1?

**Solução:**

a) $N(t) = 150 \cdot e^{t/3}$, quando *t* = 0, $N(0) = 150 \cdot e^0 = 150$

b) $N(t) = 150 \cdot e^{t/3}$, quando *t* = 1,

$N(1) = 150 \cdot e^{1/3} \cong 150 \cdot (1{,}3956) \cong 209$

c) $N'(t) = \frac{dN}{dt} = 150 \cdot e^{t/3} . \frac{1}{3} = 50 \cdot e^{t/3} \quad \Rightarrow \quad N'(1) = 69{,}67$

## Texto complementar

### Uma aplicação da derivada do quociente

As autoridades de certa cidade oferecem $Q = Q(t)$ leitos hospitalares públicos para uma população de $N = N(t)$ habitantes. Então, a relação leito hospitalar por habitante é dada por $R(t) = \frac{Q(t)}{N(t)}$. Se tanto a população como a quantidade de leitos hospitalares crescem a taxas iguais a $Q'$ e $N'$, respectivamente, como varia a razão entre os leitos oferecidos e a população? Aqui temos apenas que derivar $R(t)$, isto é, obter

$$R'(t) = \frac{Q'(t)N(t) - Q(t)N'(t)}{N^2(t)}.$$

Observemos, inicialmente, que essa fórmula se atém ao senso comum. Com efeito, quando a população não varia, a saber, quando $N' = 0$, temos que $R' = {}^{Q'}/_{N}$; se $Q' > 0$, então $R' > 0$; em outras palavras, a razão entre os leitos hospitalares e a população está crescendo ($R = {}^{Q}/_{N}$). Se, em vez disso, o número de leitos hospitalares não varia, isto é, $Q' = 0$, e, se a população cresce, então

$$R' = -\frac{[Q_0 N']}{N^2},$$

isto é , $R' < 0$, o que significa que a razão entre os leitos hospitalares e a população está decrescendo.

(Extraído de AGUIAR et al., 1988)

## Síntese da Capítulo

Neste capítulo, foi apresentada uma poderosa ferramenta matemática: *a derivada*. A definição de derivada foi dada a partir do estudo da reta tangente a uma curva em um ponto qualquer desta curva. Em seguida, foram resolvidos alguns exercícios usando a definição. No entanto, o uso da definição é impraticável para funções mais complexas, de modo que foram apresentadas regras práticas de derivação, que foram usadas, ao longo do texto, em problemas aplicados.

## Atividades de avaliação

**1.** Calcular o coeficiente angular da tangente ao gráfico de $y = x^3$, no ponto de abscissa $x = 2$.

**2.** Uma colônia de bactérias foi colocada numa placa e, simultaneamente, foi adicionada uma mistura de antibióticos, para se testar sua eficácia. A quantidade de bactérias que permanecia viva na cultura, após *t* horas, é dada por $N(t) = \frac{1}{t}$.

a) Construa um esboço do gráfico desta função considerando $1 \leq t \leq 6$, com $t \in \mathbb{R}$.

b) Qual é a equação que nos dará a taxa de variação instantânea de N em relação a *t*, isto é, dN/d*t* ?

c ) Qual é a taxa de variação da população de bactérias quando *t* = 5 ?

**3.** Calcular a derivada das seguintes funções:

a) $f(x) = 2$; b) $f(x) = x^3$;

c) $f(x) = \sqrt[3]{x^4}$; d) $f(x) = \frac{1}{x}$.

**4.** Encontre a reta tangente à curva $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ no ponto de abscissa $x = 1$.

**5.** Calcula-se que, daqui a $x$ meses, a população de certa cidade será $P(x) = 2x + 4x^{3/2} + 5.000$

a) Qual será a taxa de variação da população com o tempo daqui a 9 meses?

b) Qual será a variação da população durante o 9º mês?

**6.** Todo ano, durante a primavera, os pardais fazem ninhos em determinada região. A população de pardais é calculada todos os anos, e concluiu-se que ela aumenta, a cada ano, de acordo com a equação $N(t) = 300t + 0{,}3t^2$.

a) Quantos pardais estarão fazendo ninho na 5ª primavera?

b) Qual será a taxa de crescimento da população de pardais no 5º ano?

**7.** a) Calcule a derivada da função $y = 2x^2 - 5x - 3$;

b) Escreva a função do item "a" na forma fatorada e calcule a sua derivada usando a regra do produto. Verifique que as duas respostas são iguais.

**8.** Derive a função $y = x\sqrt{x}$.

**9.** Derive a função $y = \frac{x^3 + 2x}{x^2 + 1}$.

**10.** Estima-se que, daqui a *t* anos, a população de certa comunidade suburbana será de $P(t) = 20 - \frac{6}{t+1}$ milhares de habitantes.

a) Deduza a expressão da taxa de variação da população em relação ao tempo.

b) Qual será a taxa de crescimento da população daqui a 1 ano ?

c) Qual será crescimento da população durante o $2^0$ ano?

d) Qual será a taxa de crescimento da população daqui a 9 anos ?

e) O que você observa na taxa de crescimento populacional durante todo este tempo?

**11.** Um estudo ambiental realizado em um certo município revela que a concentração média de monóxido de carbono no ar é de $C(P) = \sqrt{0{,}5P^2 + 17}$ ppm, onde $P$ é a população em milhares de habitantes. Calcula-se que, daqui a $t$ anos, a população do município será $P(t) = 3{,}1t + 0{,}1t^2$ milhares de habitantes. Qual será a taxa de variação da concentração de monóxido de carbono daqui a 3 anos?

**12.** Derive a função $y = (x + 1)^3$

a) Desenvolvendo o binômio;

b) Usando a regra da cadeia.

**13.** A relação comprimento-peso de um certo peixe do pacífico é dada por $W(L) = 10{,}375 \cdot L^3$, onde $L$ é o comprimento, em metros, e $W$ é o peso, em quilogramas. A taxa de crescimento do comprimento $\frac{dL}{dt}$ é dada por $0{,}18 \cdot (2 - L)$, onde t é o tempo em anos.

a) Estabeleça uma fórmula para a taxa de crescimento do peso $\frac{dW}{dt}$ em termos de L;

b) Use a fórmula obtida no item "a" para estimar a taxa de crescimento do peso do peixe que pesa 20 quilogramas.

**14.** Derive as funções seguintes:

a) $y = 10^x$;

b) $y = e^{x^2+1}$;

c) $y = \log_a x^2$;

d) $y = \ln(x^3 - x^2 + 1)$;

e) $y = x^x$.

**15.** O modelo *Count* é uma fórmula empírica usada para predizer a altura de uma criança em idade pré-escolar. Se $h(x)$, denota a altura (em centímetros) na idade $x$ (em anos) para $\frac{1}{4} \leq x \leq 6$, então, pode ser aproximado por $h(x) = 70{,}228 + 5{,}104x + 9{,}222 \cdot \ln x$. Preveja a altura e a taxa de crescimento quando uma criança atinge a idade de 2 anos.

**16.** Encontrar a derivada das funções:

a) $y = e^{2x+3}$;

b) $y = e^x . \ln x^2$;

c) $y = e^x . \ln 2x$;

d) $y = \sqrt{e^{x+4}}$ .

**17.** A quantidade de células cancerosas, existentes no instante *t*, é dada por $N(t) = 100e^{0,1t}$.

a) Calcule a taxa média de variação de N no intervalo de t = 0 a *t* = 10;

b) Calcule a taxa instantânea de variação para t = 10.

**18.** A lei de Boyle afirma que, se a temperatura permanece constante, a pressão P e o volume V de um gás confinado estão relacionados por $P = \frac{K}{V}$, para alguma constante K. Se, para certo gás, K = 200 e V está aumentando, determine a taxa de variação de P em relação a V para:

a) Um volume V;

b) Um volume de 10.

**19.** A lei de Boyle para gases confinados afirma que, se a temperatura permanece constante, então, PV = K, onde *P* é pressão, *V* é o volume e K uma constante. Supondo que, no instante *t* (minutos), a pressão seja $P(t) = 20 + 2t$, em cm de mercúrio, para $0 \leq t \leq 10$. Se o volume é de 60 $cm^3$ em $t = 0$, usando a regra da cadeia, determine a taxa na qual o volume varia em relação a *t* quando *t* = 5.

**20.** A taxa de variação do batimento cardíaco de um mamífero é inversamente proporcional ao seu peso corporal p, em quilogramas. Se B denota o número de batimentos cardíacos por minuto, então B e p estão relacionados pela fórmula $B(p) = 240p^{-0,25}$.

a) Faça um esboço da curva expressa pela equação anterior;

b) Determine sua tangente quando p = 100 kg.

**21.** A pele que recobre o nosso corpo desempenha funções muito importantes. Entre elas, podemos citar sua participação ativa na manutenção da temperatura corporal, na excreção de substâncias tóxicas oriundas do próprio metabolismo do corpo e no papel de proteção contra agressão do meio exterior. Em algumas situações, é muito desejável saber quanto vale a superfície corporal em função do peso do animal. Denotemos por S a área da superfície, então, temos:

$$S(p) = K(p)^{2/3} = K\sqrt[3]{p^2}$$

onde, p é o peso em quilos e K uma constante positiva dependente do animal considerado.

a) Encontre a taxa de variação da superfície corporal do ser humano em função do seu peso (K = 0,11);

b) Faz sentido essa taxa de variação quando o peso for nulo? Por quê?

**22.** Um certo modelo sugere que a produção de um tipo de glóbulos brancos (granulócitos) pode ser descrito por uma função da forma $P(x) = \dfrac{Ax}{B + X^m}$, onde A e B são constantes positivas, o expoente m é positivo e x é o número de células presentes. Calcule a taxa de produção de granulócitos, $P'(x)$.

**23.** Um certo modelo biológico sugere que a reação do corpo humano a uma dose de medicamento pode ser representada por uma função da forma

$$F(M) = \frac{1}{3}(kM^2 - M),$$

onde K é uma constante positiva e M a quantidade do medicamento presente no sangue. A derivada S = $\dfrac{dF}{dM}$ pode ser considerada como uma medida da sensibilidade do organismo ao medicamento.

a) Calcule a sensibilidade S;

b) Calcule $\dfrac{dS}{dM} = \dfrac{d^2F}{dM^2}$ e apresente uma interpretação para a derivada segunda.

**24.** Foi observado que o fluxo de sangue de uma artéria para um pequeno capilar é dada pela expressão

$$F = KD^2\sqrt{A - C} \text{ (cm}^2\text{/s)},$$

onde D é o diâmetro do capilar, A é a pressão da artéria, C é a pressão no capilar e K é uma constante positiva.

a) Qual é a taxa de variação do fluxo de sangue F com a pressão C no capilar se A e D se mantêm constantes? O fluxo aumenta ou diminui quando C aumenta?

b) Define-se taxa de variação percentual de uma função Q pela expressão 100 . $\dfrac{Q'(x)}{Q(x)}$. Qual é a taxa de variação percentual de F em relação a A se C e D se mantêm constantes?

**25.** Calcula-se que, daqui a *t* anos, a população de certa cidade será P(t) = $10 - \dfrac{20}{(t+1)^2}$ mil habitantes. Um estudo ambiental mostrou que a concentração de monóxido de carbono no ar será C(p) = $0{,}8\sqrt{p^2 + p + 139}$ unidades quando a população for por p mil habitantes. Qual será a taxa de variação percentual da concentração de monóxido de carbono no ar daqui a 1 ano?

**26.** Estima-se que, daqui a t anos, a população de certo pais será P(t) = $50e^{0{,}02t}$ milhões de habitantes.

a) Qual será a taxa de variação da população com o tempo daqui a 10 anos?

b) Qual será a taxa de variação percentual da população com o tempo daqui a t anos ? Esta taxa depende de t ou é constante?

c) Generalize o item "b", considerando $P(t) = Q_0e^{kt}$ e prove que essa taxa é constante e independente de t.

**27.** Suponhamos que uma proteína de massa m se decomponha em amino-ácidos segundo a fórmula $m(t) = \frac{25}{t+3}$, onde t representa o tempo medido em horas.

Determine a taxa de variação para os seguintes intervalos:

a) [0,2];

b) [0,1];

c) [0,1/4].

Qual é a taxa de variação instantânea para t = ¼ , 1 e 2 ?

## Referências

AGUIAR, A. F. A.; XAVIER, A. F. S.; RODRIGUES, J. E. M. **Cálculo para ciências médicas e biológicas**. São Paulo : Editora Harbra, 1988. 351 p.

ÁVILA, G. S. S. **Introdução às funções e à derivada**. São Paulo: Atual Editora, 1994, 174 p.

BATSCHELET, E. **Introdução à matemática para biocientistas**. Rio de Janeiro: Interciência, 1978. 595 p.

DI PIERRO NETO, S.; ALMEIDA, N.S. **Matemática : curso fundamental**. Editora Scipione. 2ªed. São Paulo: v.2, 1991. 262 p.

HOFFMANN, L.; BRADLEY, G.L. **Cálculo : Um curso moderno e suas aplicações.** Rio de janeiro: Livros técnicos e científicos, 1980. 382 p.

SWOKOWSKI, E. W. **Cálculo com geometria analítica**. São Paulo: Makron Books. 1994, v.1. 744 p.

WHIPKEY, K. L.; WHIPKEY, M. N. **Cálculo e suas múltiplas aplicações**. 3ª ed. Rio de Janeiro: Editora Campus, , 1982. 420 p.

Capítulo 3

# Aplicações da Derivada

## Objetivos

- Utilizar a derivada para estudar o comportamento de funções;
- Identificar os intervalos onde a função cresce ou decresce;
- Usar os testes das derivadas primeira e segunda, para identificar pontos de máximo ou de mínimo e, também, pontos de inflexão;
- Resolver problemas aplicados de otimização.

## 1. Informações dadas pela primeira derivada

### 1.1 Crescimento e decrescimento de funções

Muitas vezes, é importante determinar se uma função $f$ está aumentando ou diminuindo. Vai-se mostrar que a derivada $dy/dx$ pode ser usada para esse fim. Inicialmente, considere algumas definições muito importantes.

Seja uma função $f$ definida em um intervalo $I$, e sejam $x_1$ e $x_2$ números em $I$, podemos ter três casos (figura 3.1):

i) f é crescente em I se $f(x_1) < f(x_2)$ quando $x_1 < x_2$;

ii) f é decrescente em I se $f(x_1) > f(x_2)$ quando $x_1 < x_2$;

iii) f é constante em I se $f(x_1) = f(x_2)$ para todo $x_1$, $x_2$.

