

Universidade Virtual Africana

INFORMÁTICA APLICADA: MAT 1303

ÁLGEBRA LINEAR

João Carlos Lopes Horta

Prefácio

A Universidade Virtual Africana (AVU) orgulha-se de participar do aumento do acesso à educação nos países africanos através da produção de materiais de aprendizagem de qualidade. Também estamos orgulhosos de contribuir com o conhecimento global, pois nossos Recursos Educacionais Abertos são acessados principalmente de fora do continente africano.

Este módulo foi desenvolvido como parte de um diploma e programa de graduação em Ciências da Computação Aplicada, em colaboração com 18 instituições parceiras africanas de 16 países. Um total de 156 módulos foram desenvolvidos ou traduzidos para garantir disponibilidade em inglês, francês e português. Esses módulos também foram disponibilizados como recursos de educação aberta (OER) em oer.avu.org.

Em nome da Universidade Virtual Africana e nosso patrono, nossas instituições parceiras, o Banco Africano de Desenvolvimento, convido você a usar este módulo em sua instituição, para sua própria educação, compartilhá-lo o mais amplamente possível e participar ativamente da AVU Comunidades de prática de seu interesse. Estamos empenhados em estar na linha de frente do desenvolvimento e compartilhamento de recursos educacionais abertos.

A Universidade Virtual Africana (UVA) é uma Organização Pan-Africana Intergovernamental criada por carta com o mandato de aumentar significativamente o acesso a educação e treinamento superior de qualidade através do uso inovador de tecnologias de comunicação de informação. Uma Carta, que estabelece a UVA como Organização Intergovernamental, foi assinada até agora por dezenove (19) Governos Africanos - Quênia, Senegal, Mauritânia, Mali, Costa do Marfim, Tanzânia, Moçambique, República Democrática do Congo, Benin, Gana, República da Guiné, Burkina Faso, Níger, Sudão do Sul, Sudão, Gâmbia, Guiné-Bissau, Etiópia e Cabo Verde.

As seguintes instituições participaram do Programa de Informática Aplicada: (1) Université d'Abomey Calavi em Benin; (2) Université de Ougadougou em Burkina Faso; (3) Université Lumière de Bujumbura no Burundi; (4) Universidade de Douala nos Camarões; (5) Universidade de Nouakchott na Mauritânia; (6) Université Gaston Berger no Senegal; (7) Universidade das Ciências, Técnicas e Tecnologias de Bamako no Mali (8) Instituto de Administração e Administração Pública do Gana; (9) Universidade de Ciência e Tecnologia Kwame Nkrumah em Gana; (10) Universidade Kenyatta no Quênia; (11) Universidade Egerton no Quênia; (12) Universidade de Addis Abeba na Etiópia (13) Universidade do Ruanda; (14) Universidade de Dar es Salaam na Tanzânia; (15) Université Abdou Moumouni de Niamey no Níger; (16) Université Cheikh Anta Diop no Senegal; (17) Universidade Pedagógica em Moçambique; E (18) A Universidade da Gâmbia na Gâmbia.

Bakary Diallo

O Reitor

Universidade Virtual Africana

Créditos de Produção

Autor

João Carlos Lopes Horta

Par revisor(a)

Florence Tushabe

UVA - Coordenação Académica

Dr. Marilena Cabral

Coordenador Geral Programa de Informática Aplicada

Prof Tim Mwololo Waema

Coordenador do módulo

Victor Odumuyiwa

Designers Instrucionais

Elizabeth Mbasu

Benta Ochola

Diana Tuel

Equipa Multimédia

Sidney McGregor

Michal Abigael Koyier

Barry Savala

Mercy Tabi Ojwang

Edwin Kiprono

Josiah Mutsogu

Kelvin Muriithi

Kefa Murimi

Victor Oluoch Otieno

Gerisson Mulongo

Direitos de Autor

Este documento é publicado sob as condições do Creative Commons

[Http://en.wikipedia.org/wiki/Creative_Commons](http://en.wikipedia.org/wiki/Creative_Commons)

Atribuição <http://creativecommons.org/licenses/by/2.5/>



O Modelo do Módulo é copyright da Universidade Virtual Africana, licenciado sob uma licença Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 International. CC-BY, SA

Apoiado por



Projeto Multinacional II da UVA financiado pelo Banco Africano de Desenvolvimento.

Índice

Prefácio	2
Créditos de Produção	3
Direitos de Autor	4
Supporté par	4
Descrição Geral do Curso	9
Pré-requisitos	9
Materiais.	9
Objetivos do Curso	9
Unidades.	10
Avaliação.	10
Calendarização.	11
Unidade 0. Diagnóstico	16
Introdução à Unidade	16
Objetivos da Unidade	16
Avaliação da Unidade	17
Instruções	17
Critérios de Avaliação	17
Avaliação	18
Leituras e Outros Recursos	18
Unidade 1. Sistema de equações lineares. Matriz e determinante	20
Introdução à Unidade	20
Objetivos da Unidade	20
Termos-chave	20
Actividades de Aprendizagem.	21
Actividade 1 – Matriz e suas operações.	21
Introdução	21
Detalhes da actividade.	21
Termos-chave	21

Evaluation	27
Avaliação	27
Actividade 2 – Redução de uma matriz à forma escalonada. Sistema de equações lineares	28
Introdução	28
Detalhes da actividade	28
Evaluation	41
Actividade 3 – Determinante e suas aplicações. Matriz regular.	42
Introdução	42
Detalhes da actividade	42
Evaluation.	53
Avaliação	53
Actividade 4 – O Software SCILAB: aplicação na Álgebra Linear.	54
Introdução	54
Detalhes da actividade	55
Avaliação.	61
Avaliação da Unidade	61
Instruções	61
Critérios de Avaliação	61
Resumo da Unidade.	61
Avaliação	62
Leituras e outros Recursos.	63
Unidade 2. Espaço e Subespaço Vectorial Real	64
Introdução à Unidade	64
Objetivos da Unidade	64
Termos-chave	64
Actividades de Aprendizagem	65
Actividade 1 – Espaços vectoriais reais: definição e propriedades; base e dimensão	65
Introdução	65

Detalhes da actividade.	66
Avaliação.	75
Actividade 2 – Subespaço vectorial: definição e propriedades; operações	76
Introdução	76
Detalhes da actividade	76
Avaliação.	85
Actividade 3 – Espaço vectorial real com produto interno.	85
Introdução	85
Detalhes da actividade	86
Avaliação.	104
Resumo da Unidade	105
Avaliação da Unidade	106
Instruções	106
Critérios de Avaliação	106
Avaliação	106
Leituras e outros Recursos.	107
Unidade 3. Aplicação linear	108
Introdução à Unidade	108
Objetivos da Unidade	108
Termos-chave	108
Actividades de Aprendizagem.	109
Actividade 1 – Aplicação Linear: núcleo e imagem.	109
Introdução	109
Detalhes da actividade.	109
Avaliação.	115
Actividade 2 – Matriz de uma aplicação linear. Operações com aplicação linear.	116
Introdução	116
Detalhes da actividade	116
Avaliação.	126
Actividade 3 – Adjunta de uma aplicação linear - Endomorfismo adjunto.	

Endomorfismo ortogonal.	126
Introdução	126
Detalhes da atividade	126
Avaliação.	133
Resumo da Unidade.	133
Avaliação da Unidade	134
Instruções	134
Critérios de Avaliação	134
Avaliação	134
Leituras e outros Recursos.	134
Unidade 4. Diagonalização de endomorfismo [matriz]. Forma quadrática	136
Introdução à Unidade	136
Objetivos da Unidade	136
Termos-chave	136
Actividades de Aprendizagem	138
Actividade 1 - Vector próprio, associado a um valor próprio, num endomorfismo	138
Introdução	138
Detalhes da actividade.	138
Avaliação.	143
Actividade 2 - Endomorfismo diagonalizável e matriz diagonalizável.	143
Introdução	143
Detalhes da atividade	143
Avaliação.	147
Actividade 3 - Formas bilineares.	147
Introdução	147
Detalhes da atividade	147
Avaliação.	149
Resumo da Unidade.	149

Avaliação da Unidade	150
Instruções	150
Critérios de Avaliação	150
Avaliação	150
Leituras e outros Recursos.151
Avaliação do Curso.151
Instruções	151
Critérios de avaliação	151
Avaliação	151
Referências do Curso	152

Descrição Geral do Curso

Bem-vindo (a) a Álgebra Linear

A Álgebra Linear constitui um dos sectores da Matemática com mais vastas e variadas aplicações. O cálculo matricial, o cálculo vectorial, as aplicações lineares e o cálculo de valores e vectores próprios de um endomorfismo têm grande aplicação nos diversos ramos de conhecimentos, particularmente no ramo de informática. Para além disto, os seus conceitos e desenvolvimentos se prestam às mais variadas interpretações e aos mais diversificados usos.

Pré-requisitos

- Cálculo Aplicado à Computação;
- Somatório – símbolo e propriedades

Materiais

Os materiais necessários para completar este curso incluem:

- HOWARD, A., RORRES C., Álgebra linear com aplicações, Bookman, Porto Alegre, 8. Ed., 2001;
- LIPSCHUTZ, S., Álgebra Linear – teoria e problemas, McGraw-Hill, São Paulo, 2. ed., 1994.
- MONTEIRO A., Álgebra Linear e Geometria Analítica, McGraw-Hill L.da, Lisboa, 2001.
- NICHOLSON, W. K., Álgebra Linear, McGraw-Hill, São Paulo, 3. ed., 2006.

Objetivos do Curso

Após concluir este curso, o(a) aluno(a) deve ser capaz de:

- Calcular com matrizes;
- Determinar o valor do determinante de uma matriz;
- Resolver sistema de equações lineares;
- Identificar espaços vectoriais reais;
- Operar com vectores num espaço vectorial;
- Identificar uma aplicação linear;
- Operar com aplicações lineares;
- Determinar valores e vectores próprios de um endomorfismo (matriz);
- Identificar endomorfismo (matriz) diagonalizável.

Unidades

Unidade 0: Diagnóstico

Estuda-se as propriedades de um corpo e analisa-se o corpo dos números reais. O Introduce-se o símbolo de somatório e faz-se a análise das suas propriedades.

Unidade 1: Sistema de equações lineares. Matriz e determinante.

Resolve-se sistemas de equações lineares (SEL) aplicando o método de eliminação de Gauss. Adiciona-se, multiplica-se e identifica-se alguns tipos de matrizes. Identifica-se matrizes invertíveis e calcula-se as respectivas inversas. Faz-se a representação matricial de SEL e, conseqüentemente, a sua resolução por via matricial. Calcula-se determinante de uma matriz.

Introduce-se o software SCILAB, software gratuito, com funções que podem ser aplicados na resolução de problemas da Álgebra Linear.

Unidade 2: Espaço Vectorial Real.

Introduce-se os conceitos do espaço e do subespaço vectorial, sobre o corpo dos números reais. Determina-se a base e a dimensão de espaços vectoriais de dimensões finitas. Introduce-se o conceito de produto interno e estuda-se espaços vectoriais de dimensões finitas com produto interno.

Unidade 3: Aplicações lineares

Introduce-se o conceito de aplicação linear e identifica-se um isomorfismo. Relaciona-se as diversas matrizes de uma aplicação linear e determina-se a matriz de mudança de base. Define-se matrizes equivalentes e semelhantes, matriz ortogonal.

Unidade 4: Diagonalização de endomorfismo e de matriz. Forma quadrática.

Introduce-se os conceitos de vector próprio associado a um valor próprio, endomorfismo diagonalizável, matrizes semelhantes e matriz diagonalizável. Estuda-se os endomorfismos adjuntos e diagonaliza-se matrizes simétricas. Estuda-se as formas bilineares, com destaque para as formas quadráticas.

Avaliação

Em cada unidade encontram-se incluídos instrumentos de avaliação formativa a fim de verificar o progresso do(a)s aluno(a)s.

No final de cada módulo são apresentados instrumentos de avaliação sumativa, tais como testes e trabalhos finais, que compreendem os conhecimentos e as competências estudadas no módulo.

A implementação dos instrumentos de avaliação sumativa fica ao critério da instituição que oferece o curso. A estratégia de avaliação sugerida é a seguinte:

1	Avaliação formativa	20%
2	Avaliação sumativa I	40%
3	Avaliação sumativa II	40%

Calendarização

Unidade	Temas e Atividades	Estimativa do tempo
	Matriz: matriz quadrada (triangular, diagonal, escalar e identidade); transposta de uma matriz e propriedades (matriz simétrica e anti-simétrica); soma e multiplicação de matrizes e propriedades; multiplicação de uma matriz por um escalar e propriedades; operações elementares (sobre linha e sobre coluna); matriz na forma escalonada e característica de uma matriz;	
	Sistema de equações lineares: representação matricial; classificação quanto às soluções; sistemas equivalentes e resolução de sistemas;	
	Matriz regular: critérios de matriz regular; cálculo de inversa de uma matriz regular;	

Descrição Geral do Curso

Sistema de equações lineares. Matriz e determinante	Determinante de uma matriz quadrada: Teorema de Laplace no cálculo de determinante; aplicação de operações elementares sobre linhas no cálculo de determinante; propriedades de determinantes; determinante e inversa de uma matriz; sistema de Cramer.	25 horas
	SCILAB: algumas operações com matrizes, úteis para resoluções de problemas na Álgebra Linear.;	
Espaço vectorial real	Espaço vectorial real: espaço vectorial arbitrário e propriedades; espaço vectorial	35 horas
	e espaço vectorial de polinómios; combinação linear de vectores; sistemas de vectores equivalentes e propriedades; gerador de um espaço; dependência e independência linear e propriedades; característica de uma matriz e independência linear de vectores linhas e colunas de uma matriz; subsistema independente maximal e característica de um sistema de vectores; Teorema de Steinitz e suas consequências; base e dimensão de um espaço vectorial; base canónica do espaço vectorial e do espaço vectorial de polinómios.	
	Subespaço vectorial: subespaço vectorial de espaço de dimensão finita; soma, intersecção, soma directa e reunião de subespaços; subespaços complementares, operações com vectores,	
	Espaço vectorial com produto interno: produto interno e norma (suas propriedades); produto interno em espaço de dimensão finita e matriz da métrica; vectores ortogonais; projecção ortogonal; componentes de um vector em relação à um sistema de vectores ortogonais; base ortonormada e processo de ortonormalização de Gram-Schmidt; complemento ortogonal de um subespaço vectorial; produto externo em espaço tridimensional (caso particular de	

Aplicações lineares	Aplicação linear: propriedades; classificação (endomorfismo; monomorfismo; epimorfismo; isomorfismo e automorfismo); núcleo e nulidade; imagem e característica;	30 horas
	Matriz de uma aplicação linear: cálculo de matriz de uma aplicação linear (matriz mudança de bases); operações com aplicações lineares relacionadas com as matrizes que as representam; relações entre matrizes de uma aplicação linear; matrizes equivalentes e matrizes semelhantes;	
	Adjunta de uma aplicação linear: definição e propriedades;	
	Endomorfismos adjuntos: propriedades; relação entre matrizes de endomorfismos adjuntos; matriz de um endomorfismo auto-adjunto.	
	Endomorfismo ortogonal: definição e propriedades; matriz de um endomorfismo ortogonal.	
Diagonalização de endomorfismo e de matriz. Forma quadrática	Endomorfismo diagonalizável e matriz diagonalizável: relação entre endomorfismo diagonalizável e matriz diagonalizável de um endomorfismo; cálculo de potências, de expoente natural, de matriz diagonalizável.	30 horas
	Vector próprio, associado a um valor próprio, num endomorfismo: cálculo de valores próprios e respectivos vectores próprios; subespaço próprio associado a um valor próprio; multiplicidade geométrica e multiplicidade algébrica de um valor próprio; critérios de endomorfismo diagonalizável;	
	Diagonalização de endomorfismo auto-adjunto e diagonalização de matriz simétrica.	
	Formas bilineares: matriz da forma bilinear; formas quadráticas.	
Enumerar (identificar unidades)		
Indicar horas por actividades		
Novo acordo? Se sim, devia ser vetorial		

Leituras e outros Recursos

As leituras e outros recursos deste curso são:

Unidade 0

Leituras e outros recursos obrigatórios:

- FERNANDES, R. L. & RICOU, M.. Introdução à álgebra. Lisboa: IST Press. 2004.

Unidade 1

Leituras e outros recursos obrigatórios:

- HOWARD,A., RORRES C., Álgebra linear com aplicações, Bookman, Porto Alegre, 8. Ed., 2001;
- LIPSCHUTZ, S., Álgebra Linear – teoria e problemas, McGraw-Hill, São Paulo, 2. ed., 1994.