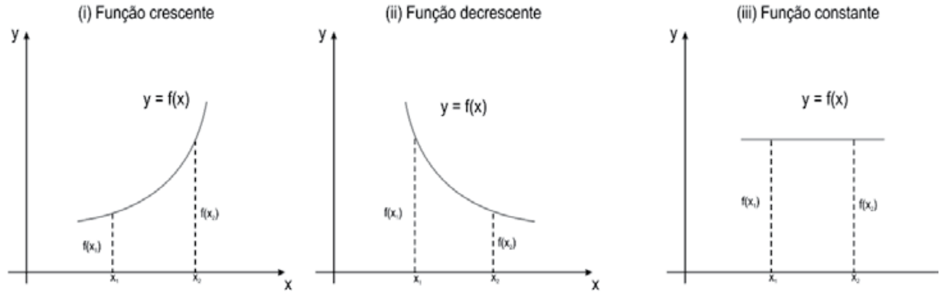



Figura 3.1.

**Exemplo 3.1** - Determine os intervalos onde a função $f(x) = x^2 - 5x + 6$ é crescente ou decrescente.

**Solução:**

Um esboço do gráfico de *f* é mostrado na figura 3.2. Observe que, no intervalo (- ∞,5/2], *f* é decrescente, e, em [5/2, ∞), *f* é crescente, tendo seu valor mínimo em x = 5/2. Analisando o gráfico da figura 3.2, observamos que todas as tangentes ao gráfico em (- ∞, 5/2) são negativas, enquanto que, no intervalo (5/2, ∞), essas tangentes são negativas, anulando-se apenas em x = 5/2.

Como a inclinação das retas tangentes é dada pela derivada $f'(x)$, podemos estabelecer o seguinte critério para identificar os intervalos, onde *f* é crescente ou decrescente (figura 3.3).

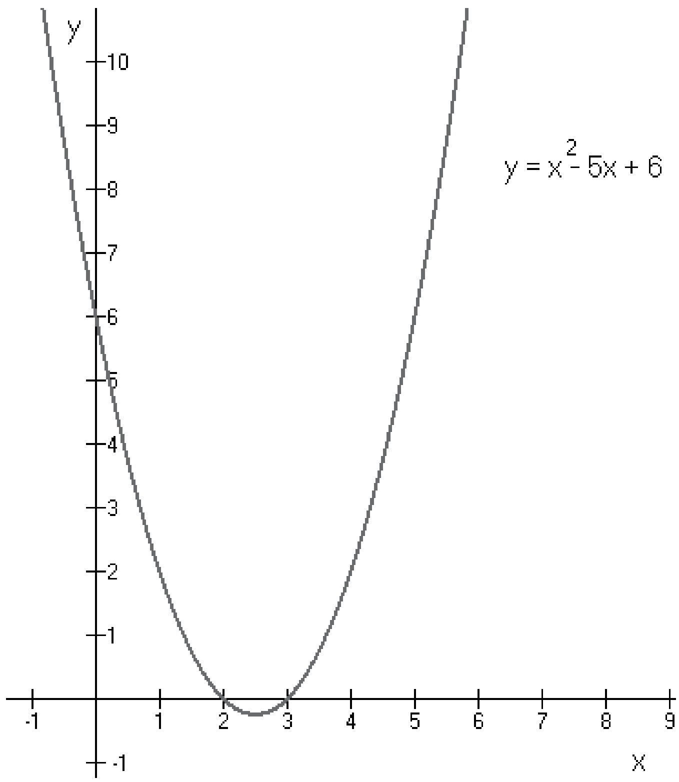



Figura 3.2.

*" Critério da derivada para função crescente ou decrescente"*

*f(x) é crescente nos intervalos em que* $f'(x) > 0$;

*f(x) é decrescente nos intervalos em que* $f'(x) < 0$.

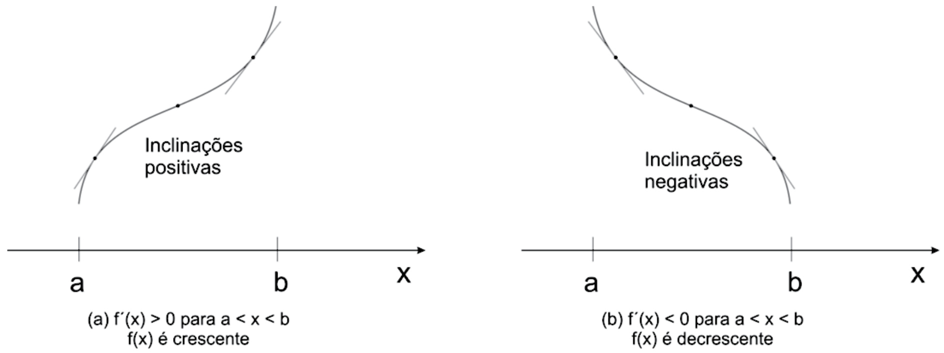



Figura 3.3.

**Exemplo 3.2 -** Determinar os intervalos em que a função *f*(x) = $2x^3 + 3x^2 - 12x - 7$ é crescente ou decrescente.

**Solução:**

A derivada de *f* (x) é $f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 6(x + 2)(x - 1)$, que é contínua para todos os valores reais de $x$ e se anula em $x = 1$ e $x = -2$. Observe que $f'(x)$ pode mudar de sinal apenas em $x = 1$ e $x = -2$. Portanto, o sinal da derivada permanece constante nos intervalos $x < -2$, $-2 < x < 1$ e $x > 1$. Em cada um desses intervalos, escolhemos um número de teste "*t*" e encontramos o sinal de $f'(x)$, conforme esquema a seguir e a figura 3.4.

| Intervalo | Número de teste "t" | Sinal de f' (x) | Conclusão |
|---|---|---|---|
| $x < -2$ | $-3$ | $f'(-3) > 0$ | f é crescente |
| $-2 < x < 1$ | 0 | $f'(0) < 0$ | f é decrescente |
| $x > 1$ | 2 | $f'(2) > 0$ | f é crescente |

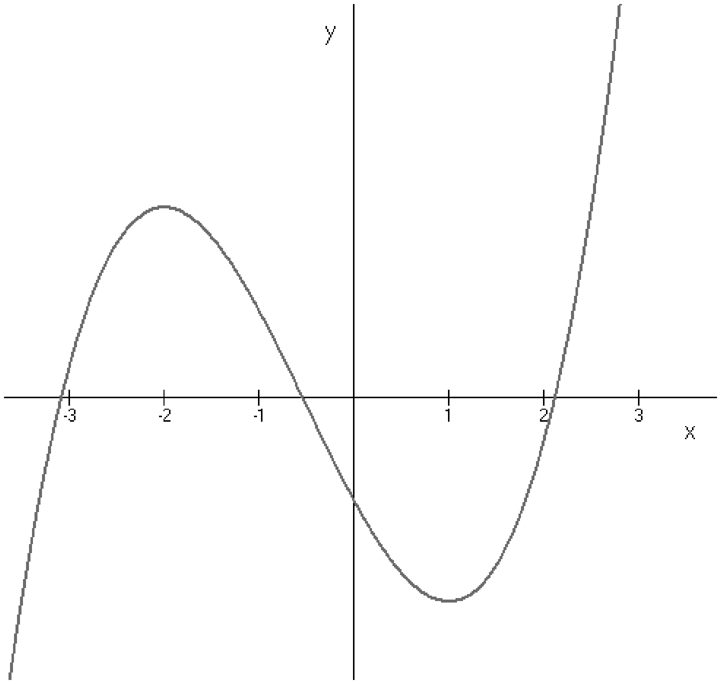



Figura 3.4.

**Exemplo 3.3 -** Calcula-se que, daqui a *t* meses, a população de certa cidade será $P(t)=3t+5t^{3/2}+6000$. Determine os intervalos em que a função é crescente ou decrescente.

**Solução:**

A derivada de *P*(t) é $P'(t)$ = $\frac{15}{2}$ $t$ + 3, que é contínua para todos os valores de t e se anula em t = -6/15. Portanto, o sinal da derivada permanece constante nos intervalos -∞ < t < -6/5 e -6/5 < t < ∞. Vamos escolher, em cada intervalo, um número de teste "c" e encontrar o sinal de $P'(t)$, conforme ilustra o esquema a seguir.

| Intervalo | Número de teste"c" | Sinal de P' (t) | Conclusão |
|---|---|---|---|
| -∞ < t < -6/5 | $-2$ | $P'(-2) < 0$ | P(t) é decrescente |
| -6/5 < t < ∞ | 2 | $P'(2) > 0$ | P(t) é crescente |

## 1.2 Máximos e mínimos relativos (extremos relativos)

Dizemos que uma função $f$ possui um *máximo relativo* no ponto $x = c$, se $f(c) \geq f(x)$ para todos os valores de $x$ em um intervalo $a < x < b$ que contenha o ponto $c$. Uma função $f$ possui *mínimo relativo* no ponto $x = c$, se $f(c) \leq f(x)$, para todos os valores de $c$ em um intervalo $a < x < b$ que contenha o ponto $c$. Os máximos e mínimos relativos (locais) de $f$ são conhecidos pelo nome genérico de extremos relativos.

**Exemplo 3.4 -** A concentração de um fármaco no sangue, após sua administração por via intramuscular, em uma única dose, é dada por

$$y = C(t) = \frac{10t}{t^2 + 2t + 1}, \; t \geq 0,$$

onde t é o tempo em horas.

a) Determine os intervalos onde a concentração da substância no sangue está aumentando e onde está diminuindo;

b) Qual o comportamento da função em t = 1?;

c) Faça um esboço do gráfico.

**Solução:**

a) Como $t^2 + 2t + 1 = (t+1)^2$, podemos reescrever a função como

$$C(t) = \frac{10t}{(t+1)^2}, \qquad t \geq 0$$

E, portanto, sua derivada é

$$C'(t) = \frac{10 \cdot (t+1)^2 + 20t \cdot (t+1)}{(t+1)^4} = \frac{10(1-t)}{(t+1)^3}$$

Podemos observar que, para t = 1, a derivada $C'(1) = 0$, de modo que devemos estudar os sinais da derivada nos seguintes intervalos 0 < t < 1 e t > 1. Veja o esquema a seguir.

| Intervalos | Número de teste "c" | Sinal de C' (t) | Conclusão |
|---|---|---|---|
| 0 < t < 1 | $\frac{1}{2}$ | $C'\left(\frac{1}{2}\right) > 0$ | C(t) crescente |
| t > 1 | 2 | $C'(2) < 0$ | C(t) decrescente |

b) Como a concentração cresce para t < 1 e decresce para t > 1, obviamente, no ponto t = 1, ocorre um máximo.

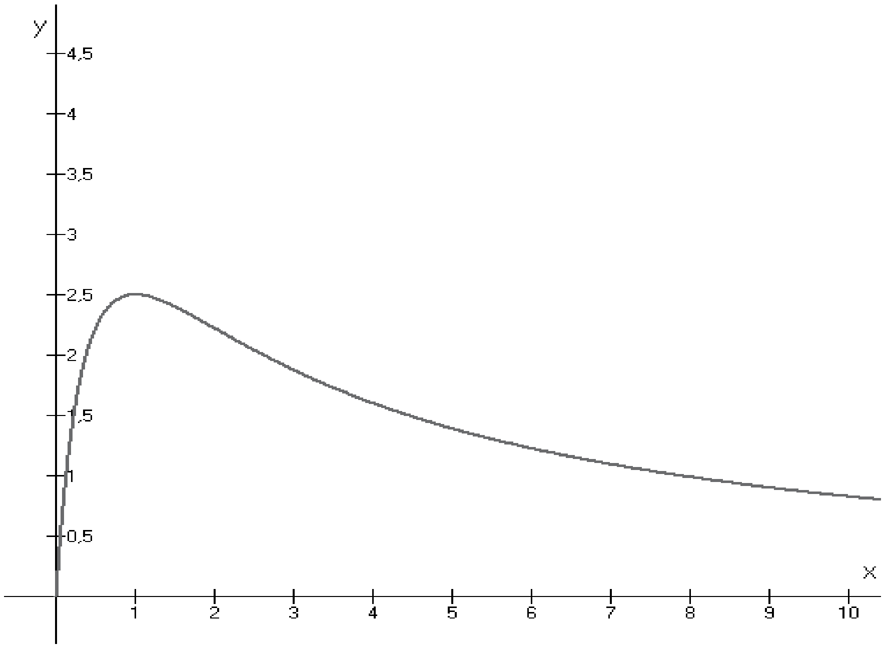



Figura 3.5.

## 1.3 Números críticos e pontos críticos

Nos exemplos anteriores, vimos que, como uma função *f* está aumentando quando $f' > 0$ e diminuindo quando $f' < 0$, os únicos pontos nos quais pode assumir um *extremo relativo* são aqueles em que $f'$ é nula ou é descontínua (derivada não existe). Nestas condições, dizemos que um número *c*, pertencente ao domínio de $f$, é chamado *número crítico* se $f' = 0$ ou não existe neste número. O ponto correspondente (*c*, $f$(*c*)) no gráfico de $f$ é chamado *ponto crítico*. A figura 3.6 mostra 3 funções com pontos críticos, onde a derivada é nula, de modo que a reta tangente à curva da função no ponto crítico é horizontal. Já na figura 3.7, podemos ver funções com pontos críticos nos quais a derivada não existe. Na figura 3.7a, não é possível traçar uma reta tangente pelo ponto crítico. Já nas figuras 3.7b e 3.7c, as tangentes são verticais, portanto, a derivada $f'$ não existe.

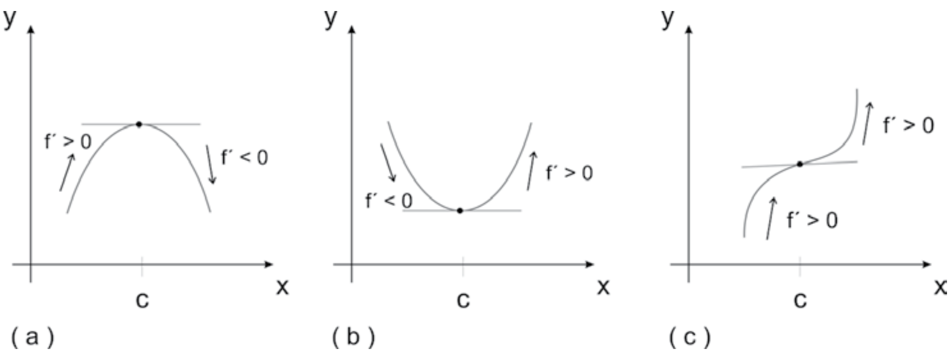



Figura 3.6

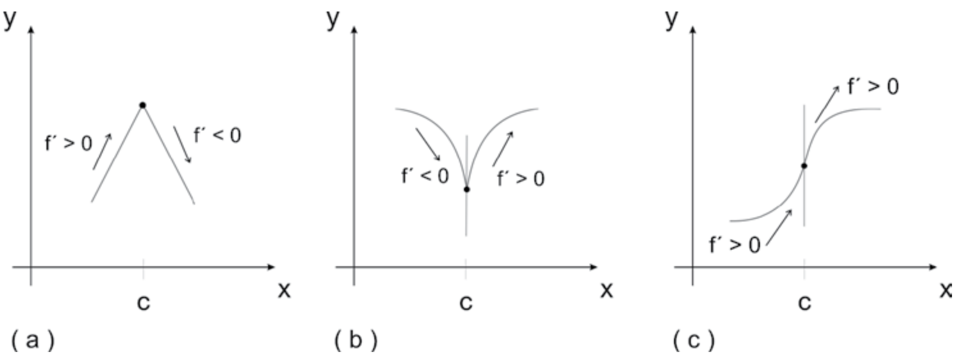



Figura 3.7.

**Exemplo 3.5 -** Dada a função $f(x) = x^2 - 4x - 5$, determine seus extremos relativos.

**Solução:**

Determinemos os números críticos de $f$. Como $f$ é contínua em todo o seu domínio, então, $f'(x)$ existe para todo $x$. Logo, devemos determinar os números que anulam $f'$. Então, $f'(x) = 2x - 4$, e, fazendo $f'(x) = 0$, vem $2x - 4 = 0$, donde $x = 2$ é o ponto crítico de $f$. Os intervalos de teste para o sinal de $f'(x)$ são $x < 2$ e $x > 2$, conforme esquema mostrado a seguir.

| Intervalo | Número de teste "c" | Sinal de f' (x) | Conclusão |
|---|---|---|---|
| $-\infty < x < 2$ | 1 | $f'(1) < 0$ | $f(x)$ é decrescente |
| $2 < x < \infty$ | 3 | $f'(3) > 0$ | $f(x)$ é crescente |

Logo, existe um número crítico em $x = 2$, e o valor desse mínimo relativo é $f(2) = -9$. (figura 3.8).

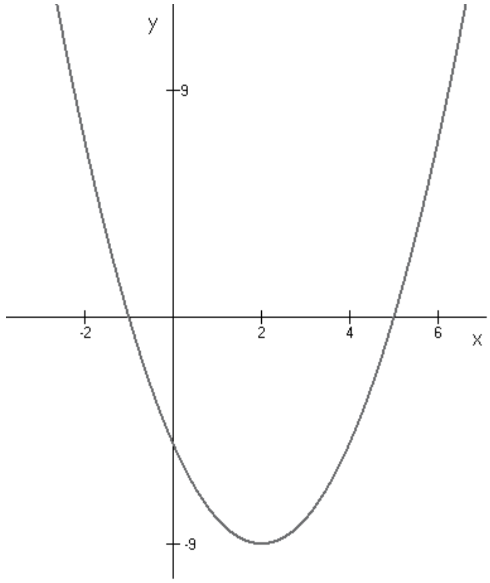



Figura 3.8.

## 1.4 Teste da primeira derivada

Dada $y = f(x)$

1. Determine os pontos críticos de $f$ que são candidatos a pontos de máximo e de mínimo relativos.
2. Teste cada um dos pontos críticos encontrados e verifique se $f'(x)$ muda de sinal. Se $f'(x)$ mudar de sinal em um ponto crítico $x = x_1$ de: a) MAIS para MENOS, então $f$ tem um máximo em $x = x_1$; e

   b) MENOS para MAIS , então $f$ tem um mínimo relativo em $x = x_1$.

**Exemplo 3.6 -** Encontre os extremos relativos da função

$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 15$

**Solução:**

Derivando $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 15$ para encontrar os pontos críticos, temos:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$$

Encontrando as raízes de $f'(x)$, temos $x = -1$ ou $x = 3$. O esquema a seguir mostra a variação do sinal de $f'(x)$.

| Intervalos | | |
|---|---|---|
| $-\infty < x < 1$ | $-1 < x < 3$ | $3 < x < \infty$ |
| $f' > 0$ | $f' < 0$ | $f' > 0$ |
| MÁXIMO | | MÍNIMO |

Considerando que $f$ cresce no intervalo em $f' > 0$ e decresce quando $f' < 0$, podemos esboçar o gráfico de $f$ mostrado na figura 3.9

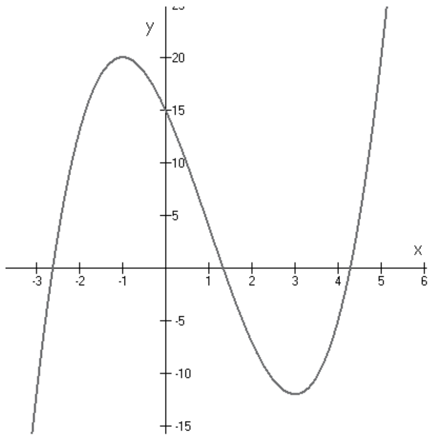



Figura 3.9

**Exemplo 3.7 -** Um psicólogo constata que a capacidade de aprender ou compreender novos conceitos e ideias depende da idade, e que esta capacidade pode ser representada por C(t) = $-\frac{3}{2}t^2 + 60\,t + 24$, após t anos. Com que idade a capacidade de aprendizagem é máxima?

**Solução:**

Derivando C(t) para encontrar os pontos críticos, temos: C'(t) = $-3t + 60$, cuja raiz é $t = 20$, que é o único ponto crítico de C. O esquema a seguir mostra os sinais da derivada.

| Intervalo | Número de teste "x" | Sinal de C' (t) | Conclusão |
|---|---|---|---|
| 0 < x < 20 | 19 | $C'(19) > 0$ | C é crescente |
| x > 20 | 21 | $C'(21) < 0$ | C é decrescente |

Como o sinal da derivada muda de MAIS para MENOS, temos um máximo relativo em t = 20, que corresponde à idade de máxima aprendizagem.

**Exemplo 3.8 -** Calcule os extremos relativos da função $f(x) = x(6 - x)^2$ .

**Solução:**

Calculemos $f'(x)$, para determinar os pontos críticos de $f$ e os intervalos onde $f$ é crescente ou decrescente:

$$f'(x) = 3(x-6)\cdot(x-2)$$

Cujas raízes são x = 2 ou x = 6. Assim, o esquema seguinte:

| Intervalos | | |
|---|---|---|
| $-\infty < x < 2$ | $2 < x < 6$ | $6 < x < \infty$ |
| $f' > 0$ | $f' < 0$ | $f' > 0$ |
| MÁXIMO | | MÍNIMO |

## 2. Informações dadas pela segunda derivada

### 2.1 Concavidade

O sinal da segunda derivada pode nos dar informações úteis quanto à forma do gráfico de uma função. Antes de usar um critério específico para obter tais informações, precisamos de algumas definições importantes.

Diz-se que uma curva é *convexa* ou tem *concavidade voltada para baixo*, num intervalo $a < x < b$, se a curva estiver sempre abaixo de suas retas tangentes para todo x no intervalo (figura 3.10). A concavidade para baixo será indicada por $\cap$.

Diz-se que uma curva é *côncava* ou tem *concavidade voltada para cima*, num intervalo a < x < b se a curva estiver sempre acima das retas tangentes à curva, para todo x do intervalo. A concavidade para cima será indicada por $\cup$.

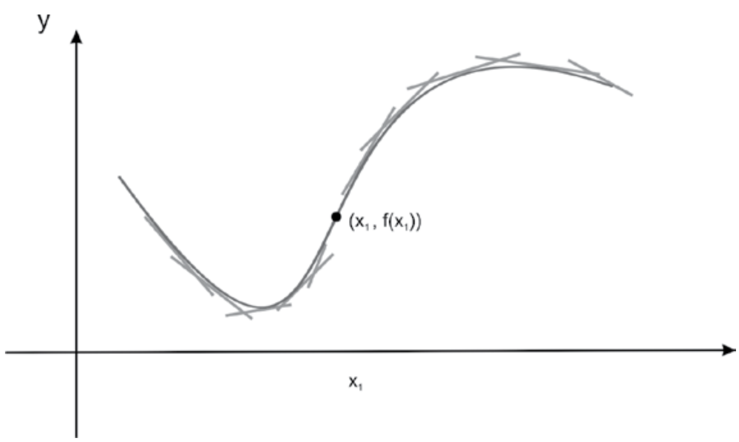



Figura 3.10

## 2.2 Teste para caracterizar a concavidade

Como podemos observar na figura 3.11, para $x < x_1$, a curva está acima de suas retas tangentes, e a concavidade, para cima, e, ainda, à medida que x cresce, a inclinação da tangente cresce, $f'$ é uma função crescente.

Por outro lado, para $x > x_1$, a curva está abaixo de suas retas tangentes e a concavidade, para baixo, e, ainda, à medida que x cresce, a inclinação da reta tangente decresce, isto é, $f$ é uma função decrescente.

Podemos, assim, estabelecer o seguinte critério para caracterizar a concavidade:

i) Se $f''(x) > 0$ no intervalo $a < x < b$, então, $f$ tem concavidade voltada para cima neste intervalo; ou

ii) Se $f''(x) < 0$ no intervalo $a < x < b$, então, $f$ tem concavidade voltada para baixo neste intervalo.

É importante que não se confunda a concavidade com o crescimento ou decrescimento da função. Esse fato está claramente mostrado na figura 3.11 a seguir.

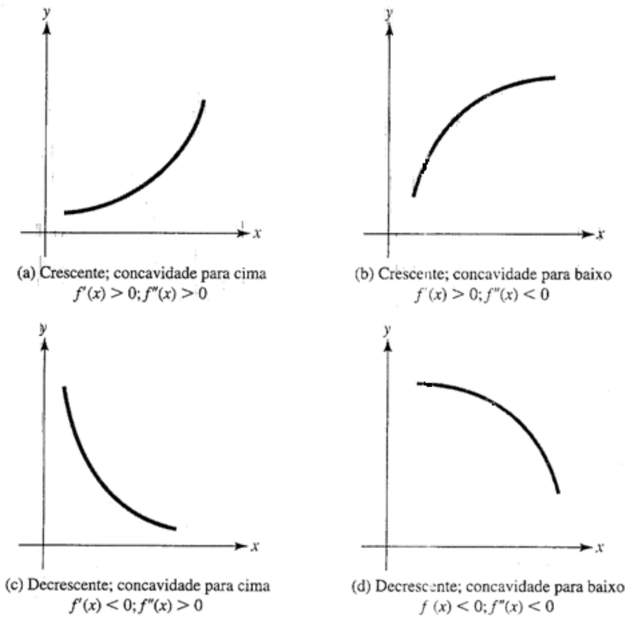



Figura 3.11

**Exemplo 3.9 -** Estude a função $f(x) = x^3 + x^2 - 8x - 1$ quanto ao sentido da concavidade.

**Solução:**

Calculando a segunda derivada, temos:

$$f(x) = x^3 + x^2 - 8x - 1;$$
$$f'(x) = 3x^2 + 2x - 8;$$
$$f''(x) = 6x + 2.$$

Analisando agora os valores que anulam $f''(x)$ ou onde $f''$ é descontínua, concluímos que $f''(x) = 0$ quando x = -1/3 e, então, podemos montar o quadro seguinte:

| Intervalo | Sinal de f ” | Sentido da oncavidade | Gráfico de f |
|---|---|---|---|
| -∞ < x < -1/3 | Negativo | Para baixo | $\cap$ |
| -1/3 < x < ∞ | Positivo | Para cima | $\cup$ |

Logo, quando *x* < -1/3 *f* tem concavidade voltada para baixo, *x* > -1/3 *f* tem concavidade voltada para baixo, conforme gráfico esboçado na figura 3.12.

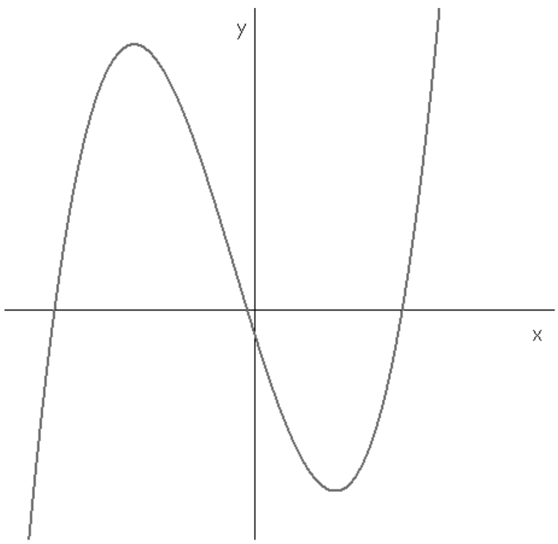



Figura 3.12

**Exemplo 3.10 -** Estude a função $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$ quanto ao sentido da concavidade de seu gráfico.

**Solução:**

Calculando a derivada segunda, temos:

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -\frac{1}{x^2} \quad \Rightarrow \quad f''(x) = \frac{2}{x^3}$$

Observe, então, que a derivada segunda não existe para x = 0 (ponto hipercrítico). Assim, devemos estudar os sinais de $f''(x)$ nos intervalos x < 0 e x > 0, conforme esquema a seguir e a figura 3.13.

| Intervalo | Sinal de f' (x) | Sentido da concavidade | Gráfico de f (x) |
|---|---|---|---|
| $-\infty < x < 0$ | Negativo | Para baixo | $\cap$ |
| $0 < x < \infty$ | Positivo | Para cima | $\cup$ |

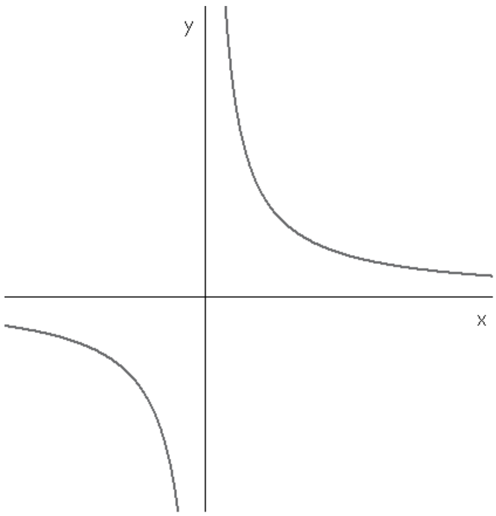



Figura 3.13

**Exemplo 3.11 -** Uma projeção do aumento da população indica que daqui a *t* anos, a população de certa cidade será $P(t) = -t^3 + 9t^2 + 48t + 200$ mil habitantes. Estude o sinal da concavidade da função.