Unidade 2

Leituras e outros recursos obrigatórios:

- MONTEIRO A., Álgebra Linear e Geometria Analítica, McGraw-Hill L.da, Lisboa, 2001.
- HOWARD,A., RORRES C., Álgebra linear com aplicações, Bookman, Porto Alegre, 8. Ed., 2001.

Leituras e outros recursos opcionais:

- NICHOLSON, W. K., Álgebra Linear, McGraw-Hill, São Paulo, 3. ed., 2006.
- LIPSCHUTZ, S., Álgebra Linear – teoria e problemas, McGraw-Hill, São Paulo, 2. ed., 1994.

Unidade 3

Leituras e outros recursos obrigatórios:

- MONTEIRO A., Álgebra Linear e Geometria Analítica, McGraw-Hill L.da, Lisboa, 2001.
- HOWARD,A., RORRES C., Álgebra linear com aplicações, Bookman, Porto Alegre, 8. Ed., 2001.

Leituras e outros recursos opcionais:

- NICHOLSON, W. K., Álgebra Linear, McGraw-Hill, São Paulo, 3. ed., 2006.
- LIPSCHUTZ, S., Álgebra Linear – teoria e problemas, McGraw-Hill, São Paulo, 2. ed., 1994.

Unidade 4

Leituras e outros recursos obrigatórios:

- MONTEIRO A., Álgebra Linear e Geometria Analítica, McGraw-Hill L.da, Lisboa, 2001.
- HOWARD, A., RORRES C., Álgebra linear com aplicações, Bookman, Porto Alegre, 8. Ed., 2001.

Leituras e outros recursos opcionais:

- NICHOLSON, W. K., Álgebra Linear, McGraw-Hill, São Paulo, 3. ed., 2006.
- LIPSCHUTZ, S., Álgebra Linear – teoria e problemas, McGraw-Hill, São Paulo, 2. ed., 1994.

Unidade 0. Diagnóstico

Introdução à Unidade

O propósito desta unidade é verificar a compreensão dos conhecimentos que possui relacionados com este curso.

Objetivos da Unidade

Após a conclusão desta unidade, deverá ser capaz de:

- Verificar se uma operação definida num conjunto é ou não uma operação binária.
- Verificar se uma determinada estrutura é ou não um corpo.
- Caracterizar o corpo dos números reais.
- Determinar o valor de uma expressão com somatório.
- Representar uma soma utilizando o símbolo de somatório.

Termos-chave

Operação binária: seja S um conjunto diferente do conjunto vazio. Diz-se que $*$ é uma operação binária em S , se para quaisquer $a, b \in S$, tem-se $a * b \in S$.

Grupo: seja $*$ uma operação binária num conjunto $G \neq \emptyset$. Diz-se que $(G, *)$ é um grupo se:

$\forall a, b, c \in G$, tem-se $a * (b * c) = (a * b) * c$ (associatividade de $*$)

$\exists e \in G$ tal que $\forall a \in G$, $a * e = e * a = a$ (existência de elemento neutro para $*$)

$\forall a \in G \exists b \in G$, tal que $a * b = b * a = e$ (todo elemento tem inverso, ou simétrico, em relação à $*$)

Se para além disso, $\forall a, b \in G$ tem-se $a * b = b * a$ (comutatividade de $*$), diz-se que o grupo é comutativo.

Anel: Sejam $+$ e \cdot duas operações binárias arbitrárias num conjunto $A \neq \emptyset$. Diz-se que $(A, +, \cdot)$ é um anel se:

$(A, +)$ é um grupo comutativo

$\forall a, b, c \in A$, tem-se $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ (associatividade de \cdot)

$\forall a, b, c \in A$, tem-se

$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ e $(b + c) \cdot a = (b \cdot a) + (c \cdot a)$

(distributividade de \cdot em relação à $+$).

Se num anel $(A, +, \cdot)$, $\forall a, b \in A$ tem-se $a \cdot b = b \cdot a$ (comutatividade de \cdot), o anel diz-se comutativo.

Se num anel $(A, +, \cdot)$, $\exists e' \in A$ tal que $\forall a \in A$ tem-se $a \cdot e' = e' \cdot a = a$ (existência de elemento neutro para \cdot), o anel diz-se unitário.

Num anel $(A, +, \cdot)$ o elemento neutro em relação à $+$ diz-se zero do anel, e representa-se por 0 .

Num anel unitário o elemento neutro em relação à \cdot diz-se unidade do anel, e representa-se por 1 .

Corpo: um corpo $(C, +, \cdot)$ é um anel comutativo e unitário, em que todo elemento de C diferente do zero do anel tem inverso (ou simétrico) em relação à \cdot , isto é, $\forall a \in C$ e $a \neq 0 \exists b \in A$ tal que $a \cdot b = b \cdot a = 1$.

O símbolo de somatório: Seja $a_i, i \in \mathbb{N}_0$, uma sequência de números reais. Para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}_0$ e $m \leq n$ o símbolo

$$\sum_{i=m}^n a_i = a_m + a_{(m+1)} + \dots + a_n .$$

A variável i diz-se índice do somatório e pode ser substituída por qualquer outra variável. m e n são, respectivamente, limite inferior e limite superior do somatório.

Propriedades:

Propriedade aditiva

$$\sum_{i=m}^n (a_i + b_i) = \sum_{i=m}^n a_i + \sum_{i=m}^n b_i$$

Propriedade homogénea

$$\sum_{i=m}^n [ca_i] = c \sum_{i=m}^n a_i$$

Propriedade Telescópica

$$\sum_{i=m}^n (a_k - a_{(k+1)}) = a_m - a_{(n+1)}$$

Somatório de uma constante

$$\sum_{i=m}^n c = (n-m+1)c$$

Avaliação da Unidade

Verifique a sua compreensão!

Teste diagnóstico sobre a noção de corpo e sobre o somatório

Instruções

Este é um teste diagnóstico, com carácter meramente informativo, que permite avaliar o seu perfil de entrada no curso de Matemática Discreta.

CrITÉrios de Avaliação

São dez questões e cada uma delas vale 20 pontos, totalizando 200 pontos. Escala de avaliação:

- Insuficiente: 0 a 100 (exclusivo);
- Suficiente: 100 a 140 (exclusivo);
- Bom: 140 a 170 (exclusivo);
- Muito bom: 170 a 200.

Os alunos com Suficiente, Bom e Muito Bom considera-se com condições para iniciar o módulo.

Avaliação

1. Considere as operações usuais de adição, $+$, e de multiplicação, \cdot , de números reais.
 - a. Justifique que $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ é um anel comutativo e unitário (anel dos números inteiros relativos).
 - b. Verifique se (\mathbb{Q}, \cdot) é um grupo.
 - c. Justifique que $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ é um corpo (o corpo dos números reais)
 - d. Diga se as operações usuais de subtração, $-$, e divisão, \div , definidas no conjunto dos números reais são operações binárias.

2. Considere a operação θ definida no conjunto dos números inteiros relativos, da seguinte forma:

$$\forall a, b \in \mathbb{Z}, \text{ tem-se } a \theta b = a + b - 3,$$
 Onde $+$ e $-$ são as operações usuais de adição e subtração, respectivamente.
 - a. Justifique que θ é uma operação binária em \mathbb{Z} .
 - b. Mostre que (\mathbb{Z}, θ) é um grupo comutativo.

3. Calcule:
 - a. $\sum_{i=1}^{100} 3i$.
 - b. $\sum_{k=2}^n (2^k - 2^{k-1})$

4. Represente a seguinte soma utilizando o símbolo de somatório:
 - a. $b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_{50} x^{50}$.
 - b. $3^3 + 4^3 + \dots + [10]^3$.

Leituras e Outros Recursos

As leituras e outros recursos desta unidade encontram-se na lista de "Leituras e Outros Recursos do curso".

Unidade 1. Sistema de equações lineares. Matriz e determinante

Introdução à Unidade

Nesta unidade introduz-se o conceito de matrizes e apresenta-se algumas operações com matrizes, cruciais para aplicação dos conteúdos da Álgebra Linear.

Faz-se a resolução de sistemas de equações lineares via condensação de matriz.

Apresenta-se o conceito de determinante de uma matriz quadrada e algumas das suas aplicações.

Estes conteúdos têm muitas aplicações ao nível da Ciência de Computação, nomeadamente Computação Gráfica, Processamento de Imagem, Inteligência Artificial, etc.

Objetivos da Unidade

Após a conclusão desta unidade, deverá ser capaz de:

- Operar com matrizes;
- Reduzir matriz à forma escalonada;
- Calcular inversa de uma matriz quadrada invertível;
- Calcular determinante de uma matriz quadrada;
- Resolver sistema de equações lineares, via condensação de matriz;
- Determinar a característica de uma matriz;
- Resolver sistema de Cramer, aplicando determinante de matrizes.

Termos-chave

Matriz real: Sejam $m, n \in \mathbb{N}$. Pode-se dizer que uma matriz é uma tabela com m linhas e n colunas, e representa-se por $A = [a_{ij}]_{(m \times n)}$.

Matriz escalonada: Diz-se que uma matriz real está na forma escalonada se as linhas nulas, caso existam, ocorrem depois das linhas não nulas, e o primeiro elemento não nulo de cada linha – pivot – situa-se numa coluna mais a esquerda que todos os pivots das linhas seguintes.

Característica de uma matriz: Dada uma matriz real A , de dimensão arbitrária, a característica de A , que se denota por $c(A)$ ou $r(A)$, é igual à característica da matriz escalonada, que se obtém a partir da matriz A , efectuando operações elementares.

Sistema de equações lineares sobre um corpo: Sejam a_1, a_2, \dots, a_n . Um sistema de equações lineares, nas incógnitas x_1, x_2, \dots, x_n , sobre R , é toda conjunção de equações lineares, nessas incógnitas.

Actividades de Aprendizagem

Actividade 1 – Matriz e suas operações

Introdução

Nesta actividade introduz-se o conceito de matrizes e algumas operações com matrizes. Também apresenta-se alguns tipos de matrizes especiais.

Detalhes da actividade

Definição (Matriz real). Sejam $m, n \in \mathbb{N}$. Sejam os conjuntos $\{1, 2, 3, \dots, m\}$ e $\{1, 2, 3, \dots, n\}$. Seja uma aplicação

$$A: \{1, 2, 3, \dots, m\} \times \{1, 2, 3, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(i, j) \mapsto a_{ij},$$

isto é, para todo $i \in \{1, 2, 3, \dots, m\}$, para todo $j \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$, $A(i, j) = a_{ij} \in \mathbb{R}$.

As imagens dessa aplicação são org

anizadas numa tabela, com m linhas e n colunas, da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Esta tabela denomina-se por matriz do tipo (ou de dimensão) $m \times n$, sobre o corpo dos números reais \mathbb{R} .

Cada um dos elementos de uma matriz diz-se entrada. Uma matriz sobre o corpo \mathbb{R} diz-se matriz real, ou matriz com entradas em \mathbb{R} .

Para localizar ou referenciar uma entrada utiliza-se dois índices, por esta ordem: o índice de linha e o índice de coluna. Um elemento que está na intersecção da linha i e coluna j diz-se entrada a_{ij} .

O conjunto de matrizes reais de dimensão $m \times n$ representa-se por $\mathbb{R}^{(m \times n)}$.

Normalmente uma matriz é representada pela mesma letra (alfabeto romano: A, B, C, \dots , etc) utilizada na aplicação que a deu origem. Escreve-se, por exemplo,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

ou, abreviadamente, $A = [a_{ij}]_{(m \times n)}$.

Exemplo. A matriz real $A = [a_{ij}]_{(4 \times 4)}$ tal que, para todo $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$, tem-se

é da forma: $a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } |i-j| > 1 \\ -1 & \text{se } |i-j| \leq 1 \end{cases}$,

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Alguns tipos de matrizes

Matriz rectangular: matriz que tem o número de linhas diferentes do número de colunas.

Matriz quadrada: matriz que tem o número de linhas igual ao número de colunas. Se esses números forem iguais a $n \in \mathbb{N}$, dir-se-á matriz quadrada de ordem n .

Matriz linha: matriz que tem apenas uma linha.

Matriz coluna: matriz que tem apenas uma coluna.

Matriz nula: é uma matriz (quadrada ou rectangular) com todas as entradas iguais a zero. A matriz nula de ordem $m \times n$ representa-se por $O_{(m \times n)}$, e se $m=n$, isto é, se a matriz nula for rectangular, a matriz nula representa-se por O_n .

Classificação de matrizes quadradas

Operações com matrizes

Definição (Igualdade de matrizes). Duas matrizes, com as mesmas dimensões, dizem-se iguais se os seus elementos correspondentes (aqueles que têm os mesmos índices de linha e de coluna) são iguais, ou seja, dadas as matrizes $A=[a_{ij}]_{(m \times n)}$, $B=[b_{ij}]_{(m \times n)}$, $A=B$ se, e somente se, $a_{ij}=b_{ij}$, para todo $i \in \{1,2,3,\dots,m\}$, para todo j .

Multiplicação de matrizes

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1+6+4 & -2+2-2 & 2-2+4 & 0+4-6 \\ 0+3-6 & 0+1+3 & 0-1-6 & 0+2+9 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 9 & -2 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & -7 & 11 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

$$f(A) = A^2 - 5A + 4I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 35 \\ 0 & 16 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 & -35 \\ 0 & 20 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0}_2.$$

Exemplo. Seja $B = \begin{bmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -5 \end{bmatrix}$, então $B^t = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$.

Propriedades da transposta

Sejam as matrizes reais A e B , compatíveis para as operações apresentadas abaixo, seja um escalar real λ . Tem-se:

- (1) $(A^t)^t = A$;
- (2) $(\lambda A)^t = \lambda A^t$;
- (3) $(A + B)^t = A^t + B^t$;
- (4) $(AB)^t = B^t A^t$.

Definição (Matriz simétrica e anti-simétrica). Seja $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ uma matriz quadrada real, de ordem $n \in \mathbb{N}$. Diz-se que:

- (1) A matriz A é **simétrica** se $A = A^t$, ou seja, para todo $i, j \in \{1,2,3,\dots,n\}$, então $a_{ij} = a_{ji}$.
- (2) A matriz A é **anti-simétrica** se $A^t = -A$, ou seja, para todo $i, j \in \{1,2,3,\dots,n\}$, então $a_{ij} = -a_{ji}$.

Nota. Pode-se concluir a partir da definição que:

- (1) Uma matriz quadrada real é simétrica se os elementos da diagonal principal são arbitrários e os elementos opostos em relação à diagonal principal (entradas (i,j) e (j,i)) são iguais.
- (2) Uma matriz quadrada real diz-se anti-simétrica se os elementos da diagonal principal são iguais a zero e os elementos opostos em relação à diagonal principal são simétricos.

Exemplo. A matriz real

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & \sqrt{2} \\ 2 & \sqrt{2} & 3 \end{bmatrix}$$

é simétrica; e a matriz real

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

é anti-simétrica.

Teorema. Sejam A e B matrizes reais simétricas da mesma dimensão, e seja λ um escalar real. Então:

1. A^t é uma matriz simétrica;
2. $A+B$ e $A-B$ são matrizes simétricas;
3. λA é uma matriz simétrica.

Conclusão

Uma matriz real é uma tabela com números reais dispostos em linhas e colunas. Podemos classificar matrizes em dois grandes grupos: matrizes retangulares e matrizes quadradas. No grupo de matrizes quadradas há subgrupos, como são os casos de: matrizes triangulares, diagonais, escalares e identidade.

Pode-se, entre outras coisas, adicionar e subtrair matrizes da mesma dimensão, multiplicar uma matriz por um escalar, multiplicar duas matrizes (sob condições especiais) e fazer a transposta de uma matriz. A operação da transposta está na origem de matrizes simétricas e anti-simétricas.

Actividade 2 – Redução de uma matriz à forma escalonada. Sistema de equações lineares

Introdução

Nesta actividade vai reduzir-se uma matriz à forma escalonada, utilizando o método de condensação de Gaus-Jordan, e introduz-se assim o conceito de característica de uma matriz.

Generaliza-se o conceito de sistema de equações lineares, e apresenta-se um novo método para a sua resolução, baseado na condensação de matrizes.

Faz-se o uso de característica de uma matriz para discutir um sistema de equações lineares.

Detalhes da atividade

Operações elementares sobre linhas (colunas) de uma matriz

Definição (Operações elementares). Chama-se operações elementares sobre linhas (colunas) de uma matriz, as que se seguem:

1. Trocar entre si duas linhas (colunas);
2. Multiplicar uma linha (coluna) por um escalar real diferente de zero;
3. Substituir uma linha (coluna) pela sua soma com outra linha (coluna), multiplicada por um escalar arbitrário.

representações de operações elementares:

(1) Operações elementares sobre linhas

- A troca das linhas L_i e L_k , representa-se por $L_i \leftrightarrow L_k$;
- A multiplicação da linha L_i por um escalar real não nulo λ , representa-se por $L_i \leftarrow \lambda L_i$;
- A substituição da linha L_i pela linha $L_i + \lambda L_k$, representa-se por $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_k$.