**Solução:**

Calculando a segunda derivada temos:

$$P(t) = -t^3 + 9t^2 + 48t + 200 \quad \Rightarrow \quad P'(t) = -3t^2 + 18t + 48 \quad \Rightarrow$$
$$P''(t) = -6t + 18$$

Logo, $P''(t)$ se anula para *t* = 3, de modo que devemos estudar o sinal da segunda derivada nos intervalos *t* > 3 e *t* < 3, conforme o esquema mostrado a seguir.

| Intervalo | Sinal de P'' (t) | Sentido da concavidade | Gráfico de P (t) |
|---|---|---|---|
| $-\infty < t < 3$ | Positivo | Para cima | $\cup$ |
| $3 < t < \infty$ | Negativo | Para baixo | $\cap$ |

## 2.3 Ponto de inflexão

Existe a possibilidade de que uma função y = f(x) apresente concavidade para baixo (cima) em um certo intervalo (a,b) e para cima (baixo) em um certo intervalo (b,c). No ponto x = b, ocorre o que se chama *ponto de inflexão*, que pode ser definido como segue.

Um ponto $(x_1, f(x_1))$, no gráfico de y = f(x), onde muda o sentido da concavidade, é chamado *ponto de inflexão*.

É importante observar que, como no ponto de inflexão o sentido da concavidade muda, $f''(x)$ deve mudar de sinal em $x = x_1$; logo, $f''(x_1) = 0$ ou $f''(x)$ é descontínua em $x = x_1$. Isto mostra que é possível caracterizar a ocorrência de pontos de inflexão em termos de derivada segunda, como segue.

Seja y = f(x) uma função admitindo a primeira e a segunda derivadas contínuas. Se $x = x_1$, é tal que:

*1.* $f''(x_1) = 0$;

*2.* $f''(x_1) > 0$ *, se* $x < x_1$;

*3.* $f''(x_1) < 0$ *, se* $x > x_1$.

*Ou ainda,*

*1.* $f''(x_1) = 0$;

*2.* $f''(x_1) < 0$ *, se* $x < x_1$;

*3.* $f''(x_1) > 0$ , se $x > x_1$.

Então, aí, ocorre uma inflexão.

**Exemplo 3.12 -** Usando as informações da derivada primeira e da derivada segunda, esboce o gráfico da função $y = x(6-x)^2$.

**Solução:**

**1.** $f'(x) = 3(x-6)(x-2)$

Se $x < 2$, então $f'(x) > 0$ e $f$ é crescente.

Se $2 < x < 6$, então $f'(x) < 0$ e $f$ é decrescente.

Se $x > 6$, então $f'(x) > 0$ e $f$ é crescente.

Logo, $(2,32)$ é máximo relativo e (6,0) é mínimo relativo.

**2.** $f''(x) = 6(x-4)$

Se x < 4, então, $f''(x) < 0$, e a concavidade está voltada para baixo.

Se x > 4, então, $f''(x) > 0$, e a concavidade está voltada para cima.

Logo, o ponto (4,16) é de inflexão.

Essas informações nos permitem esboçar o gráfico mostrado na figura 3.14.

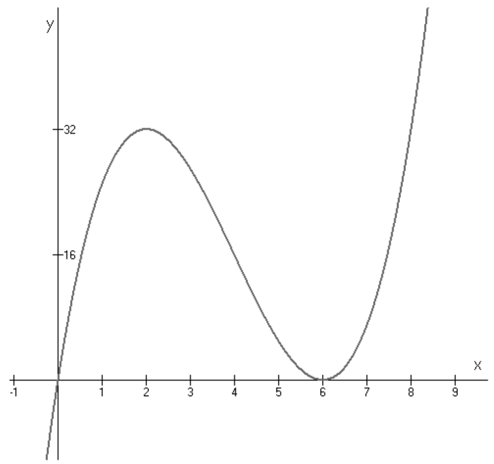



Figura 3.14

**Exemplo 3.13 -**Usando as informações da derivada primeira e da derivada segunda, esboce o gráfico da função $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 1$.

**Solução:**

**1.** $f'(x) = 6x^2 - 18x + 12$

Se x < 1, então, $f'(x) > 0$ e $f$ é crescente.

Se 1 < x < 2, então, $f'(x) < 0$ e $f$ é decrescente.

Se x > 2, então, $f'(x) > 0$ e $f$ é crescente.

Logo, (1,6) é ponto de máximo e (2,5) é ponto de mínimo.

**2.** $f''(x) = 12x - 18$

Se x < 3/2, então, $f''(x) < 0$, e a concavidade de $f$ está voltada para baixo.

Se x > 3/2, então, $f''(x) > 0$, e a concavidade de $f$ está voltada para cima.

Logo, (3/2,11/2) é ponto de inflexão.

O esboço do gráfico de f é mostrado na figura 3.15.

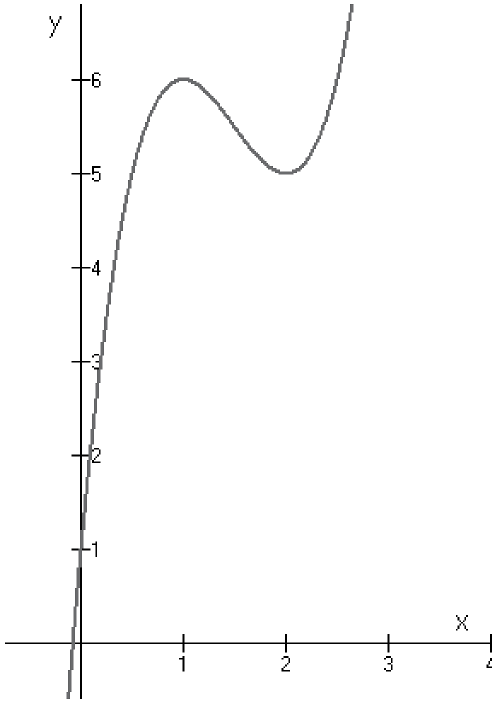



Figura 3.15

## 2.4 Máximos e mínimos relativos

Suponha que $f'(x)$ e $f''(x)$ existam em todo x do intervalo a < x < b que contenha $x_1$ e seja $f'(x_1) = 0$.

I. Se $f''(x_1) < 0$, $f$ possui um máximo relativo em $x = x_1$.

II. Se $f''(x_1) > 0$, $f$ possui um máximo relativo em $x = x_1$.

III. Se $f''(x_1) = 0$, o teste não é conclusivo.

**Exemplo 3.14 -** Determine os extremos da função $y = x^2 - 4x - 5$.

**Solução:**

$f(x) = x^2 - 4x - 5$

$f'(x) = 2x - 4$

$f''(x) = 2 > 0$, em particular $f''(2) = 2 > 0$.

$f'(2) = 0$

Logo, como $f''(2) = 2 > 0$ e $f'(2) = 0$, existe um mínimo relativo quando $x = 2$. O valor do mínimo relativo é de $-9$.

**Exemplo 3.15 -** Determine os extremos relativos da função $y = x^3 + x^2 - 8x - 1$.

**Solução:**

$y(x) = x^3 + x^2 - 8x - 1$

$y'(x) = 3x^2 + 2x - 8 = (3x - 4)(x + 2)$

$y''(x) = 6x + 2$

É fácil ver que a derivada primeira se anula para $x = 4/3$ ou $-2$, e usando o teste da segunda derivada, vem:

$y'(-2) = 0$ e $y''(-2) < 0$, então, (-2,11) é ponto de máximo, e

$y'(4/3) = 0$ e $y''(4/3) > 0$, então, (4/3, 45/3) é ponto de mínimo.

## 3 Máximos e mínimos absolutos

Uma função $f$ tem ou atinge o valor *máximo absoluto* em $x = x_1$, se $f(x_1) \geq f(x)$ para todo x no domínio de $f$. Por outro lado, uma função $f$ tem ou atinge o valor *mínimo absoluto* em $x = x_1$, se $f(x_1) \leq f(x)$ para todo x no domínio de $f$. Frequentemente os extremos absolutos coincidem com os relativos; no entanto, nem toda função possui valores extremos absolutos. Existe, porém, um teorema do cálculo avançado que garante a existência de um valor máximo absoluto e de um valor mínimo absoluto sempre que $f$ for contínua num intervalo fechado $a \leq x \leq b$.

Assim, pode-se estabelecer o seguinte critério para encontrar extremos absolutos:

Dada $y = f(x)$;

**1.** Calcule $f'(x)$;

**2.** Determine os pontos críticos de $f$;

**3.** Determine os pontos extremos do intervalo $a \leq x \leq b$, que é o domínio de $f$; e

**4.** Calcule os valores correspondentes de $y = f(x)$ em cada um dos pontos críticos e nos pontos $x = a$ e $x = b$. Destes valores calculados, escolha o maior, que será o máximo absoluto, e o menor, que será o mínimo absoluto.

**Exemplo 3.16 -** Dada $f(x) = -x^4 + 4x + 2$, $0 \leq x \leq 2$, ache o máximo e mínimo absolutos de $f$.

**Solução:**

**1.** Calcule $f'(x)$.

$f'(x) = -4x^3 + 4$

**2.** Ache os pontos críticos.

Como $f'(x)$ é contínua, os números críticos são aqueles que anulam a derivada. Logo, x = 1 é o único número nesta condição, e, portanto, (1,5) é o único ponto crítico.

**3.** Calcule $f$ nos pontos críticos e nos extremos do intervalo.

$f(1) = -(1)^4 + 4(1) + 2 = -1 + 4 + 2 = 5$

$f(0) = 2$

$f(2) = -(2)4 + 4(2) + 2 = -16 + 8 + 2 = -6$

**4.** Logo, $f(1) = 5$, máximo absoluto

$f(2) = -6$, mínimo absoluto

## Texto complementar

### Uma aplicação da derivada em Fisiologia

*Considere o seguinte problema*: Quando tossimos, o raio de traqueia diminui de tamanho, afetando a velocidade do ar na traqueia. Sendo $r_o$ o raio normal da traquéia, a relação entre a velocidade V e o raio r da traqueia durante a tosse é dada pela função da forma $V(r) = ar^2 ( r_o - r)$ , onde a é uma constante positiva. Nestas condições, calcule o raio r em que é maior a velocidade do ar e esboce o gráfico de V(r).

**Solução:** O raio r da traqueia contraída não pode ser maior que o raio normal $r_o$ nem menor que zero; logo, o objetivo é calcular o máximo absoluto de V(r) no intervalo $0 \leq r \leq r_o$ . Calcule primeiro a derivada de V(r) em relação a r, usando a regra do produto, e fatore a derivada encontrada (note que a e $r_o$ são constantes):

$V'(r) = -ar^2 + ( r_o - r)(2ar)$

$= ar [-r + 2 (r_o - r) ]$

$= ar ( 2r_o - 3r)$

Iguale agora a derivada fatorada a zero e resolva a equação, obtendo as coordenadas dos pontos críticos:

$ar (2r_o - 3r) = 0$

$r = 0$ ou $r = \frac{2}{3} r_o$

Ambos os valores de r pertencem ao intervalo $0 \leq r \leq r_o$, sendo um deles uma extremidade do mesmo. Calcule V(r) para estes dois valores de r e para a outra extremidade $r = r_o$, obtendo

$V(0) = 0$ $\qquad v(\frac{2}{3} r_o) = \frac{4a}{27} r_o^{\,3}$ $\qquad V(r_o) = 0$

Comparando esses valores, você pode concluir que a velocidade do ar é maior quando o raio da traqueia contraída é $\frac{2}{3}r_o$, ou seja, dois terços da traquéia não contraída. O gráfico de V está ilustrado na figura 3.17. Note que as interseções – r do gráfico são facilmente percebidas na forma fatorada $V(r) = ar^2 (r_o - r)$. Note também que o gráfico possui uma tangente horizontal, quando $r = \frac{2}{3}r_o$, refletindo o fato de que $V'(\frac{2}{3}r_o) = 0$.
(Extraído de HOFFMANN , 1980)

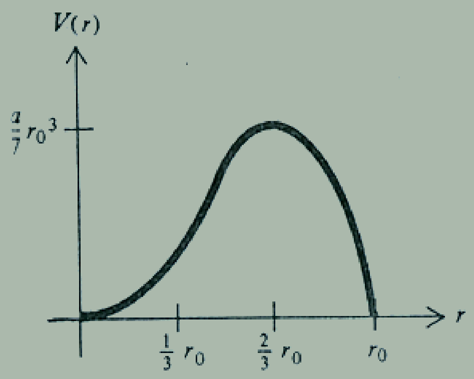



Figura 3.17.

## Síntese da Capítulo

Neste capítulo foram estudadas as aplicações da derivada. Assim, o crescimento e decrescimento de funções foram estudados com o auxílio da primeira derivada, enquanto a segunda derivada foi usada para se estudar a concavidade das curvas e a existência de pontos de inflexão. Já para detectar os extremos (máximos e mínimos relativos e absolutos) foi feito uso tanto da primeira como da segunda derivadas.Em todos os casos, esses conhecimentos foram aplicados em problemas práticos na área de ciências biológicas.

## Atividades de avaliação

**1.** Determine os intervalos em que a função dada está aumentando ou diminuindo. Esboce o gráfico.

a) $y = x^3 - 3x - 4$;

b) $y = x^3 + 3x + 5$.

**2.** Uma pulga, ao saltar, teve sua posição no espaço descrita em função do tempo pela expressão $h(t) = 4,4\,t - 4,9\,t^2$. Esboce o gráfico da função e encontre os intervalos em que h é crescente ou decrescente.

**3.** Determine os extremos da função $f(x) = x^3 + x^2 - 8x - 1$.

**4.** Um psicólogo está interessado em estudar os processos de memorização. Ele dá a 100 pessoas listas iguais, contendo 10 palavras, e pede a essas pessoas que as memorizem. Concede à primeira pessoa 1 segundo; à segunda, 3 segundos, e assim por diante. Os resultados obtidos estão indicados na figura 3.16

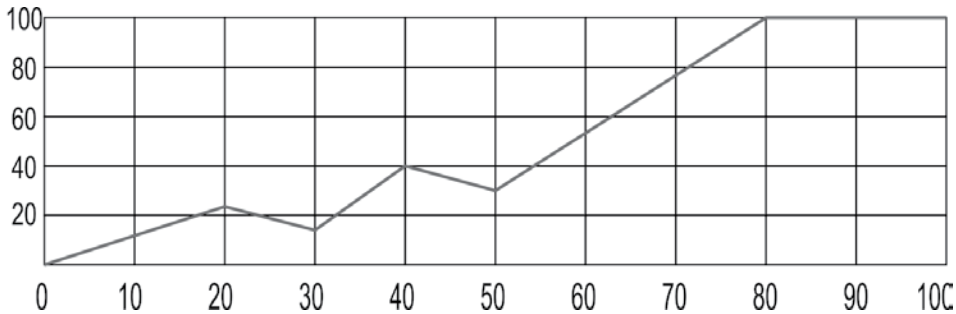



Figura 3.16

No eixo horizontal, está indicado o tempo, em segundos, permitido para a memorização da lista, e, no eixo vertical, a percentagem de pessoas que conseguiram memorizar a lista no instante t ($0 \leq t \leq 100$). Com esses dados, complete o quadro a seguir:

| Intervalo | Extremos relativos | Crescimento ou decrescimento |
|---|---|---|
| 0 - 20 | | |
| 21 -30 | | |
| 31 - 40 | | |
| 41 - 50 | | |
| 51 - 80 | | |
| 81 - 100 | | |

**5.** Encontre os extremos relativos da função $f(x) = 2x^3 - 12x^2 + 24x$.

**6.** Um paciente, submetido a uma dieta, tem adicionado, a cada quilograma de sua alimentação normal, x gramas de um medicamento. A quantidade de alimentos consumida em função de x é dada por $C(x) = 1,5\,x^2 - 6x + 7$. Determine a quantidade de medicamento que minimizará o consumo de alimentos pelo paciente.

**7.** Determine os intervalos em que o gráfico de f (x) = 2x3 – 9x2 – 9x + 15 tem concavidade voltada para cima ou para baixo.

**8.** Um estudo ambiental, realizado em certo município, revela que, daqui a t anos, a concentração de monóxido de carbono no ar será $Q(t) = 0{,}05t^2 + 0{,}1t + 3{,}4$ ppm. Estude a concavidade do gráfico de Q.

**9.** Construa o gráfico da função que possua todas as propriedades seguintes:

a) $f'(x) > 0$ , quando $x < -1$ e $x > 3$;

b) $f'(x) < 0$ , quando $-1 < x < 3$;

c) $f''(x) < 0$ , quando $x < 2$;

d) $f''(x) > 0$ , quando $x > 2$.

**10.** A derivada de uma certa função é $f'(x) = x^2 - 4x$:

a) Em que intervalos $f$ é crescente? E decrescente?

b) Em que intervalos $f$ tem concavidade para cima? E para baixo?

c) Calcule a abscissa do ponto de inflexão de $f$.

**11**. Encontre os extremos relativos da função $y = 3 + x^{2/3}$, bem como os intervalos em que é crescente ou decrescente.

**12.** Em um laboratório farmacêutico, concluiu-se que um modelo bastante realista para descrever a relação entre a pressão sanguínea (sistólica) e a quantidade de um novo medicamento que é administrado para reduzir a pressão sistólica é dado por $P(x) = Pi + 2x - x2$ . P é medido em milímetros de mercúrio, e x é a quantidade, em miligramas, do medicamento administrado 30 minutos antes da leitura de P. Pi é a pressão antes de o paciente tomar o medicamento e varia de um paciente para outro. De modo geral, porém, pode-se supor que $200 \leq Pi \leq 220$.

a) Calcule a taxa de variação da pressão P em relação à quantidade x da droga administrada;

b) Determine a quantidade mínima da droga a ser administrada e que ainda faça efeito;

c) Se um certo paciente tem uma pressão sistólica inicial de 200 e 10 mg do medicamento lhe são dados, qual será sua pressão 30 minutos mais tarde?

**13.** Na água e em solução, o produto das concentrações de íons hidrônio $[H_3O^+]$ e de íons hidroxila $[OH^-]$ está muito próximo de $10^{-14}$ (as medidas são feitas em moles). Seja:

$S = [H_3O^+] + [OH^-]$.

Determinar o valor de $[H_3O^+]$ que minimiza *S*.

**14.** A massa de uma cultura de bactérias viáveis tem seu crescimento representado pela função $M'(t) = p_o + 60t - 2{,}5t^2$ ( t medido em h e M em $cm^3$), sendo $p_o$ uma constante positiva. Calcule a velocidade de crescimento

**Pressão arterial** é a força com a qual o coração bombeia o sangue através dos vasos. **Convencionalmente, a pressão arterial é expressa como a razão entre a pressão sistólica e a pressão diastólica**

**Pressão Sistólica** - É o valor mais alto e o primeiro a ser medido. Mede a força do sangue nas artérias, à medida que o coração contrai, para impulsionar o sangue através do corpo.

**Pressão Diastólica –** É o número inferior. Mede a **pressão e**nquanto o coração relaxa para se abastecer de sangue.

dessa cultura quando t = 6h. O que representa o ponto onde $M'(t) = 0$? E para os valores de t onde $M'(t)$ > 0 e $M'(t)$ < 0, o que estaria acontecendo com essa massa bacteriana?

**15.** O peso específico da água a uma temperatura de t°C é dado por

$P(t) = 1 + at + bt^2 + ct^3$ , $0 \leq t \leq 100°C$,

Sendo as constantes $a = 5{,}3 \cdot 10^{-5}$, $b = -6{,}53 \cdot 10^{-6}$ e $c = 1{,}4 \cdot 10^{-8}$. Qual é a temperatura em que a água apresentará o maior peso especifico?

**16.** Cinquenta animais ameaçados de extinção são colocados em uma reserva. Decorridos *t* anos, a população x desses animais é estimada por

$$X(t) = 50\,\frac{t^2+6t+30}{t^2+30}.$$

Em que instante essa população animal atinge seu máximo? Quanto ele vale?

**17.** Em um lago, a população x de peixes é variável, crescendo com uma velocidade V que é diretamente proporcional ao produto x ( 10.000 – x), isto é, V = K . x . (10.000 – x), onde K é uma constante positiva. Determine o valor de x para o qual a velocidade V de crescimento é máxima.

**18.** Os fisiologistas afirmam que, para um indivíduo sadio e em repouso, o número N de batimentos cardíacos por minuto varia em função da temperatura ambiente t, em graus Celsius, segundo a função $N(t) = 0{,}1t^2 - 4t + 90$. Se a temperatura ambiente for de 20°C, calcule o número de batimentos cardíacos, por minuto, de uma pessoa que está dormindo.

**19.** Uma substância química é introduzida na corrente sanguínea de uma pessoa. Depois de t horas da aplicação, a concentração desta substância pode ser descrita por $K(t) = \dfrac{2t}{16+t^3}$. Depois de quanto tempo a concentração é máxima?

**20.** Dois analgésicos de marcas distintas estão sendo testados para verificar se são eficientes. A eficácia de cada um pode ser expressa em função do tempo. O alívio obtido pela ingestão do primeiro analgésico é dado por $A_1(t) = -4t^2 + 8t$ e o do segundo, por $A_2(t) = -1{,}8t^3 + 5{,}4t$, sendo t o número de horas após o medicamento ser tomado.

a) A que horas o primeiro analgésico proporcionará um alívio máximo?

b) A que horas o segundo analgésico proporcionará um alívio máximo?

c) O fabricante do primeiro analgésico afirma que seu produto tem ação mais intensa e mais rápida do que o segundo analgésico. Em que instante a diferença entre os efeitos dos dois é mínima?

## Referências

AGUIAR, A. F. A.; XAVIER, A. F. S.; RODRIGUES, J. E. M. **Cálculo para ciências médicas e biológicas**. São Paulo: Editora Harbra, 1988. 351 p.

ÁVILA, G. S. S. **Cálculo I**. Rio de Janeiro : Livros Técnicos e Científicos, 1978. 355 p.

ÁVILA, G. S. S. **Introdução às funções e à derivada**. São Paulo: Atual Editora, 1994, 174 p.

BATSCHELET, E. **Introdução à matemática para biocientistas**. Rio de Janeiro: Interciência, 1978. 595 p.

HOFFMANN, L. **Cálculo : Um curso moderno e suas aplicações**. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1980. 382 p.

HOFFMANN, L.; BRADLEY, G.L. **Cálculo : Um curso moderno e suas aplicações**. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 2002. 524 p.

SWOKOWSKI, E.W. **Cálculo com geometria analítica**. São Paulo: Makron Books, 1994.v.1. 744 p.

WHIPKEY, K.L.; WHIPKEY, M.N. **Cálculo e suas múltiplas aplicações**. 3ª ed. ,Rio de Janeiro: Editora Campus, 1982. 420 p.

Capítulo 4

# Noções sobre Integração

## Objetivos

- Conceituar antidiferenciação;
- Usar antidiferenciação em problemas aplicados;
- Introduzir o conceito de equação diferencial;
- Estudar modelos biológicos usando equações diferenciais.

## 1 Antidiferenciação: a integral indefinida

Em muitos problemas, a derivada de uma função é conhecida, e o objetivo é encontrar a própria função. Por exemplo, um físico que conhece a velocidade de um corpo em movimento pode querer calcular a posição do corpo em um tempo qualquer; um economista que conhece a taxa de inflação pode querer estimar os preços em um instante futuro; um *biólogo* que conhece a taxa de variação de uma população pode estar interessado em usar essa informação para prever qual será a população em algum instante.

A operação inversa da diferenciação (derivação) é chamada *antidiferenciação* ou *integração indefinida,* e a função obtida por esse processo é chamada *antiderivada*. Assim, temos a seguinte definição : “ *Uma função F é uma antiderivada de f em um intervalo I se F’(x) = f(x) para todo x em I* ”.

**Exemplo 4.1 -** $F(x) = x^2$ é uma antiderivada de $f(x) = 2x$ porque

$$F'(x) = \frac{d(x^2)}{dx} = 2x = f(x).$$

Há muitas outras antiderivadas de $2x$, tais como $x^2 + 2$, $x^2 - \frac{5}{3}$ etc. De modo geral, se C é uma constante arbitrária, então $x^2 + C$ é uma antiderivada de $2x$, pois

$$\frac{d(x^2 + C)}{dx} = 2x + 0 = 2x, \forall C \in R .$$

**Exemplo 4.2 -** Se $F(x) = 4x^3 + x^2 + 5$, então, $F'(x) = 12x^2 + 2x$ . Assim, se f é a função definida por $f(x) = 12x^2 + 2x$, então, F é uma antiderivada de f . De modo geral, se C uma constante arbitrária, então, $4x^3 + x^2 + C$ é uma antiderivada de $12x^2 + 2x$, pois:

$$\frac{d(4x^3+x^2+C)}{dx}=12x^2+2x=f(x).$$

A notação:

$$\int f(x)dx=F(x)+C,$$

**Ecologia - A palavra Ecologia tem origem no grego *"oikos"* que significa casa e "logia", estudo, reflexão. Logo, seria o estudo da casa, ou de forma mais genérica, do lugar onde se vive. Foi o cientista alemão Ernest Haeckel, em 1869, quem primeiro usou este termo para designar a parte da Biologia que estuda as relações entre os seres vivos e o meio ambiente em que vivem, além da distribuição e da abundância dos seres vivos no planeta.**

onde F'(x) = f(x) e C é uma constante arbitrária, denota a família de todas as antiderivadas de f(x) em um intervalo I.

O símbolo $\int$ usado é o *sinal da integral*. Chamamos $\int f(x)dx$ a *integral indefinida* de f(x). A expressão f(x) é o *integrando*, e C é a *constante de integração*. O processo de determinação de F(x) + C, quando f(x) é conhecida, é designado como *integração indefinida*. O adjetivo "*indefinida*" enfatiza que o processo de integração não produz uma função definida, mas, em vez disso, um conjunto de funções que diferem pela constante C.

**Exemplo 4.3**

a) $\int x^4dx = \frac{1}{5}x^5 + C$ pois $\frac{d(\frac{1}{5}x^5+C)}{dx}=x^4$;

b) $\int t^{-3}dt=-\frac{1}{2}t^{-2}+C$ pois $\frac{d(-\frac{1}{2}t^{-2}+C)}{dt}=t^{-3}$;

c) $\int x^3x^5dx=\int x^8dx=\frac{x^9}{9}+C$ pois $\frac{d(\frac{x^9}{9}+C)}{dx}=x^8=x^3x^5$.

**Exemplo 4.4 -** Represente geometricamente a família de antiderivadas da função f(x) = $3x^2$.

**Solução:**

$\int f(x)dx=F(x)+C$ porque $\frac{d(F(x)+C)}{dx}=f(x)$, logo, F(x) + C representam a família de antiderivadas de f(x). Existe uma interpretação geométrica simples para o fato de que duas antiderivadas da mesma função diferem por uma constante. Quando dizemos que F e G são antiderivadas de *f* , estamos dizendo que F'(x) = G'(x) = f(x), e que, para qualquer valor de x, a inclinação (ou seja, a derivada) da curva y = F(x) é igual a inclinação da curva y = G(x). Se considerarmos o caso particular ad função f(x) = $3x^2$, temos:

$\int 3x^2 dx = x^3 + C$, pois $\dfrac{d(x^3 + C)}{dx} = 3x^2$, logo, $x^3 + C$ representam a família de antiderivadas de $f(x) = 3x^2$, o que pode ser geometricamente representado pela figura 4.1.

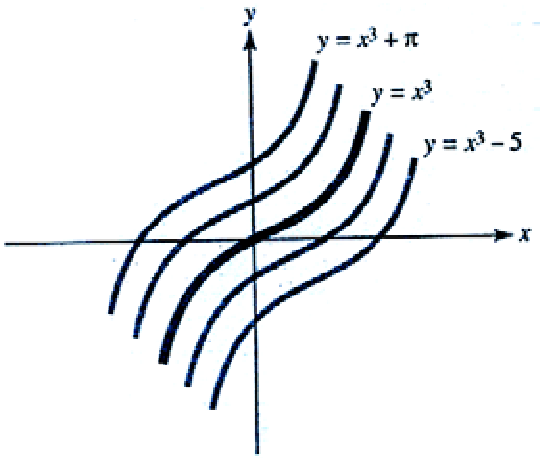



Figura 4.1

## 2 Propriedades da integral indefinida

### 2.1 Regra da potência

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C, \quad \forall n \neq -1$$

**Exemplo 4.5 -** Calcule as seguintes integrais :

a) $\int x^2 dx$; b) $\int x^3 dx$; c) $\int \frac{1}{x^5} dx$; d) $\int \sqrt{x} dx$.

**Solução:**

a) $\int x^2 dx = \dfrac{x^3}{3} + C$;

b) $\int x^3 dx = \dfrac{x^4}{4} + C$;

c) $\int \dfrac{1}{x^5} dx = \int x^{-5} dx = \dfrac{x^{-5+1}}{-5+1} + C = \dfrac{-1}{4x^4} + C$;

d) $\int \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \dfrac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \dfrac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C$.