(2) Operações elementares sobre colunas

- A troca das colunas C_j e C_i , representa-se por $C_j \leftrightarrow C_i$;
- A multiplicação da coluna C_j por um escalar real não nulo β , representa-se por $C_j \leftarrow \beta C_j$;
- A substituição da coluna C_j pela coluna $C_j + \lambda C_i$, representa-se por $C_j \leftarrow C_j + \lambda C_i$.

Exemplo. Seja a matriz real

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Troca da 1ª e 2ª linha de :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Multiplicação da 1ª linha de por :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftarrow \frac{1}{2} L_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Substituição da 3ª linha pela sua soma com a 2ª linha multiplicada por :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + (-1)L_2} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

Troca da 1ª e 3ª coluna:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{C_1 \leftrightarrow C_3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Multiplicação da 4ª coluna por :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{C_4 \leftarrow -3C_4} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -12 \\ 1 & 0 & -1 & -9 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Substituição da 2ª coluna pela sua soma com a 4ª coluna multiplicada por :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{C_2 \leftarrow C_2 + (-2)C_4} \begin{bmatrix} 2 & -8 & 0 & 4 \\ 1 & -6 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriz na forma escalonada e característica de uma matriz

Definição (Matriz escalonada e escalonada reduzida). Diz-se que uma matriz real está na **forma escalonada** se:

1. As linhas nulas, caso existam, ocorrem depois das linhas não nulas;
2. O primeiro elemento não nulo de cada linha – pivot – situa-se numa coluna mais a esquerda que todos os pivots das linhas seguintes.

Uma matriz escalonada diz-se na forma escalonada reduzida se cada pivot é igual a 1, e é a única entrada não nula na sua coluna.

Exemplo. As matrizes reais

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad e \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

estão na forma escalonada, e a matriz B está na forma escalonada reduzida.

Exemplo. Qualquer matriz nula está na forma escalonada reduzida. Qualquer matriz linha está na forma escalonada, e ela está na forma escalonada reduzida se o pivot for igual a 1.

Redução de uma matriz à forma escalonada ou escalonada reduzida – Condensação da matriz

Dada uma matriz real, de dimensão $n \times n$, é possível, a partir de A , obter uma matriz na forma escalonada, ou escalonada reduzida, mediante uma sequência de operações elementares sobre linhas. Este processo chama-se condensação de uma matriz.

O método utilizado para levar uma matriz à forma escalonada é o método de Gauss que consiste no seguinte:

- Localize a coluna mais à esquerda que não seja constituída somente de zeros;
- Troque a primeira linha com uma outra linha, se necessário, para obter uma entrada não nula no topo da coluna encontrada no ponto (1);
- Se a entrada que agora está no topo da coluna encontrada no ponto (1) é a , então multiplique a primeira linha pelo inverso de a ; para obter um pivot igual a 1;
- Some múltiplos convenientes da 1ª linha às linhas que estão abaixo para obter zeros em todas as entradas abaixo do pivot;
- Agora, esconda a primeira linha da matriz e recomece aplicando o passo (1) à submatriz resultante. Continue até que toda matriz esteja na forma escalonada.
- Pode-se juntar a esses passos mais um passo (6º passo), no sentido de obter uma matriz na forma escalonada reduzida. Esse método é conhecido pelo método de Gauss-Jordan.
- Começando com a última linha não nula, e trabalhando para cima, some múltiplos convenientes de cada linha às linhas acima, para introduzir zeros acima dos pivots.

Nota. Na prática, quando se quer reduzir uma matriz à forma escalonada reduzida, o passo (6) aplica-se em simultâneo com o passo (4).

Exemplo. Seja a matriz real

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Redução da matriz à forma escalonada reduzida:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -7 & -3 \end{bmatrix} \\ & \xrightarrow{L_2 \leftarrow -\frac{1}{3}L_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -7 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -7 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_4 \leftarrow L_4 + 7L_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow -1L_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_4 \leftarrow L_4 + 3L_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - L_4} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Nota. Dependendo das operações elementares sobre linhas aplicadas, uma matriz pode ser reduzida à diferentes matrizes na forma escalonada. No entanto, cada matriz é reduzida à uma única forma escalonada reduzida, independentemente das operações elementares sobre linhas aplicadas.

Definição (Característica de uma matriz). Característica de uma matriz na forma escalonada é igual ao número de linhas não nulas (que é igual ao número de pivots). Dada uma matriz real A , de dimensão arbitrária, a característica de A , que se denota por $c(A)$ ou $r(A)$, é igual à característica da matriz escalonada, que se obtém a partir da matriz A , efectuando operações elementares.

Exemplo. A característica da matriz do exemplo anterior é 3.

Definição (Solução de uma equação linear). Solução de uma equação linear, com n incógnitas (x_1, x_2, \dots, x_n) , sobre \mathbb{R} ,

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b,$$

é um elemento $s = (s_1, s_2, \dots, s_n) \in \mathbb{R}^n$, que transforma essa equação numa afirmação verdadeira, ou seja, $a_1s_1 + a_2s_2 + \dots + a_ns_n = b$ é uma afirmação verdadeira.

Exemplo. O elemento $s = (-4, 1) \in \mathbb{R}^2$ é uma solução da equação linear

$$2x_1 + 3x_2 = -5 \text{ (ou } 2x + 3y = -5),$$

pois, $2(-4) + 3 \cdot 1 = -5$ é uma afirmação verdadeira.

Nota. É de notar que:

$$2x_1 + 3x_2 = -5 \Leftrightarrow x_1 = \frac{-5}{2} - \frac{3}{2}x_2 \text{ e } x_2 = \lambda \in \mathbb{R},$$

pelo que a solução geral desta equação é

$$s = \left\{ \left(\frac{-5}{2} - \frac{3}{2}\lambda, \lambda \right) : \lambda \in \mathbb{R} \right\},$$

ou seja, ela tem infinitas soluções.

Definição (Sistema de m equações lineares sobre um corpo). Sejam $m, n \in \mathbb{N}$. Um sistema de m equações lineares, nas incógnitas x_1, x_2, \dots, x_n , sobre \mathbb{R} , é toda conjunção de m equações lineares, nessas incógnitas, que se reduz à forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases},$$

denominada forma canónica desse sistema, onde $a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1, m}$ e $j = \overline{1, n}$, são, respectivamente, os coeficientes e os termos independentes, e para todo $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, existe pelo menos um $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ tal que $a_{ij} \neq 0$.

Matrizes associadas ao sistema de equações lineares, na forma canónica (da definição anterior)

Matriz dos coeficientes:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix};$$

Matriz coluna das incógnitas:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix};$$

Matriz coluna dos termos independentes:

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix};$$

Matriz ampliada:

$$[A|B] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right].$$

Representação matricial do sistema de equações lineares, na forma canónica (da definição anterior):

$$AX = B.$$

Exemplo. A representação matricial do sistema de equações lineares,

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = -3 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \end{cases},$$

é

$$AX = B \\ \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A sua matriz ampliada é

$$[A|B] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 3 & -1 & 0 \end{array} \right]$$

Definição (Solução de um sistema de equações lineares). Solução de um sistema de equações lineares, a incógnitas, sobre \mathbb{R} , é um elemento

$$s = (s_1, s_2, \dots, s_n) \in \mathbb{R}^n,$$

que é solução de cada uma das equações lineares.

Exemplo. O elemento $s = (1, 4, 1, 1) \in (\mathbb{R})^4$ é solução do sistema

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = -3 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \end{cases},$$

pois:

$$\begin{cases} 1 - 2 \cdot 4 + 3 \cdot 1 + 1 = -3 \\ 2 \cdot 1 - 4 + 3 \cdot 1 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 - 8 + 3 + 1 = -3 \\ 2 - 4 + 3 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3 = -3 \text{ (AV)} \\ 0 = 0 \text{ (AV)} \end{cases}.$$

Contudo, o elemento não é solução deste sistema, pois:

$$\begin{cases} -7 - 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 + 1 = -3 \\ 2 \cdot (-7) - 0 + 3 \cdot 1 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -7 - 0 + 3 + 1 = -3 \\ -14 - 0 + 3 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3 = -3 \text{ (AV)} \\ -12 = 0 \text{ (AF)} \end{cases}.$$

Neste último caso, $s=(-7,0,1,1) \in \mathbb{R}^4$ é solução da primeira equação, mas não é da segunda, logo este elemento não é solução do sistema de equações lineares dado.

Definição (Classificação de um sistema quanto às soluções). Um sistema de equações lineares, a incógnitas, sobre R , diz-se possível se ela tiver pelo menos uma solução, e diz-se impossível se não tiver nenhuma solução. Diz-se, também, que ele é possível determinado se ele tiver uma única solução, e possível indeterminado se ela tiver infinitas soluções.

Teorema (Classificação de um sistema quanto às soluções). Seja um sistema de equações lineares, a incógnitas, sobre R , e sejam as matrizes reais A e B , matriz dos coeficientes e matriz ampliada desse sistema, respectivamente. Então:

O sistema é possível determinado se, e somente se, $c(A)=c([A|B])=n$; ;

O sistema é possível indeterminado se, e somente se, $c(A)=c([A|B])<n$;

O sistema é impossível se $c(A)<c([A|B])$.

Definição (Grau de indeterminação de um sistema). Seja um sistema de equações lineares, a incógnitas, sobre R , possível. O número $g=n-c(A)$ é denominado grau de indeterminação do sistema.

Nota. O grau de indeterminação de um sistema dá o número de variáveis livres dum sistema de equações lineares, possível, ou seja, as variáveis (ou incógnitas) que podem assumir quaisquer valores reais, na solução geral do sistema.

Se grau de indeterminação for igual a zero, o sistema será possível determinado, caso contrário, o sistema será possível indeterminado.

As variáveis não livres, (ou incógnitas) dum sistema de equações lineares, possível, diz-se variáveis dependentes (podem assumir um valor fixo, ou podem estar em função de uma ou mais variáveis livres).

Exemplo. O sistema

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = -3 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \end{cases},$$

é possível indeterminado, pois:

$$[A|B] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 3 & -1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & -3 & -3 & 6 \end{array} \right].$$

Nota-se que Este sistema admite dois variáveis livres, pois .

Exemplo. O sistema

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 = -1 \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases},$$

é possível determinado, pois:

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ -1 & 3 & 2 & 2 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{array} \right]$$

Nota-se que .

Exemplo. O sistema

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 3 \end{cases},$$

é impossível, pois:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & -2 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 2 & -4 & -2 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right].$$

Nota-se que $c(A)=2 < 3=c([A|B])$.

Resolução de sistema de equações lineares

Definição (Resolução de um sistema de equações lineares). Resolver um sistema de m equações lineares, a n incógnitas, é determinar o seu conjunto-solução (conjunto de todas as suas soluções) ou concluir que ele é impossível.

Resolução de um sistema de m equações lineares, a n incógnitas, cuja matriz ampliada é escalonada (não reduzida):

- (1) Se $r(A) < r([A|B])$ o sistema é impossível.
- (2) Se $r(A) = r([A|B]) = n$, determina-se a única solução do sistema, determinando os valores das incógnitas (ou variáveis), e fazendo as respectivas substituições de baixo para cima.
- (3) Se $r(A) = r([A|B]) < n$, determina-se o conjunto-solução S , atribuindo parâmetros às variáveis livres (ou independentes), e, então, determinar o valor, ou expressão algébrica, das variáveis dependentes, e fazer as respectivas substituições de baixo para cima.

As variáveis dependentes estão associadas aos pivots da matriz ampliada do sistema.

Exemplo. O sistema

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = -3 \\ \quad \quad \quad x_3 - x_4 = 1 \\ \quad \quad \quad \quad \quad 2x_4 = 4 \end{cases},$$

está associado à matriz ampliada

$$[A|B] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{array} \right],$$

que está na forma escalonada. Nota-se que este sistema é possível indeterminado com grau de indeterminação $g = 1$ (a variável livre é x_2 , pois não está associada a nenhum pivot). Então:

$$[A|B] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{array} \right],$$

que está na forma escalonada. Nota-se que este sistema é possível indeterminado com grau de indeterminação (a variável livre é , pois não está associada a nenhum pivot). Então:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = -3 \\ \quad \quad \quad x_3 - x_4 = 1 \\ \quad \quad \quad \quad \quad 2x_4 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 2 = -3 \\ \quad \quad \quad \quad \quad x_3 - 2 = 1 \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad x_4 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 9 = -5 \\ \quad \quad \quad \quad \quad x_3 = 3 \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad x_4 = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -14 + 2\lambda \\ x_2 = \lambda \in \mathbb{R} \\ x_3 = 3 \\ x_4 = 2 \end{cases}$$

O seu conjunto-solução é

$$S = \{(-14 + 2\lambda, \lambda, 3, 2) : \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Exemplo. O sistema

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = 1 \\ x_2 + x_3 = 3 \\ 3x_3 = -3 \end{cases},$$

está associado à matriz ampliada

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{array} \right],$$

que está na forma escalonada. Nota-se que o sistema é possível determinado, pois .

Então:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = 1 \\ x_2 + x_3 = 3 \\ 3x_3 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 1 = 1 \\ x_2 - 1 = 3 \\ x_3 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 8 = 0 \\ x_2 = 4 \\ x_3 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 8 \\ x_2 = 4 \\ x_3 = -1 \end{cases}$$

O seu conjunto-solução é

Resolução de um sistema de equações lineares, a incógnitas, cuja matriz ampliada é escalonada reduzida

Quando a matriz ampliada, associada a um sistema, é escalonada reduzida, o sistema é resolvido utilizando o mesmo método aplicado aquando a matriz ampliada é escalonada não reduzida, só que as “substituições” são dispensadas.

Exemplo. O sistema

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -14 \\ x_3 = 3 \\ x_4 = 2 \end{cases},$$

está associado à matriz ampliada

$$[A|B] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 & -14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right].$$

que é escalonada reduzida. Nota-se que este sistema é possível indeterminado, com grau de indeterminação . Então:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -14 \\ x_3 = 3 \\ x_4 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -14 + 2\lambda \\ x_2 = \lambda \in \mathbb{R} \\ x_3 = 3 \\ x_4 = 2 \end{cases}$$

O seu conjunto-solução é

$$S = \{(-14 + 2\lambda, \lambda, 3, 2) : \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Definição (Sistemas equivalentes). Dois sistemas de equações lineares, a incógnitas, dizem-se equivalentes se têm o mesmo conjunto-solução.

Teorema (Princípios de equivalência de sistemas de equações lineares). Obtém-se um sistema de equações lineares equivalente a um outro dado, se se aplicar qualquer uma das três operações que se seguem:

1. Trocar a ordem das equações;
2. Multiplicar uma determinada equação por um escalar real não nulo λ ;
3. Substituir uma determinada equação pela sua soma com uma outra equação, multiplicada por um escalar real.

Nota. Os princípios de equivalência aplicados a um sistema de equações lineares, produzem efeitos semelhantes nas linhas da respectiva matriz ampliada, isto é:

- (1) Troca, entre si, da i -ésima equação e k -ésima equação, equivale a operação $L_i \leftrightarrow L_k$, sobre as linhas da respectiva matriz ampliada;
- (2) Multiplicação da i -ésima equação por um escalar real não nulo λ , equivale a operação $L_i \leftarrow \lambda L_i$, sobre as linhas da respectiva matriz ampliada;
- (3) A substituição da i -ésima equação pela sua soma com a k -ésima equação, multiplicada por um escalar real λ , equivale a operação $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_k$, sobre as linhas da respectiva matriz ampliada.

Sendo assim, a matriz escalonada (reduzida ou não) obtida a partir da matriz ampliada de um determinado sistema de equações lineares, aplicando operações elementares sobre linhas, está associada a um sistema de equações lineares equivalente ao dado sistema.

Então, uma regra prática para resolver um sistema de equações lineares, é reduzir a sua matriz ampliada à forma escalonada (reduzida ou não), e a partir daí, resolver o sistema associado.