## 2.2 Regra da constante

$\int k dx = kx + C$ , para $K$ qualquer constante real.

De fato, $\dfrac{d(kx+C)}{dx} = k$ , logo, Kx + C representa uma família de antiderivadas de f(x) = K.

**Exemplo 4.6 -** Determine as seguintes integrais:

a) $\int dx$;  b) $\int 3dx$.

**Solução:**

a) $\int dx = \int 1dx = 1x + C = x + C$ ;

b) $\int 3dx = 3x + C$ .

## 2.3 Regra da multiplicação por uma constante

$\int Kf(x)dx = K\int f(x)dx$ , para $K$ qualquer constante real.

De fato, basta observar que $\dfrac{d(Kf(x)}{dx} = K\dfrac{d(f(x))}{dx}$, o que prova o resultado.

**Exemplo 4.7 -** Integre as seguintes funções:

a) $\int dx$ ;  b) $\int 2xdx$ .

**Solução:**

a) $\int dx = \int 1dx = 1\int dx = x + C$ ;

b) $\int 2xdx = 2\int xdx = 2\dfrac{x^{1+1}}{1+1} + C = x^2 + C$ .

## 2.4 Regra da soma

$$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx .$$

**Exemplo 4.8 -** Calcule as integrais.

a) $\int (x + x^2)dx$;  b) $\int (3x^6 - 2x^2 + 7x + 1)dx$;

c) $\int \dfrac{t^2 - 2t^4}{t^4} dt$.

**Solução:**

Combinando as propriedades anteriores, temos:

a) $\int (x + x^2)dx = \int xdx + \int x^2 dx$

= $\dfrac{x^2}{2} + C_1 + \dfrac{x^3}{3} + C_2$

= $\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + C(C_1 + C_2)$

b) $\int (3x^6 - 2x^2 + 7x + 1)dx = \int 3x^6 dx - \int 2x^2 dx + \int 7xdx + \int 1dx$

= 3$\int x^6 dx - 2\int x^2 dx + 7\int xdx + 1\int x^0 dx$

= 3$\dfrac{x^7}{7} - 2\dfrac{x^3}{3} + 7\dfrac{x^2}{2} + x + C$

Observe que não é preciso colocar a constante em cada integração, bastando colocar a constante C apenas ao final da integração.

c) $\int \dfrac{t^2 - 2t^4}{t^4} dt = \int \dfrac{t^2}{t^4} dt - \int \dfrac{2t^4}{t^4} dt$

= $\int \dfrac{1}{t^2} dt - 2\int dt$

= $\int t^{-2} dt - 2\int dt$

= $\dfrac{t^{-1}}{-1} - 2t + C$

= -$\dfrac{1}{t} - 2t + C$

**Exemplo 4.9 -** Calcular as integrais.

a) $\int (3x + 5)dx$; b) $\int \sqrt[3]{x^2} dx$; c) $\int \dfrac{1}{x^4} + \dfrac{1}{\sqrt[4]{x}})dx$.

**Solução:**

a) $\int (3x+5)dx = \int 3xdx + \int 5dx$

$= 3\int xdx + 5\int dx$

$= \frac{3}{2}x^2 + 5x + C$

b) $\int \sqrt[3]{x^2}\,dx = \int x^{\frac{2}{3}}dx$

$= \frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} + C$

$= \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} + C$

c) $\int \left(\frac{1}{x^4} + \frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)dx = \int \frac{1}{x^4}dx + \int \frac{1}{x^{\frac{1}{4}}}dx$

$= \int x^{-4}dx + \int x^{\frac{-1}{4}}dx$

$= \frac{x^{-4+1}}{-4+1} + \frac{x^{\frac{-1}{4}+1}}{-\frac{1}{4}+1} + C$

$= \frac{x^{-3}}{-3} + \frac{x^{\frac{3}{4}}}{\frac{3}{4}} + C$

$= -\frac{1}{3x^3} + \frac{4x^{\frac{3}{4}}}{3} + C$

$$= -\frac{1}{3x^3} + \frac{4\sqrt[4]{x^3}}{3} + C$$

## 2.5 Regra do logaritmo

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C, \forall x \neq 0$$

Observe que esse é um caso particular da primeira propriedade para n = -1, logo, podemos escrever:

$$\int x^n dx = \begin{cases} \frac{1}{n+1} + C, n \neq -1 \\ \ln|x| + C, n = 1 \end{cases}$$

**Exemplo 4.10 -** Integre a função f (u) = $\frac{1}{3u} - \frac{\sqrt{u}}{2}$.

**Solução:**

$$\int (\frac{1}{3u} - \frac{\sqrt{u}}{2}) du = \frac{1}{3}\int \frac{1}{u} du - \frac{1}{2}\int u^{\frac{1}{2}} du$$

$$= \frac{1}{3}\ln|u| - \frac{1}{2}\frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C$$

$$= \frac{1}{3}\ln|u| - \frac{1}{3}u^{\frac{3}{2}} + C$$

## 2.6 Regra da Exponencial

$$\int e^{kx} dx = \frac{1}{k}e^{kx} + C$$

**Exemplo 4.11 -** Calcular a integral $\int (3e^{-5t} + \sqrt{t}) dt$.

**Solução:**

$\int (3e^{-5t} + \sqrt{t})dt = \int 3e^{-5t}dt + \int \sqrt{t}dt$

$= 3\int e^{-5t}dt + \int t^{\frac{1}{2}}dt$

$= 3(-\frac{1}{5}e^{-5t}) + \frac{1}{3/2}t^{3/2} + C$

$= -\frac{3}{5}e^{-5t} + \frac{2}{3}t^{3/2} + C$

**Exemplo 4.12 -** Calcule a integral $\int (2e^u + \frac{6}{u} + \ln 2)du$ .

**Solução:**

$\int (2e^u + \frac{6}{u} + \ln 2)du = \int 2e^u du + \int \frac{6}{u}du + \int \ln 2du$

$= 2\int e^u du + 6\int \frac{1}{u}du + \ln 2\int du$

$= 2e^{u} + 6\ln|u| + u\ln 2 + C$

## 3 Algumas aplicações da diferenciação

**Exemplo 4.13 -** Estima-se que, daqui a x meses, a população de certa cidade estará aumentando à razão de 2 + 6$\sqrt{x}$ habitantes por mês. A população atual é de 5.000 pessoas. Qual será a população daqui a 9 meses ?

**Solução:**

Seja P(x) a população da cidade daqui a x meses. Nesse caso, a taxa de variação com o tempo será a derivada $\frac{dP}{dx} = 2 + 6\sqrt{x}$ . Isso significa que a função P(x) é a antiderivada de 2 + 6$\sqrt{x}$ . Dessa forma,

$$P(x) = \int \frac{dP}{dx}dx = \int (2 + 6\sqrt{x})dx = 2x + 4x^{3/2} + C$$

Onde C é uma constante. Para determinar o valor de C, usamos o fato de que no momento (para x = 0), a população é de 5.000 habitantes. Temos, então, P(0) = 5.000, logo, P(0) = 2(0) + 4(0)$^{3/2}$ $+C = 5.000$ e então C = 5.000. Assim,

P(x) = 2x + 4x$^{3/2}$ + 5.000

E a população, daqui a 9 meses, será

P(9) = 2(9) + 4(27) + 5.000 = 5.126 habitantes

**Exemplo 4.14 -** Estima-se que, daqui a *t* anos, a população de certa cidade à beira de um lago estará aumentando à razão de 0,6t$^2$ + 0,2t + 0,5 mil habitantes por ano. Os ecologistas descobriram que o índice de poluição do lago aumenta à razão de aproximadamente 5 unidades para cada 1.000 habitantes. Qual será o aumento do índice de poluição do lago nos próximos 2 anos ?

**Solução:**

Seja P(t) a população do lago daqui a t anos. Então, $\frac{dP}{dt} = 0,6t^2 + 0,2t + 0,5$.

Seja I(p) a variação do índice de poluição por habitante, logo, $\frac{dI}{dP} = \frac{5}{1.000} = 0,005$.

Como estamos interessados na variação do índice de poluição em relação ao tempo, usamos a derivação da função composta. Então,

$$\frac{dI}{dt} = \frac{dI}{dP}\frac{dP}{dt} = 0,005(0,6t^2 + 0,2t + 0,5) = 0,003t^2 + 0,001t + 0,0025.$$

Então, a função I(p) é dada por I(p) = $\int \frac{dI}{dt}dt$ .

$$= \int (0,003t^2 + 0,001t + 0,0025)dt$$

$$= \frac{0,003}{3}t^3 + \frac{0,001}{2}t^2 + 0,0025t + C$$

$$= 0,001t^3 + 0,0005t^2 + 0,0025t + C$$

Como, no tempo inicial (t=0), o índice de poluição era zero, ou seja, I(0) = 0, segue-se que

0,001(0)$^3$ + 0,0005(0)$^2$ + 0,0025(0) + C = 0 $\Rightarrow$ C = 0

Daí:

I(t) = 0,001t$^3$ + 0,0005t$^2$ + 0,0025t

E, então:

I(2) = 0,001(2)$^3$ + 0,0005(2)$^2$ + 0,0025(2)

= 0,008 + 0,002 + 0,005

$= 0{,}015$

$= \dfrac{15}{1000}$

Portanto, nos próximos dois anos, teremos um aumento de 15 unidades.

**Exemplo 4.15 -** De acordo com uma das leis de Poiseuille para o fluxo de sangue em uma artéria, se V(r) é a velocidade do sangue a *r* cm do eixo central da artéria, a taxa de variação da velocidade com *r* é inversamente proporcional a *r*, ou seja:

$V'(r) = -ar,$

onde a é uma constante positiva. Escreva uma expressão para V(r), supondo V(R) = 0, onde R é o raio da artéria.

**Solução:**

A velocidade é máxima no centro da artéria quando r = 0, e mínima (nula) na periferia quando R = r, de modo que V(R) = 0, conforme enunciado. V(r) é a antiderivada de $V'(r)$, então:

$$V(r) = \int V'(r)dr = \int -ardr$$

Fazendo r = R , temos:

$V(R) = -\dfrac{aR^2}{2} + C$ e como $V(R) = 0$ temos $-\dfrac{aR^2}{2} + C = 0 \Rightarrow C = \dfrac{aR^2}{2}$

Portanto,

$$V(r) = -\frac{ar^2}{2} + C \qquad \Rightarrow \qquad V(r) = -\frac{aR^2}{2} \quad \frac{ar^2}{2}$$

E, finalmente,

$V(r) = \dfrac{a}{2}(R^2 - r^2)$ é a expressão pedida.

Esta relação é conhecida como *lei do fluxo laminar* e foi descoberta experimentalmente pelo médico francês Jean Leonard Marie Poiseuille em 1842. Tal relação estabelece que a velocidade do sangue em ponto interior a uma artéria é expressa como função da distância deste ponto ao centro da artéria. Dados obtidos experimentalmente fornecem valores bem aproximados $\dfrac{a}{2} = 1{,}100$ e R = 0,2 cm, de modo que $V(r) = 1{,}1\,(0{,}04 - r^2)$, conforme tabela a seguir.

Tabela. Velocidade do sangue(cm/s) em um ponto interior a uma artéria como função da distância r (cm) deste ponto ao centro da artéria.

| Distância r do centro da artéria (cm) | V(r) = 1,1 (0,04 – r2) cm/s |
|---|---|
| 0 | 44,00 |
| 0,050 | 41,25 |
| 0,075 | 37,81 |
| 0,100 | 33,00 |
| 0,125 | 26,81 |
| 0,150 | 19,25 |
| 0,175 | 10,31 |
| 0,200 | 0 |

Esses dados confirmam a hipótese do enunciado: a velocidade máxima ocorre bem no centro da artéria e vai decrescendo à medida que o ponto se aproxima da parede arterial.

## 4 Integração por mudança de variável

A forma integral da regra da cadeia pode ser vista como uma técnica para simplificar uma integral, mudando a variável de integração. Começamos com uma integral da forma $\int g(u)(\frac{du}{dx})dx$ e a transformamos em uma integral mais simples da forma $\int g(u)du$, na qual a variável de integração é u. Alguns exemplos esclarecerão o que foi dito.

**Exemplo 4.16 -** Determine $\int e^{5x}dx$.

**Solução:**

Fazendo u = 5x, temos $\frac{du}{dx} = 5$ e du = 5dx. Observe que o fator 5 não faz parte do integrando, logo, devemos introduzi-lo e compensá-lo, multiplicando pelo número 1/5. Assim, podemos escrever:

$$\int e^{5x}dx = \frac{1}{5}\int e^{5x}5dx = \frac{1}{5}\int e^{u}du = \frac{1}{5}e^{u} + C = \frac{1}{5}e^{5x} + C$$

**Exemplo 4.17 -** Determine $\int t(t^2+1)^5\,dt$.

**Solução:**

Faça u = $t^2$ + 1, logo, du = 2t *dt*. Então,

$$\int t(t^2+1)^5\,dt = \frac{1}{2}\int (t^2+1)^5\,2tdt$$

$= \frac{1}{2}\int u^5 du$

$= \frac{1}{2}\frac{u^6}{2} + C$

$= \frac{u^6}{4} + C$

$= \frac{(t^2+1)^6}{4} + C$

**Exemplo 4.18 -** Determine $\int \frac{\ln x^2}{x} dx$.

**Solução:**

Faça u = ln$x^2$, logo, du = $\frac{2x}{x^2}dx$ e du = $\frac{2}{x}dx$

Logo, podemos escrever:

$\int \frac{\ln x^2}{x} dx = \int \ln x^2 \frac{1}{x} dx$

$= \frac{1}{2}\int \ln x^2 \frac{2}{x} dx$

$= \frac{1}{2}\int u du$

$= \frac{1}{2}\frac{u^2}{2} + C$

$= \frac{1}{4}(\ln x^2)^2 + C$

**Exemplo 4.19 -** Uma árvore foi transplantada e, *x* anos depois, está crescendo à razão de $1 + \frac{1}{(x+1)^2}$ metros / ano. Após dois anos, atingiu uma altura de 5 metros. Qual era a altura da árvore quando foi transplantada?

**Solução**

Seja C(x) o crescimento da planta, em metros, depois de x anos. Então,

C(x) = $\int 1 + \frac{1}{(x+1)^2} dx = \int 1 dx + \int \frac{1}{(x+1)^2} dx$

Faça u = x + 1, logo, du = dx e, assim,

$$C(x) = \int 1 + \frac{1}{(x+1)^2}\,dx = \int dx + \int \frac{1}{(x+1)^2}\,dx$$

$$= \int dx + \int \frac{1}{u^2}\,du$$

$$= x + \frac{u^{-1}}{-1} + C$$

$$= x - (x+1)^{-1} + C$$

$$= x - \frac{1}{x+1} + C$$

Segundo o enunciado C (2) = 5, daí

$$C(2) = 5 = 2 - \frac{1}{2+1} + C \quad \Rightarrow \quad C = 10/3$$

Portanto,

$$C(x) = x - \frac{1}{x+1} + \frac{10}{3}$$

A árvore foi transplantada quando x = 0. logo:

$$C(0) = 0 - \frac{1}{0+1} + \frac{10}{3} = \frac{10}{3} - 1 = \frac{7}{3} \approx 2,3$$

Isto é, a altura da árvore quando foi transplantada era de 2,3 metros.

## 5. Introdução ao estudo das equações diferenciais

De modo geral, uma *equação diferencial* é uma pergunta do tipo : “ Qual é a função cuja derivada satisfaz a seguinte relação”?. Ou seja, uma *equação diferencial* é uma equação (no sentido de igualdade envolvendo uma incógnita), onde a incógnita é uma função, sendo que as informações disponíveis para a determinação da função desconhecida envolvem sua(s) derivada(s). Já resolvemos algumas equações diferenciais em exemplos anteriores.

**Exemplo 4.20 -** Encontre a solução geral da equação diferencial $y'$ = 5.

**Solução:**

Escrevemos a derivada na forma diferencial

$\frac{dy}{dx} = 5 \quad \Rightarrow$ dy = 5 dx

Integramos ambos os membros

$\int dy = \int 5dx \quad \Rightarrow$ y = 5x + K que representa a solução geral da equação. Geometricamente (figura 4.2), são representadas por uma família de retas paralelas de inclinação igual a 5.

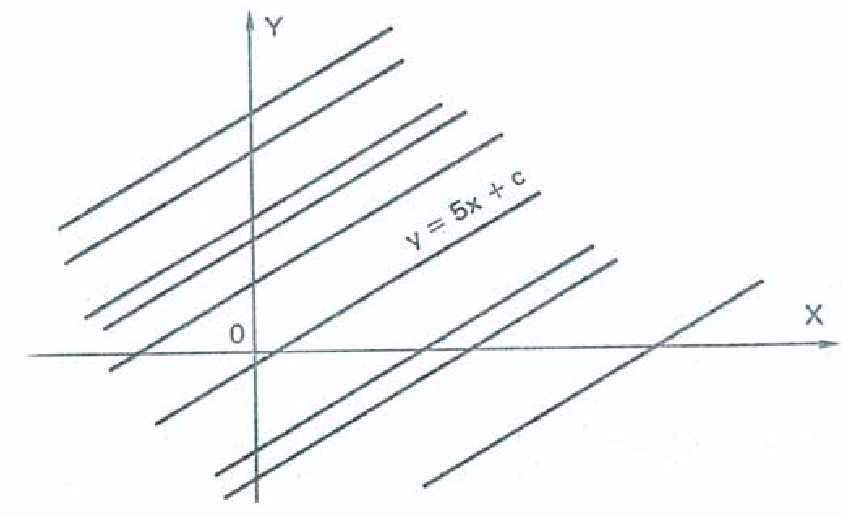



Figura 4.2.

**Exemplo 4.21 -** Dada a equação diferencial $\frac{dy}{dx} = 2x$.

a) encontre sua solução geral;

b) encontre sua solução quando y (0) = 3.

**Solução:**

a) Escrevendo na forma diferencial e integrando, temos:

$$\frac{dy}{dx} \Rightarrow dy = 2xdx \Rightarrow \int dy = \int 2xdx$$

$$y = \frac{2x^2}{2} + K$$

$$y = x^2 + K$$

$$y(x) = x^2 + K$$

b) Como y(0) = 3, vem que y(0) = $0^2$ + K = 3 $\Rightarrow k = 3$ e, portanto, a solução particular pedida é y(x) = $x^2$ + 3.

**Exemplo 4.22 -** Determine a solução particular da equação diferencial $\frac{dy}{dx}=e^{5x}$ que satisfaz a condição de contorno y(0) = 1.

**Solução:**

Escrevendo na forma diferencial

$$\frac{dy}{dx}=e^{5x}\Rightarrow dy=e^{5x}dx$$

e integrando

$$\int dy=\int e^{5x}dx$$

Veja exemplo 4.16 e conclua que,

y(x) = $\frac{1}{5}e^{5x}+C$

pela condição de contorno, vem

$$y(0)=1\Rightarrow y(0)=\frac{1}{5}e^{5(0)}+C=1 \qquad \Rightarrow \qquad C=\frac{4}{5}$$

E, portanto,

$$y(x)=\frac{1}{5}e^{5x}+\frac{4}{5}$$

Como queríamos.

## 6 Crescimento e decrescimento exponenciais

Em Biologia, Química e Economia é comum necessitar-se estudar o comportamento de uma quantidade que cresce enquanto passa o tempo. Se, em cada instante, a taxa de crescimento da quantidade é proporcional à quantidade naquele instante, então, dizemos que a quantidade *cresce exponencialmente* ou tem *crescimento exponencial*. Um exemplo simples de crescimento exponencial é dado pelo crescimento do número de bactérias numa cultura (veja capítulo1). Sob condições ideais de laboratório, uma cultura de bactérias cresce numa taxa proporcional ao número de bactérias existentes. Isto ocorre porque o crescimento da cultura é devido à divisão celular das células bacterianas. Quanto mais bactérias houver num determinado instante, maiores as possibilidades de divisão e, portanto, maior a taxa de crescimento.

Estudemos uma cultura de bactérias como exemplo típico de crescimento exponencial. Suponhamos que P(t) indique o número de bactérias numa certa cultura no tempo t. A taxa de crescimento da cultura no tempo t é

$P'(t)$. Consideremos que essa taxa de crescimento é proporcional ao tamanho da cultura no tempo t, assim

$$P'(t) = K.P(t),$$

onde K é uma constante de proporcionalidade positiva. Se fizermos y = P(t), então podemos escrever:

$$y' = Ky,$$

que é uma equação diferencial, e uma de suas soluções particulares é

$$y = P(t) = P_0e^{Kt},$$

onde $P_0$ é o número de bactérias na cultura no tempo t = 0.

**Exemplo 4.23 -** Resolva a equação diferencial $P'(t) = K.P(t)$.

**Solução:**

Fazendo y = P(t), vem

$$y' = Ky$$

Então:

$$\frac{dy}{dt} = ky$$

Separando as variáveis, temos:

$$\frac{dy}{dx} = kdt$$

Integrando os dois membros

$$\int \frac{1}{y}dy = \int kdt$$

$$\ln y = kt + C$$

Então:

$$y = e^{kt+C} = e^{kt}e^C$$

E, assim,

$$P(t) = e^{kt}\, e^C$$

Sendo $P_0$ o número de bactérias na cultura no tempo t = 0, segue-se que

$$P(0) = e^{k(0)}e^{C} = e^{C} \ ,$$

que nos permite, finalmente, escrever:

$$P(t) = P_0e^{kt}$$

**Exemplo 4.24 -** Suponha que uma certa cultura de bactérias cresce a uma taxa proporcional ao seu tamanho. No tempo t = 0, há aproximadamente 20.000 bactérias na cultura. Em 5 dias, há 400.000 bactérias. Elabore um modelo matemático para essa situação que expresse o tamanho da cultura como função do tempo, medido em dias.

**Solução:**

Seja P(t) o número de bactérias presentes no tempo t. Por definição, P(t) satisfaz a equação diferencial da forma $y'$ = Ky, então, P(t) tem a forma

$$P(t) = P_0e^{kt},$$

onde as constantes $P_0$ e K devem ser determinadas. Os valores de $P_0$ e K podem ser obtidos dos dados que informam o tamanho da população em dois tempos distintos.

Dissemos que

$$P(0) = 20.000 \text{ e } P(5) = 400.000.$$

A primeira condição implica imediatamente que $P_0$ = 20.000 e, assim,

$$P(t) = 20.000e^{kt}.$$

Usando a segunda condição, temos

$$20.000e^{5t} = P(5) = 400.000$$

$$e^{5k} = 20$$

Usando uma tabela da função $e^x$, busquemos um valor de x tal que $e^x$ seja aproximadamente 20. Reproduzimos parte de uma tabela desta.

| X | ex |
|---|---|
| . | . |
| . | . |
| . | . |
| 2,98 | 19,68782 |
| 2,99 | 19,88568 |
| 3,00 | 20,08554 |
| 3,01 | 20,28740 |
| . | . |
| . | . |

Quando x = 3,00, $e^x$ é muito próximo de 20. Então,

$$20 \approx e^{3,00}$$

Daí,

$$e^{5k} \approx e^{3,00}$$

Donde, $5k \approx 3,00$ e $k \approx 0,6$

Assim, podemos escrever, finalmente:

$$P(t) = 20.000e^{0,6t}$$

*Comentário:* Outra maneira de resolver a questão é usando logaritmos naturais. Veja,

$$e^{5k} = 20 \Rightarrow \ln e^{5k} = \ln 20 \Rightarrow 5k = \ln 20 \Rightarrow k = \frac{\ln 20}{5} \approx 0,6$$

**Exemplo 4.25 -** Encontre uma expressão que nos permita calcular o tempo necessário para que uma população duplique de valor.

**Solução:**

Temos $P(t) = P_0e^{kt}$. Sendo $P_0$ a população inicial, devemos encontrar t tal que $P(t) = 2P_0$ .

$$2P_0 = P_0e^{kt} \Rightarrow e^{kt} = 2 \Rightarrow \ln e^{kt} = \ln 2 \Rightarrow kt = \ln 2 \Rightarrow t = \frac{\ln 2}{k},$$

Onde k é a constante crescimento.

Os átomos de uma substância radioativa, como tório, urânio, plutônio etc, desintegram-se de maneira espontânea. A substância original vai se transformando, sucessivamente, através de uma cadeia de outras substâncias radioativas, até chegar a uma substância estável, que não mais sofre desintegração. Por exemplo, as cadeias de desintegração do plutônio e do urânio terminam no elemento chumbo, que é estável. Essa desintegração ou esse *decaimento radioativo* ocorre ao acaso; entretanto, dada a grande quantidade de átomos da substância, o número daqueles que se desintegram na unidade de tempo é proporcional ao número de átomos existentes a cada instante. Isto equivale a dizer que a massa radioativa M é uma função do tempo t com derivada proporcional à própria massa M = M(t), através de uma constante K, definindo a equação diferencial

$$\frac{dM}{dt} = -kM(t).$$

O sinal negativo que aí aparece se justifica porque a massa M diminui com o tempo, a partir de um valor inicial $M_0$ = M(0), em vez de aumentar, como no caso de populações. O fenômeno é parecido com o crescimento populacional, os átomos da substância radioativa desempenham o papel de indivíduos de uma população. Só que agora a transmutação dos átomos é comparável à morte dos indivíduos da população. Assim, em vez de crescimento, temos *decaimento radioativo*. A analogia com o crescimento populacional será completa se invertermos a direção do tempo, interpretando a massa M(t) como valor inicial num instante de tempo futuro t > 0, que evolui crescentemente para o valor final $M_0$. Assim, vale a mesma fórmula deduzida para o caso do crescimento populacional com M(t) em lugar de P(t) e $M_0$ em lugar de $P_0$, isto é,

$$M(t) = M_0e^{-kt}$$

**Exemplo 4.26 -** Defina a expressão meia-vida e interprete geometricamente.

**Solução:**

A meia-vida de um elemento radioativo é o espaço de tempo T requerido para uma dada quantidade desse elemento cair até metade de sua quantidade original. Assim, se a massa original é $M_0$, ela será $M_0/2$, $M_0/4$, $M_0/8$ etc. nos instantes T, 2T, 3t etc. (figura 4.3).

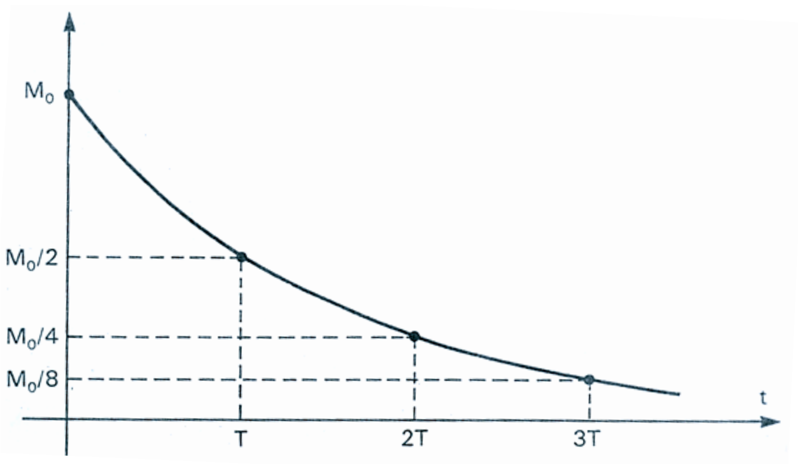



Figura 4.3.

**Exemplo 4.27 -** A constante de decaimento para o estrôncio-90 é $\lambda = 0{,}0244$, quando o tempo é medido em anos. Quanto tempo a quantidade $M_0$ de estrôncio demora para decair até metade do tamanho original?

**Solução:**

Temos:

$$M(t) = M_0e^{-kt} = M_0e^{-0{,}0244t}.$$

Façamos agora M(t) = $\frac{1}{2}M_0$ e resolvamos para t:

$$M_0e^{-0{,}0244t} = \frac{1}{2}M_0$$

$$e^{-0{,}0244t} = 0{,}5$$

Aplicando $ln$ em ambos os lados, temos:

$$\ln e^{-0{,}0244t} = \ln 0{,}5 \Rightarrow -0{,}0244t = -0{,}69 \Rightarrow t = \frac{-0{,}69}{-0{,}0244} \approx 28anos.$$

Portanto, $t \approx 28$ anos.

**Exemplo 4.28 -** Numa reação química, uma substância se decompõe a uma taxa proporcional à quantidade de substância presente a cada instante. Em 3 horas, a quantidade da substância fica reduzida à metade de sua massa original. Quanto restará da substância depois de 13 horas?

**Solução:**

Temos:

$$M(t) = M_0e^{-kt}$$

Segundo o enunciado, depois de 3 horas, a massa se reduz à metade, logo:

$$M(3) = \frac{1}{2}M_0 \Rightarrow M_0e^{-3k} = \frac{1}{2}M_0 \Rightarrow e^{-k} = 0{,}5$$

Aplicando $ln$ vem

$$\ln e^{-3k} = \ln 0{,}5 \Rightarrow -3k = \ln 0{,}5 \Rightarrow k \approx \frac{-0{,}6931}{-3} \approx 0{,}23$$

Daí:

$$M(t) = M_0e^{-0{,}23t}$$

Então,

$$M(13) = M_0 e^{-0,23(13)} = M_0 e^{-2,99} = 0,05M_0$$

Portanto, depois de 13 horas, restará 5% da massa original.