Exemplo. Resolver o sistema de equações lineares que se segue:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -2 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 5 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \end{cases} .$$

$$\begin{aligned} [A|B] &= \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & 2 & 7 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & 2 & 7 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow{L_2 \leftarrow -\frac{1}{3}L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -2/3 & -7/3 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & -2/3 & -7/3 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & -2/3 & -7/3 \\ 0 & 0 & 2 & 8 \end{array} \right] \xrightarrow{L_3 \leftarrow \frac{1}{2}L_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & -2/3 & -7/3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right] \end{aligned}$$

$$\xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 + \frac{1}{3}L_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5/3 \\ 0 & 1 & -2/3 & -7/3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right] \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 + \frac{2}{3}L_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right]$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -2 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 5 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 5/3 \\ x_2 = 1/3 \\ x_3 = 4 \end{cases}$$

Então, o conjunto-solução deste sistema é

$$S = \left\{ \left(\frac{5}{3}, \frac{1}{3}, 4 \right) \right\}.$$

Exemplo. Resolver o seguinte sistema

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = -3 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \end{cases}.$$

$$[A|B] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 3 & -1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & -3 & -3 & 6 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{L_2 \leftarrow \frac{1}{3}L_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 2 \end{array} \right]$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = -3 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_3 - x_4 = 1 \\ x_2 - x_3 - x_4 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 - \lambda + \beta \\ x_2 = 2 + \lambda + \beta \\ x_3 = \lambda \in \mathbb{R} \\ x_4 = \beta \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Então, o conjunto-solução é

$$S = \{(1 - \lambda + \beta, 2 + \lambda + \beta, \lambda, \beta) : \lambda, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

Sistema homogéneo

Definição (Sistema homogéneo). Um sistema de equações lineares diz-se homogéneo se todos os seus termos independentes são iguais a zero.

Exemplo. O sistema

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_1 - x_4 = 0 \end{cases}$$

é homogéneo.

Nota. Um sistema homogéneo é sempre possível.

Definição (Sistema homogêneo associado). Seja um sistema de equações lineares, $AX=B$. O seu sistema homogêneo associado é $AX=0_{(m \times 1)}$.

Exemplo. O sistema homogêneo associado ao sistema

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = -3 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \end{cases},$$

é

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \end{cases}.$$

Nota. Nota-se que:

Se $AX=B$ é possível determinado, o seu homogêneo associado também é;

Se $AX=B$ é possível indeterminado, o seu homogêneo associado também é;

Se $AX=B$ é impossível, o seu homogêneo associado é possível (determinado ou indeterminado).

Teorema. Seja s_p uma solução particular do sistema de m equações lineares $AX = B$. Então, s_0 é solução desse sistema se, e somente se, existe uma solução particular s_h do sistema homogêneo associado, $AX = 0_{m \times 1}$, tal que

$$s_0 = s_p + s_h.$$

Nota. Resulta do teorema anterior, que a solução geral de um sistema de m equações lineares, $AX = B$, obtém-se adicionando uma sua solução particular a solução geral do seu homogêneo associado, $AX = 0_{m \times 1}$.

Também, a solução geral do sistema homogêneo associado a $AX = B$, obtém-se subtraindo da solução geral de $AX = B$ uma solução particular do mesmo.

Exemplo. A solução geral do sistema

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = -3 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \end{cases},$$

é

$$s = (1 - \lambda + \beta, 2 + \lambda + \beta, \lambda, \beta) : \lambda, \beta \in \mathbb{R}.$$

Uma solução particular s_p , desse sistema, pode ser obtido dando valores concretos às variáveis livres λ e β . Para $\lambda = \beta = 0$, tem-se $s_p = (1, 2, 0, 0)$.

Logo a solução geral do sistema homogêneo associado,

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \end{cases},$$

é

$$s - s_p = (-\lambda + \beta, \lambda + \beta, \lambda, \beta) : \lambda, \beta \in \mathbb{R}.$$

Conclusão

Dependendo das operações elementares sobre linhas aplicadas, uma matriz pode ser reduzida à diferentes matrizes na forma escalonada. No entanto, cada matriz é reduzida à uma única forma escalonada reduzida, independentemente das operações elementares sobre linhas aplicadas.

Qualquer matriz real tem uma, e uma só, característica.

Solução de um sistema de equações lineares com incógnitas é um elemento de \mathbb{R}^n .

A possibilidade de um sistema de equações lineares depende da característica da sua matriz ampliada e da sua matriz dos coeficientes.

Evaluation

Avaliação

1. Determine as características das matrizes reais que se seguem:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \quad e \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 2 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Discuta a característica de cada uma das matrizes reais, que se seguem, em função dos parâmetros reais indicados (a , α e β e):

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ a & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha & \alpha/2 \\ 1 & \beta & \alpha & 1 \end{bmatrix} \quad e \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha & \alpha/2 \\ 1 & \beta & \alpha & 1 \end{bmatrix}.$$

3. Considere a matriz real

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a-2 & 0 \end{bmatrix},$$

onde a é um parâmetro real.

a. Determine os valores reais de a , de modo que $c(A) < 3$.

b. Determine os valores reais de a , de modo que, $c(A) < 3$.

c. Para $a=5$, reduza a matriz real à forma escalonada, aplicando operações elementares sobre linhas e/ou colunas.

4. Discuta o seguinte sistema, em função dos parâmetros reais e e f :

$$\begin{cases} 2x + y = b \\ 3x + 2y + z = 0 \\ x + ay + z = 2 \end{cases} .$$

Resolva o seguinte sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 - x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases} .$$

Indique o conjunto-solução do seu sistema homogéneo associado.

Actividade 3 – Determinante e suas aplicações. Matriz regular.

Introdução

Pretende-se com esta actividade, introduzir o conceito de determinante de uma matriz quadrada, e a partir das propriedades de determinante, apresentar métodos eficientes e eficazes para determinar o valor do determinante de uma matriz quadrada.

Introduz-se o conceito de matriz regular, e determina-se a inversa de uma matriz regular por intermédio de sistema de equações lineares e por aplicação de determinante.

Introduz-se o conceito de sistema de Cramer, e apresenta-se o método de Cramer (baseado no cálculo de determinante) para resolução desse tipo de sistema

Detalhes da actividade

Definição (Permutação de números naturais) Dados números naturais $1, 2, 3, \dots$ chama-se

Exemplo. Na permutação $\delta = 2,3,1$, dos números naturais $1,2,3$, 2 e 1 formam uma inversão, 3 e 1 , também.

Definição (Paridade de uma permutação). Uma permutação i_1, i_2, \dots, i_n dos números naturais $1, 2, \dots, n$, diz-se **par [ímpar]** quando o número total de inversões é **par [ímpar]**.

Exemplo. A permutação $\delta = 2,3,1$, dos números naturais $1,2,3$, é par (tem duas inversões).

Determinante de uma matriz quadrada

Definição (Determinante de uma matriz quadrada). Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz quadrada de ordem n . Chama-se determinante de A , e representa-se por $|A|$,

$$|A| = \sum_{\substack{j_1, j_2, j_3, \dots, j_n \\ \in \\ S_n}} (-1)^\alpha a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} \dots a_{nj_n},$$

onde

$$\alpha = \begin{cases} 0 & \text{se } j_1, j_2, j_3, \dots, j_n \text{ é uma permutação par} \\ 1 & \text{se } j_1, j_2, j_3, \dots, j_n \text{ é uma permutação ímpar.} \end{cases}$$

Exemplo. Vai determinar-se o determinante das matrizes quadradas de ordem 1, de ordem 2 e de ordem n .

Seja $A=[a_{ij}]$, uma matriz quadrada real, de ordem 1. Então, $|A|=a_{11}$.

Seja $A=[\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix}]$, uma matriz quadrada real, de ordem 2. Como,

$$S_2 = \{I = 1, 2; \alpha = 2, 1\},$$

onde I é uma permutação para, e α é uma permutação ímpar. Então, por definição,

$$\begin{aligned} |A| &= \sum_{\substack{j_1, j_2 \\ \in \\ S_2}} (-1)^\alpha a_{1j_1} a_{2j_2} \\ &= (-1)^0 a_{11} a_{22} + (-1)^1 a_{12} a_{21} \\ &= a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} \end{aligned}$$

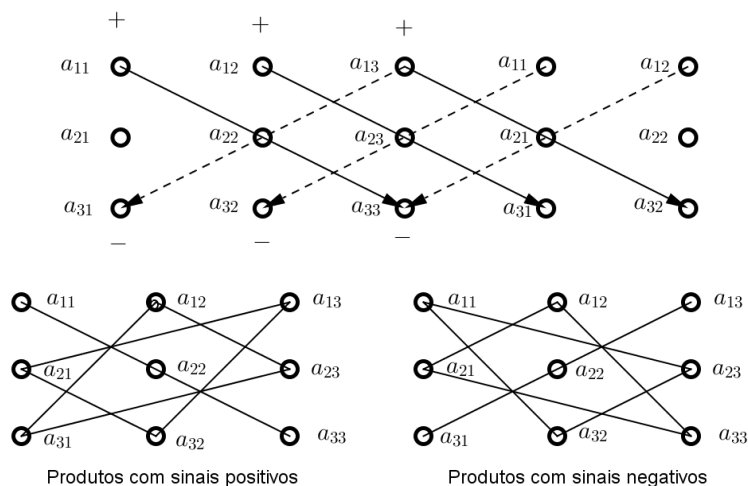
Seja $A=[\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}]$, uma matriz quadrada real, de ordem 3. Como,

$$S_3 = \{I = 1, 2, 3; \alpha = 1, 3, 2; \gamma = 2, 1, 3; \delta = 2, 3, 1; \varepsilon = 3, 1, 2; \beta = 3, 2, 1\},$$

onde $I, \alpha, \gamma, \delta, \varepsilon$ são permutações pares, e β é uma permutação ímpar. Então

$$\begin{aligned} |A| &= \sum_{\substack{j_1, j_2, j_3 \\ \in \\ S_3}} (-1)^\alpha a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} \\ &= (-1)^0 a_{11} a_{22} a_{33} + (-1)^1 a_{11} a_{23} a_{32} + (-1)^1 a_{12} a_{21} a_{33} + (-1)^0 a_{12} a_{23} a_{31} + \\ &\quad + (-1)^0 a_{13} a_{21} a_{32} + (-1)^1 a_{13} a_{22} a_{31} \\ &= a_{11} a_{22} a_{33} - a_{11} a_{23} a_{32} - a_{12} a_{21} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{13} a_{22} a_{31} \\ &= a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{11} a_{23} a_{32} - a_{12} a_{21} a_{33} - a_{13} a_{22} a_{31} \end{aligned}$$

A Regra de Sarrus é uma regra mnemónica para determinação de determinantes de matriz quadrada de ordem 3. Cada uma das figuras, que se seguem, apresenta esta regra de uma forma resumida. Nessas figuras, os traços contínuos, representam os produtos das entradas da matriz, que devem ser afectados de sinal positivo, e os traços a tracejados representam os produtos das entradas da matriz que devem ser afectados do sinal negativo.



Nota. O cálculo de determinante pela definição é pouco eficiente, embora seja muito eficaz, pois o número de parcelas, nesse cálculo, aumenta rapidamente, quando aumenta a ordem da matriz quadrada. Por exemplo:

Ordem da matriz	Nº de parcelas em
4	24
5	120
6	720
7	5040

Sendo assim, normalmente, o cálculo de determinante faz-se por intermédio da aplicação de propriedades de determinante.

Definição (Cofactor de um elemento). Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz quadrada de ordem n . Chama-se cofactor (ou complemento algébrico) de um elemento a_{ij} , da matriz A , ao n°

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} |A(i|j)|,$$

Onde $A(i|j)$ é a submatriz de A , que se obtém eliminando a linha i e a coluna j da matriz A .

Exemplo. Seja a matriz quadrada real, de ordem 3,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Então:

$$\begin{aligned} A_{21} &= (-1)^{2+1} |A(2|1)| \\ &= - \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= -(-2 - 2) = 4 \end{aligned}$$

Teorema (Teorema de Laplace). Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz quadrada de ordem n . Então:

(1) Para todo $c \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$, tem-se

$$|A| = \sum_{i=1}^n a_{ic} A_{ic},$$

método conhecido por desenvolvimento laplaceano ao longo da coluna .

Para todo $l \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$, tem-se

$$|A| = \sum_{j=1}^n a_{lj} A_{lj},$$

método conhecido por desenvolvimento laplaceano ao longo da linha l .

Exemplo. Seja a matriz quadrada real

Desenvolvimento laplaceano ao longo da 1ª coluna:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} &= 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 0 \cdot A_{21} - 1 \cdot (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 4 - 3 - (-3 - 4) \\ &= 1 + 7 = 8 \end{aligned}$$

Desenvolvimento laplaceano ao longo da 2ª linha:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} &= 0 \cdot A_{21} + 2 \cdot (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 2 \cdot (2 + 2) - 3 \cdot (1 - 1) \\ &= 8 \end{aligned}$$

Nota. O Teorema de Laplace estabelece que o determinante de uma matriz quadrada obtém-se somando os produtos dos elementos de uma determinada linha [coluna] pelos respectivos complementos algébricos, e reduz o cálculo de determinante de uma matriz da ordem "n", ao cálculo de determinante de matrizes de ordem "n-1".

Na aplicação do Teorema de Laplace, convém escolher a linha ou coluna com maior número de zeros (para facilitar os cálculos).

Teorema. O Teorema de Laplace tem como consequência imediatas, as propriedades que se seguem:

Seja uma matriz triangular, então determinante de A é igual ao produto dos elementos da diagonal principal;

Seja uma matriz quadrada com uma linha [coluna] de zeros, então $|A|=0$.

Teorema. Seja $A=[a_{ij}]$ uma matriz quadrada de ordem n. Então:

Se a matriz B for obtida a partir da matriz A, através de troca de duas linhas [colunas], então

$$|A|=-|B|,$$

ou seja,

$$A \xrightarrow{L_i \leftrightarrow L_j \text{ ou } C_j \leftrightarrow C_i} B \Rightarrow |A| = -|B|.$$

(2) Se a matriz B for obtida a partir da matriz A, multiplicando uma linha [coluna] de A por um escalar real $\lambda \neq 0$, então

$$|B| = \lambda |A| \iff |A| = \frac{1}{\lambda} |B|,$$

ou seja,

Nota. A combinação dos dois últimos teoremas, pode melhorar consideravelmente a eficiência no cálculo de determinante, se comparado com o método de computação de determinante a partir da definição. Isto é, pode utilizar-se as operações elementares sobre linhas [colunas] para obter-se cada vez mais zeros numa determinada linha [coluna] da matriz, ou transformar a matriz dada numa matriz triangular, antes de aplicar o desenvolvimento laplaceano e/ou suas consequências.

Exemplo. Seja a matriz quadrada real

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Então:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \stackrel{(L_3 \leftarrow L_3 + L_2)}{=} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 4 = 8.$$

Exemplo. Calcular o determinante da matriz quadrada real

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

Teorema (Propriedades de determinante). Seja A uma matriz quadrada de ordem $n \in \mathbb{N}$.

Então:

- (1) $|\lambda A| = \lambda^n |A|$;
- (2) $|A^T| = |A|$;
- (3) Se duas linhas [colunas] de A são proporcionais, então $|A| = 0$;
- (4) Se uma linha [coluna] de A pode ser desdobrada na soma de duas linhas [colunas] quaisquer, o valor de determinante de A é igual à soma dos valores dos determinantes de duas matrizes, em que nessa linha [coluna] se usa uma parcela de cada vez, mantendo-se as restantes linhas [colunas].

Matriz regular – inversa de uma matriz

Definição (Matriz regular (ou matriz invertível)). Uma matriz quadrada real A , de ordem $n \in \mathbb{N}$, diz-se regular (ou invertível), se existe uma matriz quadrada real B , da mesma ordem, tal que $AB = BA = I_n$.

Nesse caso, a matriz B diz-se inversa de A , e escreve-se $B = A^{-1}$. Do mesmo modo, diz-se que A é inversa de B , e escreve-se $A = B^{-1}$.

Teorema. Sejam A e B matrizes quadradas reais, de ordem n . Então, $AB = I_n \Leftrightarrow BA = I_n$.

Nota. Pelo teorema anterior, uma matriz quadrada real A , de ordem n , é regular se existe uma matriz quadrada real B , também de ordem n , tal que:

$$AB = I_n \text{ ou } BA = I_n.$$

Exemplo. Seja a matriz quadrada real

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Verificar que a matriz

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ \frac{-1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{-1}{2} \end{bmatrix}$$

é inversa de A , ou seja, $A^{-1}=B$, equivalentemente, .

Ora, pela nota anterior, basta ver que $AB=I_3$, ou então, $BA=I_3$. E de facto,

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ \frac{-1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{-1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Exemplo. Seja a matriz quadrada real, de ordem 2,

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

tal que $ad-bc \neq 0$. Então,

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

De facto,

$$A.A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Teorema (Unicidade da matriz inversa). Toda matriz real regular tem uma, e uma só, inversa.

Teorema (Propriedades da matriz inversa).

- (1) Se A é uma matriz regular, então A^{-1} é, também, uma matriz regular, e $(A^{-1})^{-1} = A$.
- (2) Se A e B são matrizes regulares da mesma ordem, AB é, também, uma matriz regular, e $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
- (3) Se A é uma matriz regular, então A^t é, também, uma matriz regular, e $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.
- (4) Se A é uma matriz regular, então, para um escalar real $\lambda \neq 0$, λA é, também, uma

matriz regular, e $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1}$.

- (5) Seja $k \in \mathbb{N}$. Sejam A_i , $i = 1, 2, 3, \dots, k$, matrizes regulares, então $A_1 A_2 A_3 \dots A_{k-1} A_k$ é, também, uma matriz regular, e $(A_1 A_2 A_3 \dots A_k)^{-1} = A_k^{-1} A_{k-1}^{-1} \dots A_2^{-1} A_1^{-1}$.
- (6) Seja $k \in \mathbb{N}$. Se A é uma matriz regular, então A^k é, também, regular, e $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$.

Método para determinação da inversa de uma matriz regular

A partir do caso que se segue, vai apresentar-se um dos métodos utilizados no cálculo da inversa de uma matriz regular.

Seja a matriz quadrada real regular, de ordem 3:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

A partir do caso que se segue, vai apresentar-se um dos métodos utilizados no cálculo da inversa de uma matriz regular.

Seja a matriz quadrada real regular, de ordem 3:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

A sua inversa, $B=A^{-1}$, é, também, uma matriz quadrada de ordem 3, logo:

$$A^{-1} = B = \begin{bmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix}.$$

$$AA^{-1} = I_3$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} a + a_1 + a_2 & b + b_1 + b_2 & c + c_1 + c_2 \\ a - a_1 + a_2 & b - b_1 + b_2 & c - c_1 + c_2 \\ a + a_1 & b + b_1 & c + c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} a + a_1 + a_2 \\ a - a_1 + a_2 \\ a + a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad e \quad \begin{bmatrix} b + b_1 + b_2 \\ b - b_1 + b_2 \\ b + b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad e \quad \begin{bmatrix} c + c_1 + c_2 \\ c - c_1 + c_2 \\ c + c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + a_1 + a_2 = 1 \\ a - a_1 + a_2 = 0 \\ a + a_1 = 0 \end{cases} (1) \quad e \quad \begin{cases} b + b_1 + b_2 = 0 \\ b - b_1 + b_2 = 1 \\ b + b_1 = 0 \end{cases} (2) \quad e \quad \begin{cases} c + c_1 + c_2 = 0 \\ c - c_1 + c_2 = 0 \\ c + c_1 = 1 \end{cases} (3)$$

Como as matrizes dos coeficientes dos sistemas 1, 2 e 3 são iguais (neste caso, são iguais a A), então os três sistemas podem ser resolvidos em simultâneo:

$$\begin{aligned}
 [A|B_1B_2B_3] &= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
 \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_1} & \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{L_3 \leftarrow -1L_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array} \right] \\
 \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - L_2} & \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array} \right] \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - L_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/2 & 1/2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

Sendo assim,

$$B = A^{-1} = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Método para a determinação da inversa de uma matriz regular A , de ordem n . O método consiste em reduzir a matriz $[A|I_n]$ à forma escalonada reduzida, $[I_n|A^{-1}]$, aplicando operações elementares sobre linhas.

Exemplo. Determinar a inversa da matriz real regular $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

$$[A|I_2] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 + L_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{L_2 \leftarrow -1L_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array} \right]$$

Então, $A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$.

Teorema (Critério de matriz regular). Seja A uma matriz real quadrada, de ordem n . Então, são equivalentes as seguinte afirmações:

- (1) A é regular;
- (2) $r(A) = n$;
- (3) $|A| \neq 0$;
- (4) A matriz escalonada reduzida obtida a partir de A , por aplicação sucessiva de operações elementares sobre linhas, é a matriz identidade I_n .
- (5) O sistema de equações lineares $AX = B$ é possível determinado, para toda matriz coluna B , $AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1}B$.

Teorema (Determinante de uma matriz regular). Seja A uma matriz quadrada regular, de ordem n . Então,

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}.$$

Definição (Adjunta). Seja A uma matriz quadrada real, de ordem n . Chama-se complementar da matriz A , a matriz $C = [A_{ij}]$, $i, j = \overline{1, n}$, onde A_{ij} são os cofactores das entradas a_{ij} da matriz

A. Chama-se adjunta de A , a matriz $Adj(A) = C^t$.

Teorema. Seja A uma matriz quadrada de ordem n . Então:

(1) $A \cdot Adj(A) = Adj(A) \cdot A = |A|I_n$;

(2) Se A é uma matriz real regular, então $|A| \neq 0$, logo

$$A \cdot \left(\frac{1}{|A|} \cdot Adj(A) \right) = I_n \Leftrightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot Adj(A).$$

Exemplo. Seja a matriz quadrada real, de ordem 3,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Calcula-se a matriz adjunta desta matriz A :

$$\begin{aligned} A_{11} &= \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 5 & A_{12} &= - \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = -3 & A_{13} &= \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \\ A_{21} &= - \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 6 & A_{22} &= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 6 & A_{23} &= - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \\ A_{31} &= \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -7 & A_{32} &= - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -3 & A_{33} &= \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \end{aligned}$$

$$Adj(A) = C^t = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 6 & 6 & 0 \\ -7 & -3 & 2 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 5 & 6 & -7 \\ -3 & 6 & -3 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Ora, $|A| = 8 + 3 - (-4 + 3) = 12$

Nota-se que:

$$A \cdot Adj(A) = Adj(A) \cdot A = \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{bmatrix} = 12 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = |A|I_3.$$

Como é regular, tem-se:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} Adj(A) = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 5 & 6 & -7 \\ -3 & 6 & -3 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Teorema (Determinante de um produto). Admitindo que as operações entre matrizes quadradas, abaixo apresentadas, são possíveis, então:

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B|;$$

$$|A_1 \cdot A_2 \cdots A_k| = |A_1| \cdot |A_2| \cdots |A_k|, \text{ para todo } k \in \mathbb{N};$$

$$|A^k| = |A|^k, \text{ para todo } k \in \mathbb{N}.$$

Definição (Sistema de Cramer). Um sistema de equações lineares $AX=B$, com n incógnitas, diz-se sistema de Cramer, se a matriz A é invertível.

Exemplo. Sabe-se que a matriz real

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

é regular, e a sua inversa é

$$A^{-1} = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 5 & 6 & -7 \\ -3 & 6 & -3 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Logo, o sistema de equações lineares

$$A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

é um sistema de Cramer. Logo,

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 5/12 & 1/2 & -7/12 \\ -1/4 & 1/2 & -1/4 \\ 1/6 & 0 & 1/6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7/6 \\ 1/2 \\ 1/3 \end{bmatrix}$$

Teorema. Seja $AX=B$ um sistema de Cramer com n incógnitas. Representa-se por $A_i(B)$ a matriz que se obtém de A_i , substituindo a coluna i pela coluna dos termos independentes B . Então:

$$x_i = \frac{|A_i(B)|}{|A|},$$

para todo $i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$.

Exemplo. Determinar x_2 no sistema de Cramer

$$AX = B \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

$$x_2 = \frac{|A_2(B)|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 4 \end{vmatrix}}{12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}.$$

Conclusão

Pode-se calcular determinante de qualquer matriz quadrada. No cálculo de determinante de uma matriz quadrada, pode-se utilizar a definição. No entanto, as operações elementares (sobre linhas e/ou sobre colunas) têm grande importância no cálculo de determinante, quando conciliadas com outras propriedades de deste.

Determinante de uma matriz quadrada permite, entre outras coisas, identificar matriz regular e

determinar a respectiva inversa, e resolver sistema de Cramer.

Na resolução de sistema de Cramer, $AX=B$, pode-se também utilizar o facto da matriz ser regular, desta feita, tem-se $AX=B \Leftrightarrow X=A^{-1} \cdot B$.

Evaluation

Avaliação

1. Determine o valor da expressão, abaixo apresentada, sabendo que A, B e C são matrizes quadradas reais, de ordem n, e que $|A|=-2$, $|B|=3$ e $|C|=-1$:

$$\left| B^t \cdot A^{-1} \cdot B^{-1} \cdot C \cdot A^2 \cdot (C^{-1})^t \right|.$$

2. Sabendo que a matriz é quadrada de ordem n, e que

$$|2A^{-1}| = 5 = |A^2 \cdot (B^t)^{-1}|,$$

determine os valores de A e B de .

3. Calcule o determinante da seguinte matriz quadrada real, de ordem 4:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

Calcule A^{-1} .

4. Sabendo que

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = -1,$$

determine o valor de

$$\begin{vmatrix} -2a & -2b & -2c \\ 2p+x & 2q+y & 2r+z \\ 3x & 3y & 3z \end{vmatrix}.$$

5. Resolva a seguinte equação:

$$\begin{vmatrix} 0 & x-2 & 0 & 0 \\ x-1 & 0 & x & 0 \\ 0 & x & 0 & x-2 \\ 0 & 0 & x-1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

6. Considere a matriz quadrada real

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 0 & 5 & -4 \\ 8 & -6 & 2 \end{bmatrix}.$$

a. Determine $|A|$ e $\text{Adj}(A)$;

b. Verifique que $A \cdot \text{Adj}(A) = |A| I_3$;

c. Determine A^{-1} .

7. Considere o seguinte sistema de Cramer:

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 1 \\ x_2 + x_4 = -1 \\ x_1 + 2x_3 + x_4 = -1 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 1 \end{cases} .$$

a. Represente-o na forma matricial, $AX=B$;

b. Determine x_1, x_2, x_3 e x_4 pela regra de Cramer.

c. Verifique que $X=A^{-1} B$.

Actividade 4 – O Software SCILAB: aplicação na Álgebra Linear.

Introdução

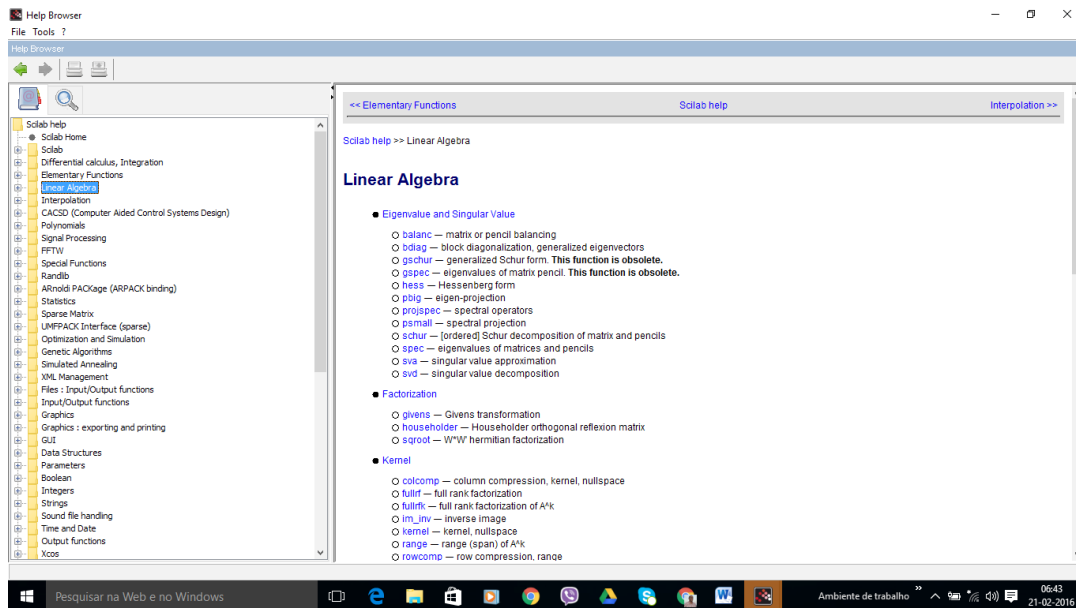
O SCILAB é um software para computação científica e visualização, com código fonte aberto, e é gratuito. Para mais informações acerca desta poderosa ferramenta para computação científica, pode-se consultar a página oficial: www.scilab.org.

Nesta actividade, vai apresentar-se algumas ferramentas de SCILAB, úteis para computação no âmbito da Álgebra Linear, como:

- Operações com matrizes (engloba cálculo de determinante e inversa);
- Resolução de sistemas de equações lineares;
- Operações com vectores em um espaço vectorial \mathbb{R}^n , $n \in \mathbb{N}$ e $n > 1$;
- Cálculo de valores e vectores próprios de uma matriz (ou endomorfismo).

A ideia é mostrar as ferramentas básicas para executar alguns cálculos, principalmente, os ligados com matrizes, uma vez que todo o resto se resume em matrizes reais.

Para mais informações, o leitor pode consultar o pacote de Álgebra Linear, na ajuda “?”:



O seu uso, não dispensa o cálculo mental, isto é, o seu papel é facilitar alguns cálculos, muito laboriosos, e confirmar certas operações realizadas.

Nesta actividade utiliza-se a seguinte versão de SCILAB: "scilab-5.4.0" (64 bit).

Detalhes da atividade

Matrizes e suas operações

Só para facilitar a anotação, vai-se representar uma matriz $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, $m, n \in \mathbb{N}$, por $A_{m \times n}$, no SCILAB por A_{mn} .

Inserção de matriz: na inserção de uma matriz no SCILAB, utiliza-se ";" (vírgula) ou " " (espaço em branco) para marcar o fim de uma entrada, e ";" para marcar o fim de uma linha. As entradas são inseridas em linhas.



Exemplo. Inserir a matriz quadrada real, de dimensão ,

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

```

Scilab Console
File Edit Control Applications ?
[Icons]
Scilab Console

-->A_44=[[-1,-1,-1,-1;-1,-1,-1,-1;1,-1,-1,-1;1,1,-1,-1]]
A_44 =

- 1. - 1. - 1. - 1.
- 1. - 1. - 1. - 1.
  1. - 1. - 1. - 1.
  1.  1. - 1. - 1.

-->

```

Exemplo. Inserir a matriz real $A=[a_{ij}], i \in \{1,2,3,4\}, j \in \{1,2,3\}$ e $a_{ij}=1/(i+j-1)$.

```

Scilab Console
File Edit Control Applications ?
[Icons]
Scilab Console

-->for i=1:4, for j=1:3, A(i,j)=1/(i+j-1); end, end

-->A
A =

  1.          0.5          0.3333333
  0.5         0.3333333    0.25
  0.3333333   0.25        0.2
  0.25        0.2         0.1666667

-->|

```

Exemplo. Inserir a matriz $B=[b_{ij}], i, j \in \{1,2,3\}$ e $b_{ij}=i-j+1$.

```

Scilab Console
File Edit Control Applications ?
[Icons]
Scilab Console

-->for i=1:3, for j=1:3, B(i,j)=i-j+1; end, end

-->B
B =

  1.  0. - 1.
  2.  1.  0.
  3.  2.  1.

-->

```

Exemplo. Sejam as matrizes reais $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 7 & -1 \\ 3 & -8 \end{bmatrix}$.

(a) Determinar $-3A + 2B - A$

```

Scilab Console
File Edit Control Applications ?
[Icons]
Scilab Console

-->A_32=[1 2; -1 0; -3 4]
A_32 =

    1.    2.
   -1.    0.
   -3.    4.

-->B_32=[-1 5; 7 -1; 3 -8]
B_32 =

   -1.    5.
    7.   -1.
    3.   -8.

-->-3*A_32+2*B_32-A_32
ans =

   -6.    2.
   18.   -2.
   18.  -32.
    
```

Exemplo. Determinar o produto AB , onde $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$.

```

Scilab Console
File Edit Control Applications ?
[Icons]
Scilab Console

-->A_23=[-1 2 -2; 0 1 3]
A_23 =

   -1.    2.   -2.
    0.    1.    3.

-->B_34=[1 2 -2 0; 3 1 -1 2; -2 1 -2 3]
B_34 =

    1.    2.   -2.    0.
    3.    1.   -1.    2.
   -2.    1.   -2.    3.

-->A_23*B_34
ans =

    9.   -2.    4.   -2.
   -3.    4.   -7.   11.
    
```

Exemplo. Calcular o determinante da matriz quadrada real

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

```

Scilab Console
File Edit Control Applications ?
Scilab Console

Startup execution:
loading initial environment

-->A=[-1 1 1 2; 0 1 -1 1; -1 2 3 2; 1 2 3 1]
A =

- 1.    1.    1.    2.
  0.    1.   -1.    1.
- 1.    2.    3.    2.
  1.    2.    3.    1.

-->[e,m]=det(A)
m =

- 7.
e =

  0.

-->det(A)
ans =

- 7.
    
```

Em $[e, m]$, m é a mantissa do determinante de A , na base 10; e e é um número inteiro, que representa o expoente de 10, quando o determinante de A é representado na base 10. Ou seja, $|A| = -7.$

Exemplo. Calcular a inversa da matriz quadrada real

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

```

Scilab Console
File Edit Control Applications ?
Scilab Console

-->A=[-1 1 1 2; 0 1 -1 1; -1 2 3 2; 1 2 3 1]
A =

- 1.    1.    1.    2.
  0.    1.   -1.    1.
- 1.    2.    3.    2.
  1.    2.    3.    1.

-->inv(A)
ans =

  0.7142857  -0.1428571  -1.    0.7142857
 -1.2857143   0.8571429   1.   -0.2857143
  0.1428571  -0.4285714   0.    0.1428571
  1.4285714  -0.2857143  -1.    0.4285714
    
```

Criação de matriz identidade: " $I_{nn} = \text{eye}(n, n)$ ", $n \in \mathbb{N}$. Se uma matriz quadrada " A ", já tinha sido inserido no "console", então basta " $\text{eye}(A)$ ".

```

Scilab Console
File Edit Control Applications ?
Scilab Console

-->I_44=eye(4,4)
I_44 =

    1.    0.    0.    0.
    0.    1.    0.    0.
    0.    0.    1.    0.
    0.    0.    0.    1.

-->A=[-1 1 1 2; 0 1 -1 1; -1 2 3 2; 1 2 3 1]
A =

   -1.    1.    1.    2.
    0.    1.   -1.    1.
   -1.    2.    3.    2.
    1.    2.    3.    1.

-->eye(A)
ans =

    1.    0.    0.    0.
    0.    1.    0.    0.
    0.    0.    1.    0.
    0.    0.    0.    1.
    
```

Matriz simétrica e anti-simétrica.