## Texto complementar

### Datação com carbono 14

O conhecimento do decaimento radioativo é valioso para os cientistas que desejam calcular a idade de objetos pertencentes às civilizações antigas. Várias substâncias são úteis para as técnicas de datação radioativa, a mais comum é o carbono 14 ($C^{14}$). O $C^{14}$ é produzido na atmosfera superior quando os raios cósmicos reagem com o nitrogênio atmosférico. Como o $C^{14}$ eventualmente decai, a concentração de $C^{14}$ não pode ultrapassar certos níveis. Um equilíbrio é atingido quando $C^{14}$ é produzido na mesma taxa que decai. Os cientistas consideram, geralmente, que a quantidade total de $C^{14}$ na biosfera permaneceu constante durante os últimos 50.000 anos. Consequentemente, pressupõe-se que a razão de $C^{14}$ para o carbono não radioativo (estável), comum 12 ($C^{12}$), foi constante durante o mesmo período (a razão é de 1 parte de $C^{14}$ para $10^{12}$ partes de $C^{12}$). Tanto o $C^{14}$ quanto o $C^{12}$ estão na forma de dióxido de carbono na atmosfera. Toda vegetação viva e a maior parte das formas de vida animal contêm $C^{12}$ e $C^{14}$ na mesma proporção que na atmosfera. A razão é que as plantas absorvem dióxido de carbono durante a fotossíntese. O $C^{12}$ e o $C^{14}$ são distribuídos através de várias cadeias alimentares a quase toda vida animal. Quando um organismo morre, deixa de substituir seu carbono e, portanto, a quantidade de $C^{14}$ começa a decrescer através do decaimento radioativo (o $C^{12}$, num organismo, permanece constante). Pode-se comparar a razão de $C_{14} / C_{12}$, a fim de determinar quando o organismo morreu. Figura 4.4). (GOLDSTEIN *et al.*, 1981).

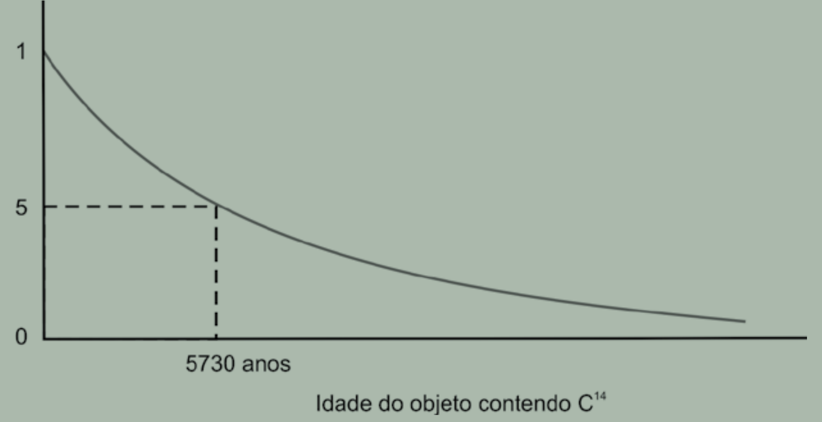



Figura 4.4

Os exemplos seguintes podem esclarecer a questão:

**Exemplo A -** O carbono 14 tem uma meia-vida de cerca de 5730 anos. Determine sua constante de decaimento.

**Solução:** Se $P_0$ indica a quantidade inicial de $C^{14}$, então, a quantidade, após t anos, será $P(t) = P_0e^{-kt}$. Após 5730 anos, P(t) será igual a ½ $P_0$. Isto é,

$$P_0e^{-k(5730)} = P(5730) = \frac{1}{2}P_0 = 0{,}5P_0$$

Resolvendo para k, temos

$$e^{-5730k} = 0{,}5 \approx e^{-0{,}69} \quad \text{(das tabelas do apêndice)}$$

5730k ≈ 0,69

Finalmente, encontramos k ≈ 0,00012

**Exemplo B -** Um fragmento de pergaminho foi descoberto e tinha uma razão $C^{14}$ / $C^{12}$ de 0,8 vezes a razão encontrada atualmente na matéria viva. Calcule a idade do pergaminho.

**Solução***:* Consideramos que a razão original $C^{14}$ / $C^{12}$ no pergaminho era a mesma que nos organismos vivos atualmente. Consequentemente, cerca de 8 décimos do $C^{14}$ original permanece. Do exemplo A, obtemos a fórmula para a quantidade de $C^{14}$ presente t anos após o pergaminho ter sido feito de uma pele de animal:

$$P(t) = P_0e^{-0{,}00012t}$$

Onde $P_0$ é a quantidade inicial. Queremos determinar t, tal que $P(t) = 0{,}8\ P_0$.

$$P_0e^{-0{,}00012t} = 0{,}8P_0$$

$$e^{-0{,}00012t} = 0{,}8 \approx e^{-0{,}2}$$

$$0{,}00012t \approx 0{,}22$$

$$t \approx 1.833 \text{ anos}$$

## Síntese da Capítulo

Neste capítulo, introduzimos o conceito de antidiferenciação, definindo a integral indefinida como uma família de funções que têm a mesma derivada. Foram apresentadas algumas propriedades da integral indefinida que depois foram usadas na resolução de equações diferenciais elementares. Finalmente, as ideias de crescimento exponencial e de decaimento radioativo foram discutidas como equações diferenciais cujas soluções nos remeteram às equações já usadas no capítulo 1:

$$P(t) = P_0e^{kt} \quad \text{ou} \quad M(t) = M_0e^{-kt}.$$

## Atividades de avaliação

**1.** Verifique que $F(x) = \frac{x^3}{3} + 5x + 2$ é uma antiderivada de f(x) = $x^2$ + 5.

**2.** Verifique que $F(x) = \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} + 1$ é uma antiderivada de $f(x) = \sqrt{x}$ .

**3.** Interprete geometricamente a família de antiderivadas de f(x) = 2x.

**4.** Calcule as seguintes integrais:

(a) $\int x^{-2} dx$ ; (b) $\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ .

**5.** Integre a função f(x) = 5.

**6.** Calcule as seguintes integrais:

a) $\int 2x^2 dx$ ; b) $\int 7\sqrt{x} dx$ .

**7.** Calcular as integrais:

a) $\int 3x^4 dx$ ; b) $\int (3 - 2t + t^2) dt$ ;

c) $\int (x^4 + \frac{1}{4}x^2 + 1) dx$ ; d) $\int (x^2 - \frac{1}{7}x + 4) dx$ .

**8.** Calcule a integral $\int (\frac{1}{2y} - \frac{2}{y^2} + \frac{3}{\sqrt{y}}) dy$ .

**9.** Calcule a integral $\int (\frac{e^x}{2} + x\sqrt{x}) dx$ .

**10.** Um botânico descobre que certo tipo de árvore cresce de tal forma que sua altura $h$(t), após t anos, está variando a uma taxa de $h'$(t) = 0,06$t^{2/3}$ + 0,3$t^{1/2}$ metros / ano. Se a árvore tinha 60 cm de altura quando foi plantada, que altura terá após 27 anos?

**11.** Estima-se que, daqui a *t* meses, a população de certa cidade estará aumentando à razão de 4 + 5$t^{2/3}$ habitantes por mês. Se a população atual é de 10.000 habitantes, qual será a população daqui a 8 meses?

**12.** Um estudo ambiental, realizado em certa cidade, revela que, daqui a *t* anos, o índice de monóxido de carbono no ar estará aumentando à razão de 0,1t + 0,1 ppm / ano. Se o índice atual de monóxido de carbono no ar é de 3,4 ppm, qual será o índice daqui a 3 anos ?

**13.** Estima-se que, daqui a t anos, a população de certo país estará aumentando à razão de $e^{0,02t}$ milhões de habitantes / ano. Se a população atual é de 50 milhões de habitantes, qual será a população daqui a 10 anos?

**14.** Um ecologista observa que a população $P(t)$ de uma espécie ameaçada de extinção está aumentando à razão $P'(t) = 0{,}51e^{-0{,}03t}$ animais por ano, onde t é o número de anos após começarem a ser feitos os registros. Se, no ano em que começaram a ser feitos os registros, a população era de 500 animais, qual será a população 10 anos mais tarde?

**15.** Determine: a) $\int \frac{1}{x \ln x} dx$; b) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$.

**16.** Encontre as soluções que satisfaçam às condições iniciais dadas:

a) $\begin{cases} m'(t) = 4 \\ m(0) = 100 \end{cases}$; b) $\begin{cases} v'(t) = 3t + 1 \\ v(0) = 50 \end{cases}$.

**17.** Encontre soluções para as equações:

a) $y''(x) = 5$; b) $y''(x) = 6x$.

**18.** Determine a função f(x) cuja tangente tem uma inclinação $3x^2 + 1$ para qualquer valor de x e cuja curva passa por (2,6).

**19.** Suponha que uma colônia de moscas da fruta cresce segundo a lei exponencial $P(t) = P_0e^{kt}$ e suponha, também, que o tamanho da cultura duplique em 12 dias. Determine a constante de crescimento.

**20.** Numa certa cultura de bactérias, o número delas triplica a cada 30 minutos. Calcule o tempo de duplicação desta colônia.

**21.** A quantidade remanescente de uma certa substância radioativa, após t anos , é dada pela função $Q(t) = Q_0e^{-0{,}003t}$ . Calcule o período de meia-vida da substância.

**22.** O rádio decai exponencialmente. Sua meia-vida é de 1690 anos. Quanto tempo levará para uma amostra de 50 g de rádio se reduzir a 5 g?

**23.** O potássio radioativo tem meia-vida de $1{,}3 \times 10^{19}$ anos. Determine sua constante de decaimento.

**24.** Se vacas leiteiras comerem feno contendo muito iodo 131, seu leite não poderá ser ingerido. Suponha que determinada quantidade de feno contenha 10 vezes o nível máximo admissível de iodo 131. Quantos dias deve-se guardar o feno antes de dá-lo para as vacas leiteiras? (dado: meia-vida do iodo 131 é de 8 dias)

**25.** Uma seca, numa estepe africana, causa a morte de grande parte da população animal. Um rebanho típico de animais selvagens tem uma taxa de morte proporcional ao seu tamanho.O rebanho conta com 500 animais no início da seca das quais apenas 200 permanecem 4 meses após.

a) Determine a fórmula para a população do rebanho em t meses;

b) Quanto decorrerá para que o rebanho em questão se reduza a 0,1 de sua população inicial?

**26.** Determine $\int \frac{1}{x+1} dx$.

**27.** Determine $\int \frac{x^2+1}{x^3+3x+2} dx$.

**28.** Um estudante de Medicina, observando o aumento do número de bactérias em certa cultura, construiu a seguinte tabela:

Tabela1

| Número de bactérias de uma cultura, como função do tempo (min) | | |
|---|---|---|
| **Número de minutos** | 0 | 20 |
| **Número de bactérias** | 6.000 | 9.000 |

Use estes dados para encontrar uma função exponencial da forma $Q(t) = Q_0e^{kt}$, que expressa o número de bactérias da cultura como função do tempo.

**29.** A população mundial cresce a uma taxa aproximada de 2% ao ano. Isto significa que, se a taxa de crescimento permanecer constante, daqui a t anos, será dada por $P(t) = P_0e^{0,02t}$ , onde $P_0$ é a população atual. Se este modelo de crescimento da população estiver correto, quanto tempo levará para a população mundial duplicar?

## Referências

AGUIAR, A . F . A,; XAVIER, A.F.S.; RODRIGUES, J.E.M. **Cálculo para ciências médicas e biológicas**. São Paulo: Editora Harbra, 1998. 351 p.

BATSCHELET, E. **Introdução à matemática para biocientistas**. Rio de Janeiro: Interciência, 1978. 595 p.

SWOKOWSKI, E.W. **Cálculo com geometria analítica**. São Paulo : Makron Books, v.1, 1994.744p.

WHIPKEY, K.L.; WHIPKEY, M.N. **Cálculo e suas múltiplas aplicações**.Rio de Janeiro: Editora Campus, 3ª ed., 1982, 420p.

GOLDSTEIN, L. J., LAY, D. C., SCHNEIDER, D. I. **Cálculo e suas aplicações**. São Paulo:Editora Hemus , 1981. 521 p.

HOFFMANN, L. Cálculo : **Um curso moderno e suas aplicações**. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1980, 382 p.

HOFFMANN, L.; BRADLEY, G.L. **Cálculo : Um curso moderno e suas aplicações.** Rio de janeiro: Livros técnicos e científicos, 1980. 382 p.

MACHADO, N. J. **Matemática por assunto:noções de cálculo**. v.9. São Paulo:Editora Scipione, 1988.192 p.

SWOKOWSKI, E. W. **Cálculo com geometria analítica**. São Paulo: Makron Books. 1994, v.1. 744 p.

WHIPKEY, K. L.; WHIPKEY, M. N. **Cálculo e suas múltiplas aplicações**. 3ª ed. Rio de Janeiro: Editora Campus, 1982. 420 p.

## Sobre os autores

**Genário Sobreira Santiago:** Bacharel em Medicina veterinária (UECE - 1985); Licenciado em Matemática (UECE - 2007); Mestre em Zootecnia (UFMG - 1990); Doutor em Ciência Animal (UFMG - 2001) e atualmente é Professor Adjunto da UECE.

**Rui Eduardo Brasileiro Paiva:** Licenciado em Matemática (UECE - 2007); Especialista em Ensino de Matemática (UECE - 2009) e atualmente é Professor do Curso de Matemática da UECE.

Ciências Biológicas

Fiel a sua missão de interiorizar o ensino superior no estado Ceará, a UECE, como uma instituição que participa do Sistema Universidade Aberta do Brasil, vem ampliando a oferta de cursos de graduação e pós-graduação na modalidade de educação a distância, e gerando experiências e possibilidades inovadoras com uso das novas plataformas tecnológicas decorrentes da popularização da internet, funcionamento do cinturão digital e massificação dos computadores pessoais.

Comprometida com a formação de professores em todos os níveis e a qualificação dos servidores públicos para bem servir ao Estado, os cursos da UAB/UECE atendem aos padrões de qualidade estabelecidos pelos normativos legais do Governo Federal e se articulam com as demandas de desenvolvimento das regiões do Ceará.

ISBN 978-85-78263-52-2

Universidade Estadual do Ceará

UAB Universidade Aberta do Brasil

CAPES