Transposta de A, A^t , no SCILAB é A' .

Exemplo. Seja uma matriz quadrada real $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

Determine uma matriz B e uma matriz C , tal que $B + C = A$.

```

Scilab Console
File Edit Control Applications ?
Scilab Console

-->A=[1 -2 2; 2 1 -2; -1 1 3]
A =

    1.   -2.    2.
    2.    1.   -2.
   -1.    1.    3.

-->B=(A+A')/2
B =

    1.    0.    0.5
    0.    1.   -0.5
    0.5  -0.5    3.

-->C=(A-A')/2
C =

    0.   -2.    1.5
    2.    0.   -1.5
   -1.5    1.5    0.

-->B+C
ans =

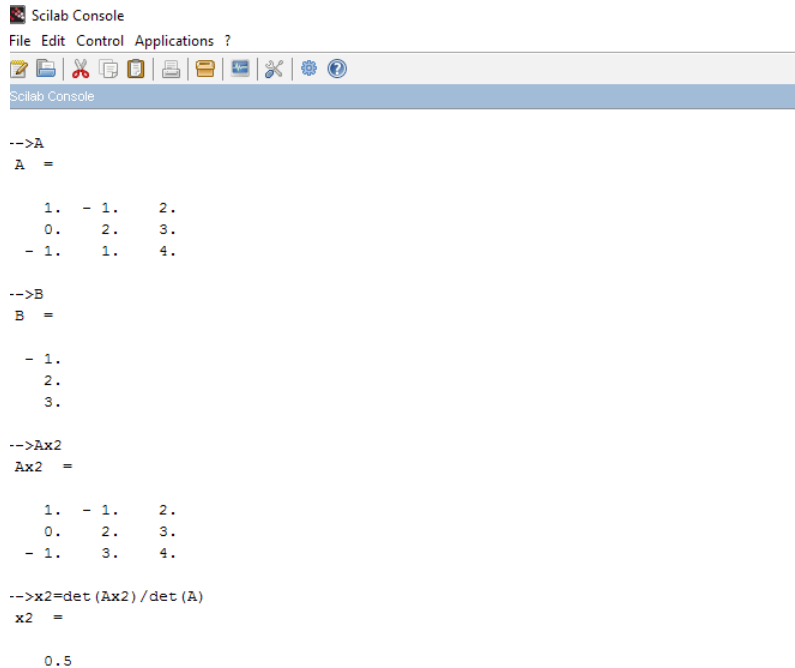
    1.   -2.    2.
    2.    1.   -2.
   -1.    1.    3.

-->
    
```

Sistema de Cramer

Exemplo. Resolver x_2 no sistema de Cramer

$$AX = B \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$



```

Scilab Console
File Edit Control Applications ?
[Icons]
Scilab Console

-->A
A =

    1.  - 1.  2.
    0.  2.  3.
   - 1.  1.  4.

-->B
B =

   - 1.
    2.
    3.

-->Ax2
Ax2 =

    1.  - 1.  2.
    0.  2.  3.
   - 1.  3.  4.

-->x2=det(Ax2)/det(A)
x2 =

    0.5
    
```

Conclusão

Com o SCILAB pode-se computar várias operações no âmbito da Álgebra Linear: operações com matrizes, cálculo de valores e vectores próprios de uma matriz (ou endomorfismo), etc.

O seu uso, não dispensa o cálculo mental, isto é, o seu papel é facilitar alguns cálculos, muito laboriosos, e confirmar certas operações realizadas.

Avaliação

Não se aplica.

Resumo da Unidade

Relativamente às operações com matrizes, só se pode adicionar matrizes com iguais dimensões, mas só se pode multiplicar matrizes se o número de colunas da primeira é igual ao número de linhas da segunda.

O método geral para a resolução de um sistema de equações lineares é o escalonamento da matriz ampliada. No entanto, os sistemas de equações lineares, com matrizes de coeficientes regulares, podem ser resolvidos através da regra de Cramer.

Pode-se determinar a inversa de uma matriz via resolução de um sistema, e via matriz adjunta (uma aplicação de determinante de matriz quadrada).

Nota-se que matrizes invertíveis são necessariamente quadradas.

Também, só se pode calcular determinantes de matrizes quadradas.

O SCILAB tem ferramentas mais do que suficientes para resolver problemas no âmbito da Álgebra Linear. Pode ser utilizado, para resolver problemas mais laboriosos, e para confirmar resultados de problemas, obtidos mentalmente.

Avaliação da Unidade

Verifique a sua compreensão!

Teste sumativo da unidade Sistema de equações lineares. Matriz e determinante

Instruções

O Teste de avaliação tem nove questões, algumas com alíneas.

Responda cada uma das questões de uma forma clara e justifique cada passo de resolução.

Critérios de Avaliação

Cada ponto ou alínea vale 10 pontos. Considera-se aprovado o estudante que tiver pelo menos 50% da cotação total.

Avaliação

(1) Discute a característica da seguinte matriz, em função dos parâmetros reais α e β :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha & \alpha/2 \\ 1 & \beta & \alpha & 1 \end{bmatrix}.$$

(2) Verifique se a matriz quadrada real

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

é raiz do polinômio $f(x) = x^2 - 5x + 4$.

(3) Sejam A e B matrizes reais regulares. Prove que se $A + B$ é regular, então

$$(A^{-1} + B^{-1})^{-1} = A \cdot (A + B)^{-1} \cdot B.$$

(4) Calcule a inversa da matriz quadrada real

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -3 & -1 & -1 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

(5) Determine a matriz quadrada real A , sabendo que

$$(A^{-1} - 3I)^t = 5 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

(6) Discute o sistema de equações lineares que se segue, em função dos parâmetros reais a e b :

$$\begin{cases} ax + y - z + aw = 0 \\ (a + 1)y + z + w = 1 \\ -x + y + (a + 1)w = b \end{cases}.$$

(a) Resolva-o para $a = -1$ e $b = -3$.

(7) Calcule o determinante da seguinte matriz quadrada real:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

(8) Se

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 7,$$

diga, justificando, qual é o valor do seguinte determinante:

$$C = \begin{bmatrix} a_1 - 5c_1 & a_2 - 5c_2 & a_3 - 5c_3 \\ 10b_1 & 10b_2 & 10b_3 \\ -4c_1 & -4c_2 & -4c_3 \end{bmatrix}.$$

(9) Considere as matrizes quadradas reais

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad e \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Determine, o valor de:

$$|A^3 \cdot B^{-1} \cdot C^t \cdot B^2 \cdot A^{-1}|.$$

Leituras e outros Recursos

As leituras e outros recursos desta unidade encontram-se na lista de Leituras e Outros Recursos do curso.

- HOWARD, A., RORRES C., Álgebra linear com aplicações, Bookman, Porto Alegre, 8. Ed., 2001;
- LIPSCHUTZ, S., Álgebra Linear – teoria e problemas, McGraw-Hill, São Paulo, 2. ed., 1994.
- MONTEIRO A., Álgebra Linear e Geometria Analítica, McGraw-Hill L.da, Lisboa, 2001.
- NICHOLSON, W. K., Álgebra Linear, McGraw-Hill, São Paulo, 3. ed., 2006.

Unidade 2. Espaço e Subespaço Vectorial Real

Introdução à Unidade

Estuda-se os espaços (e subespaços) vectoriais com destaque para espaços vectoriais de dimensão finita. Introduce-se o conceito de produto interno e estuda-se os espaços vectoriais euclidianos.

Objetivos da Unidade

Após a conclusão desta unidade, deverá ser capaz de

- Identificar um espaço vectorial e um subespaço de um determinado espaço vectorial.
- Identificar vectores linearmente dependentes e linearmente independentes.
- Constituir sistemas de vectores equivalentes.
- Determinar um subespaço gerado por um conjunto de vectores.
- Representar um subespaço vectorial através de um sistema homogéneo e através dos seus geradores.
- Determinar a soma, a intersecção e a reunião de subespaços vectoriais.
- Identificar uma soma directa.
- Determinar um subespaço complementar de um determinado subespaço vectorial.
- Determinar base e a dimensão de um espaço vectorial finitamente gerado e de um seu subespaço vectorial.
- Identificar um produto interno.
- Determinar base ortonormada de um determinado espaço vectorial.
- Determinar o produto externo de dois vectores.

Termos-chave

Espaço vectorial: Seja V um conjunto não vazio, e seja \mathbb{F} um corpo. Diz-se que V é um espaço vectorial sobre o corpo \mathbb{F} quando:

1. Define-se em V uma operação, chamada adição e representada por "+", tal que,

$$\forall \vec{u}, \vec{v} \in V, \vec{u} + \vec{v} \in V,$$

e que goze das seguintes propriedades:

(a) $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V, \vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u};$

(b) $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V, \vec{u} + (\vec{w} + \vec{v}) = (\vec{u} + \vec{w}) + \vec{v};$

(c) Existe um vector em V , denominado "**vector nulo**", e representado por $\vec{0}$, tal que

$$\forall \vec{u} \in V, \vec{u} + \vec{0} = \vec{u};$$

(d) $\forall \vec{u} \in V$, existe um vector em V , que se denomina por "**simétrico de \vec{u}** ", e que se

representa por “ $-\vec{u}$ ”, tal que $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$.

2. Define-se um produto (ou multiplicação), “denominado por **produto** (ou **multiplicação por escalar**”, tal que

$$\forall \vec{u} \in V, \forall \lambda \in \mathbb{F}, \lambda \vec{u} \in V,$$

e que goze das seguintes propriedades:

- (a) $\forall \lambda \in \mathbb{F}, \forall \vec{u}, \vec{v} \in V$, tem-se $\lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}$;
- (b) $\forall \lambda, \beta \in \mathbb{F}, \forall \vec{u} \in V$, tem-se $(\lambda + \beta)\vec{u} = \lambda\vec{u} + \beta\vec{u}$;
- (c) $\forall \lambda, \beta \in \mathbb{F}, \forall \vec{u} \in V$, tem-se $(\lambda\beta)\vec{u} = \lambda(\beta\vec{u})$;
- (d) $\forall \vec{u} \in V$, tem-se $1\vec{u} = \vec{u}$.

Quando estas condições se verificam, os elementos de V denominam-se por **vectores**, e os de \mathbb{F} , por **escalares**.

Se o corpo $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, o espaço vectorial diz-se real.

Dependência e independência linear: Seja V um espaço vectorial real. Diz-se que:

- (1) Os vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k \in V$ são linearmente independentes, se $\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \dots + \lambda_k \vec{v}_k = \vec{0}$, então $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$, ou seja, a única combinação linear nula de $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$ é a combinação linear nula trivial.
- (2) Os vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k \in V$ são linearmente dependentes, se existem escalares reais $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, não todos nulos, tais que $\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \dots + \lambda_k \vec{v}_k = \vec{0}$, ou seja, para além da combinação linear nula trivial, existe outra combinação linear de $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$.

Base de espaço vectorial: Chama-se base de um espaço vectorial real não nulo V , finitamente gerado, a um **sistema de geradores linearmente independentes**.

Por convenção, o espaço vectorial nulo $V = \{\vec{0}\}$ tem como base o conjunto vazio \emptyset .

Espaço euclidiano: Um espaço vectorial real V , com um produto interno e de dimensão finita, denota-se por espaço euclidiano.

Base ortonormada: Seja V um espaço euclidiano, de dimensão $n \in \mathbb{N}$. Diz-se que:

- (1) Uma base B de V é ortogonal se B é um sistema ortogonal de vectores.
- (2) Uma base B de V é ortonormal se B é um sistema ortonormal de vectores.

Subespaço vectorial: Seja V um espaço vectorial real e $S \subseteq V$. Diz-se que S é um subespaço vectorial de V , e representa-se por $S \leq V$ se:

- 1. $S \neq \emptyset$ (conjunto vazio);
- 2. $\forall \vec{u}, \vec{v} \in S$, tem-se $\vec{u} + \vec{v} \in S$;
- 3. $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall \vec{u} \in S$, tem-se $\lambda\vec{u} \in S$.

Actividades de Aprendizagem

Actividade 1 – Espaços vectoriais reais: definição e propriedades; base e dimensão

Introdução

Nesta actividade aborda-se o conceito de espaço vectorial e as suas principais propriedades. Dá-se destaque aos espaços vectoriais reais finitamente gerados, com realce para os espaços \mathbb{R}^n , $n \in \mathbb{N}$ e $n > 1$, e P^n , $n \in \mathbb{N}$.

Aborda-se os conceitos de dependência e independência linear, pois a eles estão associadas todas as propriedades de um espaço vectorial.

Dá-se especial atenção ao estudo de base e dimensão de um espaço vectorial.

A introdução do produto interno num espaço vectorial, permite: cálculo da norma de um vector, o cálculo do ângulo entre dois vectores, a determinação da projecção ortogonal de um vector sobre um outro vector, e sobre um subespaço vectorial.

Detalhes da actividade

Definição (Espaço vectorial real). Seja V um conjunto não vazio, e seja \mathbb{F} um corpo. Diz-se que V é um espaço vectorial sobre o corpo \mathbb{F} quando:

3. Define-se em V uma operação, chamada adição e representada por "+", tal que,
 $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V, \vec{u} + \vec{v} \in V,$

e que goze das seguintes propriedades:

(e) $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V, \vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u};$

(f) $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V, \vec{u} + (\vec{w} + \vec{v}) = (\vec{u} + \vec{w}) + \vec{v};$

- (g) Existe um vector em V , denominado "**vector nulo**", e representado por $\vec{0}$, tal que

$$\forall \vec{u} \in V, \vec{u} + \vec{0} = \vec{u};$$

- (h) $\forall \vec{u} \in V$, existe um vector em V , que se denomina por "**simétrico de \vec{u}** ", e que se representa por " $-\vec{u}$ ", tal que $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$.

4. Define-se um produto (ou multiplicação), "denominado por "**produto (ou multiplicação) por escalar**", tal que

$$\forall \vec{u} \in V, \forall \lambda \in \mathbb{F}, \lambda \vec{u} \in V,$$

e que goze das seguintes propriedades:

(e) $\forall \lambda \in \mathbb{F}, \forall \vec{u}, \vec{v} \in V$, tem-se $\lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda \vec{u} + \lambda \vec{v};$

(f) $\forall \lambda, \beta \in \mathbb{F}, \forall \vec{u} \in V$, tem-se $(\lambda + \beta)\vec{u} = \lambda \vec{u} + \beta \vec{u};$

(g) $\forall \lambda, \beta \in \mathbb{F}, \forall \vec{u} \in V$, tem-se $(\lambda\beta)\vec{u} = \lambda(\beta\vec{u});$

(h) $\forall \vec{u} \in V$, tem-se $1\vec{u} = \vec{u}$.

Quando estas condições se verificam, os elementos de V denominam-se por **vectores**, e os de \mathbb{F} , por **escalares**.

Se o corpo $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, o espaço vectorial diz-se real.

Exemplo. Seja $n \in \mathbb{N}$ e $n > 1$. Considere o conjunto

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1, n}\}$$

com as seguintes operações:

Adição (usual): $\forall \vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n), \vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n,$

$$\vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n),$$

Multiplicação por escalar (usual): $\forall \vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in \mathbb{R},$

$$\lambda \vec{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n).$$

Com estas operações \mathbb{R}^n é um espaço vectorial real. Nesta actividade estuda-se apenas os espaços vectoriais reais.

Nota-se que o vector nulo é $\vec{0} = (0, 0, \dots, 0)$, e simétrico de um vector $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ é $-\vec{x} = (-x_1, -x_2, \dots, -x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Exemplo. Seja \mathbb{P} o conjunto de todos os polinómios com coeficientes reais, e em uma só incógnita. \mathbb{P} , com a soma usual desses polinómios, e com a multiplicação usual de um número real por um polinómio, é um espaço vectorial real.

Exemplo. Seja $n \in \mathbb{N}_0$ (conjunto dos números inteiros não negativos). Seja \mathbb{P}^n , o conjunto de todos os polinómios, com coeficientes reais, e em uma só incógnita, de grau não superior a n , ou seja,

$$\mathbb{P}^n = \{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 : a_i \in \mathbb{R}, i = \overline{0, n}\}.$$

\mathbb{P}^n , com a dição usual desses polinómios, e com a multiplicação usual de um número real por um polinómio, é um espaço vectorial real.

]

Nota. O conjunto $\mathbb{P}^0 = \mathbb{R}$, isto é, o conjunto \mathbb{R} é um espaço vectorial real, com a adição usual de números reais, e com a multiplicação usual de um número real por um número real.

O vector nulo nos espaços vectoriais \mathbb{P} e \mathbb{P}^n , $n \in \mathbb{N}_0$, é $\vec{0} = 0$, e o simétrico de um vector

$$\vec{v} = p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

é

$$-\vec{v} = -p(x) = -a_n x^n - a_{n-1} x^{n-1} - \dots - a_1 x - a_0.$$

Sempre que se faça referências aos espaços vectoriais \mathbb{R}^n , \mathbb{P} e \mathbb{P}^n , sem mencionar as operações envolvidas, deve-se considerar as operações usuais nos referidos espaços vectoriais.

Definição (Subtracção). A subtracção de vectores \vec{u} e \vec{v} de um espaço vectorial real V , $\vec{u} - \vec{v}$, é definida por:

$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v}).$$

Teorema (Propriedades num espaço vectorial real). [Seja V um espaço vectorial real. Para quaisquer vectores $\vec{u}, \vec{v} \in V$, e para quaisquer escalares reais λ e β , tem-se:

- (1) $0\vec{v} = \vec{0}$;
- (2) $\lambda\vec{0} = \vec{0}$;
- (3) $\lambda\vec{v} = \vec{0}$ se, e somente se, $\lambda = 0$ ou $\vec{v} = \vec{0}$;
- (4) $(-\lambda)\vec{v} = -(\lambda\vec{v}) = \lambda(-\vec{v})$;
- (5) $\lambda(\vec{u} - \vec{v}) = \lambda\vec{u} - \lambda\vec{v}$;
- (6) $(\lambda - \beta)\vec{u} = \lambda\vec{u} - \beta\vec{u}$.

Definição (Combinação linear). Seja V um espaço vectorial real. Diz-se que um vector $\vec{v} \in V$ é combinação linear de vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n \in V$, se existirem escalares reais $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, tais que

$$\vec{v} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \dots + \lambda_n \vec{v}_n.$$

Exemplo. No espaço vectorial real \mathbb{R}^3 (com as operações usuais), o vector $\vec{v} = (-2, 2, 5)$ é combinação linear dos vectores $\vec{v}_1 = (1, 1, 1)$, $\vec{v}_2 = (1, 1, 0)$ e $\vec{v}_3 = (1, 0, 1)$?

Ora, \vec{v} é combinação linear de \vec{v}_1 , \vec{v}_2 e \vec{v}_3 se, e somente se, a equação

$$\vec{v} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \lambda_3 \vec{v}_3,$$

nas incógnitas $\lambda_i, i = \overline{1, 3}$, é possível (determinado ou indeterminado).

$$\vec{v} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \lambda_3 \vec{v}_3 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 9 \\ \lambda_2 = -7 \\ \lambda_3 = -4 \end{cases}.$$

Então, \vec{v} é combinação linear de \vec{v}_1 , \vec{v}_2 e \vec{v}_3 .

Exemplo. No espaço vectorial real \mathbb{P} , sejam os vectores

$$\vec{v} = -x^3 - 2x^2 + x + 1, \vec{v}_1 = x^3 + 3x - 1, \vec{v}_2 = -x^3 - x^2 - x + 1 \text{ e } \vec{v}_3 = -5x^3 - 4x^2 - 7x + 5.$$

O vector \vec{v} é combinação linear dos vectores \vec{v}_1 , \vec{v}_2 e \vec{v}_3 ?

O vector \vec{v} é combinação linear dos vectores \vec{v}_1 , \vec{v}_2 e \vec{v}_3 se, e somente se, a equação

$$\vec{v} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \lambda_3 \vec{v}_3,$$

nas incógnitas $\lambda_i, i = \overline{1,3}$, é possível (determinado ou indeterminado).

$$\vec{v} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \lambda_3 \vec{v}_3 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -5 \\ 0 & -1 & -4 \\ 3 & -1 & -7 \\ -1 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 + \beta \\ \lambda_2 = 2 - 4\beta \\ \lambda_3 = \beta \in \mathbb{R} \end{cases}.$$

Então, \vec{v} é combinação linear de \vec{v}_1 , \vec{v}_2 e \vec{v}_3 , neste caso, existem infinitas combinações lineares, de \vec{v}_1 , \vec{v}_2 , \vec{v}_3 , iguais a \vec{v} .

Definição (Combinação linear nula trivial). Num espaço vectorial real V , o vector nulo, $\vec{0}$, é combinação linear de qualquer sistema de vectores, basta tomar todos os escalares iguais a zero na combinação linear. A essa combinação linear nula, dá-se o nome de **combinação linear nula trivial**.

Definição (Equivalência de sistema de vectores). Seja V um espaço vectorial real. Sejam

$$S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p\} \text{ e } S' = \{\vec{v}'_1, \vec{v}'_2, \dots, \vec{v}'_r\}$$

dois sistemas de vectores contidos em V . Diz-se que o sistema de vectores S é equivalente ao sistema de vectores S' , e escreve-se $S \approx S'$, se $\forall i \in \{1, 2, \dots, p\}$, \vec{v}_i é combinação linear dos vectores de S' , e $\forall j \in \{1, 2, \dots, r\}$, \vec{v}'_j é combinação linear dos vectores de S .

Teorema (Propriedades de equivalência de sistema de vectores). Sejam S , S' e S'' sistemas de vectores contidos num espaço vectorial real V .

- (1) $S \approx S$;
- (2) Se $S \approx S'$ então $S' \approx S$;
- (3) Se $S \approx S'$ e $S' \approx S''$, então $S \approx S''$;
- (4) $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_i, \dots, \vec{v}_p\} \approx \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \lambda \vec{v}_i, \dots, \vec{v}_p\}$, onde $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;
- (5) $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_i, \dots, \vec{v}_j, \dots, \vec{v}_p\} \approx \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_i, \dots, \lambda \vec{v}_i + \vec{v}_j, \dots, \vec{v}_p\}$, onde $\lambda \in \mathbb{R}$;
- (6) Se $S \approx S'$ e \vec{v} é combinação linear dos vectores de S , então \vec{v} é combinação linear de S' .

Definição (Gerador de um espaço vectorial). Seja V um espaço vectorial real. Seja

$$S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\} \subset V.$$

Diz-se que o espaço vectorial real V é gerado por S , ou pelos vectores de S , e escreve-se $V = \langle S \rangle$ ou $V = \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n \rangle$, se qualquer vector $\vec{v} \in V$ é combinação linear dos vectores de S .

Exemplo. No espaço vectorial \mathbb{R}^3 , sejam os vectores

$$\vec{v}_1 = (1, 2, 1), \vec{v}_2 = (2, 1, 1), \vec{v}_3 = (1, -1, 0).$$

\mathbb{R}^3 é gerado por $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$?

$\mathbb{R}^3 = \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \rangle$ se, e somente se, a equação

$$\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \lambda_3 \vec{v}_3 = (x, y, z),$$

nas incógnitas λ_1, λ_2 , e λ_3 , é possível para todo vector $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \lambda_3 \vec{v}_3 = (x, y, z) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -x + 2z + \lambda \\ \lambda_2 = x - z - \lambda \\ \lambda_3 = \lambda \in \mathbb{R} \end{cases} \text{ e } y + x - 3z = 0.$$

Ou seja, os vectores $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ que são combinações lineares dos vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$, são aqueles que satisfazem a condição $y + x - 3z = 0 \Leftrightarrow x = -y + 3z$, isto é, os vectores $(-y + 3z, y, z)$, para quaisquer valores reais de y e z . Por exemplo, os vectores $\vec{u} = (\beta, 1, 2)$, para quaisquer valores reais $\beta \neq 5$, não são combinações lineares dos vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$. Sendo assim, \mathbb{R}^3 não é gerado por esses vectores.

Exemplo. No espaço vectorial \mathbb{R}^3 , sejam os vectores

$$\vec{v}_1 = (1, 1, -2), \vec{v}_2 = (1, 1, 1), \vec{v}_3 = (-1, 1, 1).$$

\mathbb{R}^3 é gerado por $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$?

$\mathbb{R}^3 = \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \rangle$ se, e somente se, a equação

$$\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \lambda_3 \vec{v}_3 = (x, y, z),$$

nas incógnitas λ_1, λ_2 , e λ_3 , é possível para todo vector $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \lambda_3 \vec{v}_3 = (x, y, z) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = (y - z)/3 \\ \lambda_2 = (3x + y + 2z)/6 \\ \lambda_3 = (y - x)/2 \end{cases}$$

Nota-se que o sistema é possível determinado, para quaisquer valores reais de x, y e z , ou seja, os vectores $\mathbb{R}^3 = \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \rangle$.

Teorema. Seja V um espaço vectorial real. Então:

- (1) Se $V = \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k \rangle$ e $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\} \approx \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_r\}$, então $V = \langle \vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_r \rangle$.
- (2) Se $V = \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k \rangle = \langle \vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_r \rangle$, então $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\} \approx \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_r\}$.

Definição (Espaço finitamente gerado). Um espaço vectorial real V diz-se **finitamente gerado**, se existe um sistema finito de vectores, $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$, tais que $V = \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k \rangle$.

Exemplo. Os espaços vectoriais reais \mathbb{R}^n , $n \in \mathbb{N}$ e $n > 1$, e \mathbb{P}^n , $n \in \mathbb{N}_0$. No entanto, o espaço vectorial real \mathbb{P} , não é finitamente gerado.

Definição (Dependência e independência linear). Seja V um espaço vectorial real. Diz-se que:

- (3) Os vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k \in V$ são linearmente independentes, se $\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \dots + \lambda_k \vec{v}_k = \vec{0}$, então $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$, ou seja, a única combinação linear nula de $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$ é a combinação linear nula trivial.
- (4) Os vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k \in V$ são linearmente dependentes, se existem escalares reais $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, não todos nulos, tais que $\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \dots + \lambda_k \vec{v}_k = \vec{0}$, ou seja, para além da combinação linear nula trivial, existe outra combinação linear de $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$.

Exemplo. No espaço vectorial real \mathbb{R}^3 , sejam os vectores

$$\vec{v}_1 = (1, 1, 1), \vec{v}_2 = (-2, 1, 1), \text{ e } \vec{v}_3 = (1, -1, 1).$$

Verificar a dependência ou independência linear dos vectores \vec{v}_1, \vec{v}_2 e \vec{v}_3 .

Ora, os vectores \vec{v}_1, \vec{v}_2 e \vec{v}_3 são **linearmente dependente (independente)** se a equação

$$\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \lambda_3 \vec{v}_3 = \vec{0},$$

nas incógnitas λ_1, λ_2 e λ_3 , é **possível indeterminado (determinado)**.

$$\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \lambda_3 \vec{v}_3 = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Sendo assim, os vectores \vec{v}_1, \vec{v}_2 e \vec{v}_3 são linearmente independentes.

Nota (Uma outra forma de resolver o exercício anterior). Nota-se que a equação anterior é possível determinado, isto é, tem uma única solução, se

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0;$$

Caso contrário, seria possível indeterminado. Como $|A| = 6$, então o sistema é possível determinado e, conseqüentemente, os vectores são linearmente independentes.

Exemplo. No espaço vectorial real \mathbb{P} , sejam os seguintes vectores

$$\vec{v}_1 = x^2 + x + 1, \vec{v}_2 = -2x^2 + x + 1, \text{ e } \vec{v}_3 = 3x + 3.$$

Verificar se estes vectores são linearmente, dependentes ou independentes.

Ora,

$$\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \lambda_3 \vec{v}_3 = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -2\lambda \\ \lambda_2 = -\lambda \\ \lambda_3 = \lambda \in \mathbb{R} \end{cases}$$

isto é, a equação é possível indeterminado, logo os vectores são linearmente dependentes.

Nota. Como

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0,$$

pode-se concluir que os vectores \vec{v}_1, \vec{v}_2 e \vec{v}_3 são linearmente dependentes.

Teorema (Propriedades da dependência e independência linear). Seja V um espaço vectorial real. Então:

- (1) Um vector $\vec{v} \in V$ é linearmente dependente se, e somente se, $\vec{v} = \vec{0}$;
- (2) Os vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k \in V$ são linearmente dependentes se, e somente se, um deles é combinação linear dos restantes.
- (3) Os vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k \in V$ são linearmente dependentes, então os vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k, \vec{v}_{k+1}, \vec{v}_{k+2}, \dots, \vec{v}_{k+t} \in V$, $t \in \mathbb{N}$, são, também, linearmente dependentes.
- (4) Qualquer subsistema de um sistema linearmente independente é linearmente independente.
- (5) Qualquer sistema de vectores que inclua o vector nulo é linearmente dependente.
- (6) Se os vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k \in V$ são linearmente independentes, então $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k, \vec{v} \in V$ são linearmente dependentes se, e somente se, \vec{v} é combinação linear de $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$.
- (7) Se $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_i, \dots, \vec{v}_p$ são linearmente independentes, então $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \lambda \vec{v}_i, \dots, \vec{v}_p$, onde $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, são linearmente independentes.
- (8) Se $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_i, \dots, \vec{v}_j, \dots, \vec{v}_p$ são linearmente independentes, então $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_i, \dots, \lambda \vec{v}_i + \vec{v}_j, \dots, \vec{v}_p$, onde $\lambda \in \mathbb{R}$, são, também, linearmente independentes.
- (9) Os vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k \in V$ são linearmente independentes se, e somente se, qualquer vector $\vec{v} \in V$, que se possa expressar como combinações lineares deles, tem coeficientes únicos nessa expressão.

Característica de uma matriz / Dependência e independência lineares

Seja A uma matriz real, de dimensão de $m \times n$, onde $m, n \in \mathbb{N}$. Cada linha da matriz A pode ser vista como um vector de \mathbb{R}^n , chamado **vector-linha**, e cada coluna da matriz A pode ser vista como um vector de \mathbb{R}^m , chamado **vector-coluna**. Assim,

- (1) No conjunto de vectores-linha de A , o número de vectores-linha linearmente independentes é igual à característica de A . Os vectores-linha linearmente independentes são aquelas que correspondem às linhas não nulas da matriz escalonada que se obtém de A .
- (2) No conjunto de vectores-coluna de A , o número de vectores-coluna linearmente independentes é igual à característica de A . Os vectores-coluna linearmente independentes são aquelas que correspondem às colunas não nulas da matriz escalonada que se obtém de A .

Definição (Subsistema independente maximal). Seja V um espaço vectorial real, e seja S um sistema de vectores, não todos nulos, de V . Um subsistema S_m diz-se independente maximal se é independente, mas se torna dependente se lhe acrescentar qualquer outro vector de S .

Teorema. Seja V um espaço vectorial real, e seja S um sistema de vectores, não todos nulos, de V . Então, existe um subsistema independente maximal S_m de S . Mais ainda, todo subsistema independente maximal de S tem o mesmo número de vectores.

Teorema. Seja $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k, \vec{v}_{k+1}, \vec{v}_{k+2}, \dots, \vec{v}_{k+t}\}$ um sistema de vectores, de um espaço vectorial real V . Suponha-se que $S_m = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}$ é um subsistema independente maximal de S . Então, $S_m \approx S$.

Nota. É claro que se S for linearmente independente, existe um único subsistema independente maximal S_m de S , que é o próprio S .

Exemplo. No espaço vectorial real \mathbb{R}^3 , sejam os vectores
 $\vec{v}_1 = (1,1,1), \vec{v}_2 = (-2,1,1), \vec{v}_3 = (-3,3,3)$.
 Determinar um subsistema independente maximal S_m de $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$.

Seja a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix},$$

cujas colunas são as componentes dos vectores $\vec{v}_i, i = \overline{1,3}$. A característica de A dá o número de vectores de qualquer subsistema independente maximal de S , e forma escalonada de A permite calcular um subsistema independente maximal de S .

Ora,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

então, $S_m = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$.

Exemplo. No espaço vectorial real \mathbb{P} , sejam os seguintes vectores
 $\vec{v}_1 = x^2 - 1, \vec{v}_2 = x^2 + 2x + 1, \vec{v}_3 = x + 1, \vec{v}_4 = -3x^2 - x + 2$.
 Determinar um subsistema independente maximal S_m de $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\}$.

Seja a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

cujas colunas são os coeficientes dos vectores (polinómios) $\vec{v}_i, i = \overline{1,4}$.

Ora,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

então, $S_m = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$.

Teorema de Steinitz

Lema (Do Teorema de Steinitz). Seja V um espaço vectorial real, e sejam

$$\vec{u}, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_{i-1}, \vec{v}_i, \vec{v}_{i+1}, \dots, \vec{v}_k \in V,$$

com $\vec{u} \neq \vec{0}$. Se

$$\vec{u} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \dots + \lambda_{i-1} \vec{v}_{i-1} + \lambda_i \vec{v}_i + \lambda_{i+1} \vec{v}_{i+1} + \dots + \lambda_k \vec{v}_k,$$

com $\lambda_i \neq 0$, para algum $i \in \{1, 2, \dots, k\}$.

Teorema (De Steinitz). Sejam $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p$ vectores linearmente independentes, de um espaço vectorial real V . Suponha-se que cada um dos vectores $\vec{u}_i, i = \overline{1,p}$ é combinação linear de certos vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$ de V . Então, é possível substituir p dos vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$ pelos vectores $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p$, e obter um sistema equivalente a $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$.

Exemplo (Aplicação do Teorema de Steinitz). No espaço vectorial real \mathbb{R}^3 , sejam os vectores

$$\vec{u}_1 = (6, -2, 1), \vec{u}_2 = (-1, 4, 4), \vec{v}_1 = (1, 1, 2), \vec{v}_2 = (-2, 1, 1), \vec{v}_3 = (1, -1, 1).$$

- Verificar se é possível substituir dois vectores no sistema $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ pelos vectores \vec{u}_1 e \vec{u}_2 , obtendo desta forma um sistema S' equivalente a S .
- Em caso afirmativo, determinar S' .

Alínea (a). Ora, \vec{u}_1 e \vec{u}_2 tem que ser linearmente independentes (e são, pois não são proporcionais), e cada um deles tem que ser combinação linear dos vectores $\vec{v}_i, i = \overline{1,3}$, ou seja,

$$\vec{u}_1 = \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \lambda_3 \vec{v}_3 \text{ e } \vec{u}_2 = \beta_1 \vec{v}_1 + \beta_2 \vec{v}_2 + \beta_3 \vec{v}_3,$$

Para alguns escalar reais $\lambda_i, \beta_i, i = \overline{1,3}$.

$$[A|B_1 B_2] = \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & -2 & 1 & 6 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 4 \end{array} \right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right]$$

Ou seja, $\vec{u}_1 = \vec{v}_1 - 2\vec{v}_2 + \vec{v}_3$ e $\vec{u}_2 = 2\vec{v}_1 + \vec{v}_2 - \vec{v}_3$.

Alínea (b). Pelo Lema do Teorema de Steinitz, $S \approx S_1 = \{\vec{u}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$.

Como \vec{v}_1 foi substituído por \vec{u}_1 , tem-se:

$$\vec{u}_1 + 2\vec{v}_2 - \vec{v}_3 = \vec{v}_1,$$

logo

$$\vec{u}_2 = 2(\vec{u}_1 + 2\vec{v}_2 - \vec{v}_3) + \vec{v}_2 - \vec{v}_3 = 2\vec{u}_1 + 3\vec{v}_2 - 2\vec{v}_3.$$

Pelo Lema do Teorema de Steinitz, $S_1 \approx S' = \{\vec{u}_1, \vec{v}_2, \vec{u}_2\}$. Como $S \approx S_1$ e $S_1 \approx S'$, então $S \approx S'$.

Consequências do Teorema de Steinitz

Corolário 1. Se num espaço vectorial real, p vectores linearmente independentes se podem escrever como combinações lineares de k vectores quaisquer, então $p \leq k$.

Corolário 2. Num espaço vectorial real V , dois sistemas equivalentes de vectores, ambos linearmente independentes, têm o mesmo número de vectores.

Corolário 3. Num espaço vectorial real V , dois sistemas equivalentes de vectores, com o mesmo número de vectores, têm a mesma natureza, ou seja, ambos dependentes ou independentes.

Base e dimensão de um espaço vectorial real

Definição (Base de um espaço vectorial finitamente gerado). Chama-se base de um espaço vectorial real não nulo V , finitamente gerado, a um **sistema de geradores linearmente independentes**.

Por convenção, o espaço vectorial nulo $V = \{\vec{0}\}$ tem como base o conjunto vazio \emptyset .

Nota. Por convenção, **os vectores de uma base são considerados escritos por uma ordem determinada**, pelo que os mesmos vectores, por uma outra ordem, formam uma ordem diferente da primeira.

Teorema. Todo espaço vectorial real V , finitamente gerado, tem pelo menos uma base.

Teorema. Duas bases do mesmo espaço vectorial real V , finitamente gerado, têm o mesmo número de vectores.

Definição (Dimensão de um espaço vectorial finitamente gerado). Chama-se dimensão de um espaço vectorial real V , finitamente gerado, ao número de vectores de uma sua base qualquer, e representa-se por $\dim(V)$.

Um espaço vectorial real finitamente gerado diz-se de **dimensão finita**, enquanto um espaço vectorial real não finitamente gerado diz-se de **dimensão infinita**.

Teorema (Dimensão / Base). Seja V um espaço vectorial real, de dimensão $n \in \mathbb{N}$. Então:

- (1) Qualquer sistema de n vectores, de V , linearmente independentes, forma uma base.
- (2) Qualquer sistema de n geradores de V forma uma base.
- (3) Qualquer sistema com mais de n vectores é linearmente dependentes.
- (4) Se $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k \in V$ são linearmente independentes, então pode-se constituir uma base de V que inclui esses vectores (basta aplicar o Teorema de Steinitz, a partir de uma base qualquer de V).

Definição (Dimensão de um espaço vectorial real finitamente gerado). Seja

$$B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}$$

uma base dum espaço vectorial real V . Então, cada vector $\vec{v} \in V$ escreve-se de uma única maneira como combinação linear dos vectores de B , ou seja, existem escalares reais únicos $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, tais que

$$\vec{v} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \dots + \lambda_k \vec{v}_k$$

Neste caso, os escalares reais únicos $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ chamam-se componentes do vector \vec{v} na base B , e escreve-se

$$\vec{v} \equiv_B (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k).$$

Nota. As componentes de um vector, num espaço vectorial real de dimensão k , é uma lista com k números reais.

Componentes de um vector e o próprio vector são coisas distintas. Um vector é um elemento bem definido de um espaço vectorial real V , enquanto as suas componentes é uma sequência de números reais, cujos valores dependem da base considerada.

Bases canónicas de \mathbb{R}^n , $n \in \mathbb{N}$ e $n > 1$.

I

$B = \{(1,0,0, \dots, 0), (0,1,0, \dots, 0), (0,0,1, \dots, 0), \dots, (0,0,0, \dots, 1)\}$ é a base canónica de \mathbb{R}^n . Logo $\dim(\mathbb{R}^n) = n$.

Bases canónicas de \mathbb{P}^n , $n \in \mathbb{N}_0$.

$B = \{x^n, x^{n-1}, x^{n-2}, \dots, x, 1\}$ é a base canónica de \mathbb{P}^n . Logo $\dim(\mathbb{P}^n) = n + 1$.

Exemplo. Verificar se o conjunto $B = \{\vec{v}_1 = (1, -1, 2), \vec{v}_2 = (0, 1, 1), \vec{v}_3 = (2, -2, 1)\}$ é uma base do espaço vectorial real \mathbb{R}^3 .

Como $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$, então B é base de \mathbb{R}^3 se é linearmente independente, ou seja, se a característica da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

é igual a 3.

$c(A) = 3$ se, e somente se, $|A| \neq 0$. $|A| = -3$, então B é uma base de \mathbb{R}^3 .

Exemplo. Determinar as componentes do vector $\vec{v} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, na base B do exemplo anterior.

Ora

$$\vec{v} = (x, y, z) = \lambda_1(1, -1, 2) + \lambda_2(0, 1, 1) + \lambda_3(2, -2, 1),$$

para alguns escalares reais $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = (-3x - 2y + 2z)/3 \\ \lambda_2 = x + y \\ \lambda_3 = (3x + y - z)/3 \end{cases}$$

$$\vec{v} \equiv_B \left(\frac{-3x - 2y + 2z}{3}, x + y, \frac{3x + y - z}{3} \right).$$

Exemplo. No espaço vectorial real \mathbb{P}^2 , determinar as componentes do vector $\vec{v} = -3x^2 - x - 2$ em relação à base $B = \{x^2, x - 1, -x^2 + 2\}$.

Ora

$$\vec{v} = -3x^2 - x - 2 = \lambda_1 x^2 + \lambda_2 (x - 1) + \lambda_3 (-x^2 + 2),$$

para alguns escalares reais $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -9/2 \\ \lambda_2 = -1 \\ \lambda_3 = -3/2 \end{cases}$$

Então,

$$\vec{v} \equiv_B \left(\frac{-9}{2}, -1, \frac{-3}{2} \right).$$

Exemplo. No espaço vectorial real \mathbb{R}^3 , sejam os vectores $\vec{v}_1 = (1, 1, \lambda)$, $\vec{v}_2 = (0, 1, -\lambda)$ e $\vec{v}_3 = (\lambda, 1, -1)$. Determinar os valores reais de λ de modo que $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ seja uma base de \mathbb{R}^3 .

Seja a matriz real

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ 1 & 1 & 1 \\ \lambda & -\lambda & -1 \end{bmatrix}. \quad \text{I}$$

B é base se, e somente se, os vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ são linearmente independentes. Mas, $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ são linearmente independentes se, e somente se, $|A| \neq 0$.

$|A| \neq 0 \Leftrightarrow -\lambda^2 + \lambda - 1 \neq 0$. Como $-\lambda^2 + \lambda - 1 < 0$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, então B é base de \mathbb{R}^3 , para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

Conclusão

É fundamental o conhecimento das propriedades dos vectores num espaço vectorial real.

A noção de combinação linear, no espaço vectorial real, dá origem a outros conceitos fundamentais, como dependência e independência linear, gerador e, conseqüentemente, base e dimensão.

Avaliação

- (1) Sejam \vec{v}_1, \vec{v}_2 e \vec{v}_3 vectores linearmente independentes dum espaço vectorial real V . Que pode dizer-se sobre a dependência e independência linear do sistema $S = \{\vec{v}_1 + \vec{v}_2, \vec{v}_1 + \vec{v}_3, \vec{v}_2 + \vec{v}_3\}$.
- (2) Diga para que valores do parâmetro real α , o conjunto $B = \{(1, 1, \alpha), (\alpha, 1, 1), (-1, 1, \alpha)\}$ é uma base do espaço vectorial real \mathbb{R}^3 .
- (3) No espaço vectorial real \mathbb{P}^3 , considere a base $B = \{x^3 - x^2, x^2 - x, x - 1, -x + 2\}$.
 - (a) Justifique que é possível obter uma base do espaço vectorial real \mathbb{P}^3 , que inclua os vectores $\vec{u} = x^3 - x^2 + x + 1$, $\vec{w} = x^3 + x - 1$.
 - (b) Aplique o Teorema de Steinitz para obter tal base.
- (4) Sejam $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ e \vec{v}_4 vectores linearmente independentes de um espaço vectorial real V . Determine uma base e a dimensão do espaço vectorial real $X = \langle \vec{v}_1 + \vec{v}_2, \vec{v}_2 - 2\vec{v}_4, \vec{v}_1 + 2\vec{v}_4, \vec{v}_4 \rangle$.
- (5) No espaço vectorial real \mathbb{R}^3 , determine as componentes do vectorial $\vec{v} = (-1, 1, 3)$ em relação à base $B = (1, 1, 1), (-1, 0, 1), (-2, 1, 2)$.

Actividade 2 – Subespaço vectorial: definição e propriedades; operações

Introdução

Nesta actividade define-se subespaço vectorial e dá-se principal destaque aos subespaços de espaços vectoriais finitamente gerado. Representa-se um subespaço em diversas formas e faz-se algumas operações com subespaços, nomeadamente a soma, a intersecção e a reunião.

Introduz-se o conceito da soma directa, que tem muita importância na determinação de um subespaço complementar de um determinado subespaço vectorial finitamente gerado.

Introduz-se o teorema das dimensões, que relaciona as dimensões de dois subespaços finitamente gerados com a dimensão da respectiva soma.

Detalhes da actividade

Definição (Subespaço vectorial). Seja V um espaço vectorial real e $S \subseteq V$. Diz-se que S é um subespaço vectorial de V , e representa-se por $S \leq V$ se:

4. $S \neq \emptyset$ (conjunto vazio);
5. $\forall \vec{u}, \vec{v} \in S$, tem-se $\vec{u} + \vec{v} \in S$;
6. $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall \vec{u} \in S$, tem-se $\lambda \vec{u} \in S$.

Teorema (Critério de subespaço vectorial). Seja V um espaço vectorial real e $S \subseteq V$. Diz-se que S é um subespaço vectorial de V se:

1. $S \neq \emptyset$;
2. $\forall \lambda, \beta \in \mathbb{R}, \forall \vec{u}, \vec{v} \in S$, tem-se $\lambda \vec{u} + \beta \vec{v} \in S$.

Teorema. Seja V um espaço vectorial real e $S \leq V$. Então:

1. $\vec{0} \in S$;
2. Se $\vec{u} \in S$, então $-\vec{u} \in S$;
3. S é um espaço vectorial real, em relação às restrições das operações definidas em V ao conjunto S .

Exemplo. Seja V um espaço vectorial real arbitrário. Então $V \leq V$ (**subespaço impróprio de V**) e $\{\vec{0}\} \leq V$ (**subespaço nulo de V**).

Exemplo. No espaço vectorial real \mathbb{R}^3 , considera-se o subconjunto

$$S = \{(a, b, 0) : a, b \in \mathbb{R}\} \text{ (O plano } \mathcal{O}xy, \text{ plano de equação } z = 0\text{)}.$$

Nota-se que $S \leq \mathbb{R}^3$, pois:

Exemplo. No espaço vectorial \mathbb{P}^2 , considera-se o subconjunto

$$S = \{ax^2 + bx + 1 : a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Nota-se que $S \not\leq \mathbb{P}^2$. Basta ver que o vector nulo, o zero (0), não pertence a S .

Doutro modo, pode-se facilmente constatar que a soma de quaisquer dois vectores de S não pertence a S , ou então que o produto escalar de qualquer número real $\lambda \neq 1$ por um vector de S não pertence a S .

Observação. Dado um espaço vectorial real V e um seu subconjunto S , se existe dois vectores de S cuja soma não está em S , ou se o produto escalar de um determinado número real por um determinado vector de S não está em S , ou se o vector nulo não está em S , então $S \not\leq V$.

Teorema. Seja V um espaço vectorial real finitamente gerado, e seja $S \leq V$. Então:

1. S é finitamente gerado;
2. $\dim(S) \leq \dim(V)$;
3. $\dim(S) = \dim(V)$ se, e somente se, $S = V$. I

Exemplo. O subespaço vectorial de \mathbb{R}^3 , $S = \{(a, b, 0) : a, b \in \mathbb{R}\}$, tem dimensão 2. Com efeito,

$$\begin{aligned} S &= \{(a, b, 0) : a, b \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(a, 0, 0) + (0, b, 0) : a, b \in \mathbb{R}\} \\ &= \{\alpha(1, 0, 0) + b(0, 1, 0) : a, b \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle (1, 0, 0), (0, 1, 0) \rangle \end{aligned}$$

Como os vectores $(1, 0, 0)$ e $(0, 1, 0)$ geram o subespaço vectorial S e são linearmente independentes, então constituem uma base de S , logo $\dim(S) = 2$.

Definição (subespaço gerado). Seja V um espaço vectorial real, e seja $X = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\} \subseteq V$. O conjunto S composto por todas as combinações lineares dos vectores de X , ou seja,

$$S = \{\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \dots + \lambda_k \vec{v}_k : \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}\}$$

é um subespaço vectorial de V , denominado subespaço gerado por X , e representado por $S = \langle X \rangle$. Por convenção, $\langle \emptyset \rangle = \{\vec{0}\}$.

Exemplo. No espaço vectorial real \mathbb{P}^2 , seja $X = \{x^2 - x + 1, -2x^2 - 3x\}$. O subespaço vectorial gerado por X é:

$$\begin{aligned} S &= \langle X \rangle \\ &= \{\alpha(x^2 - x + 1) + \beta(-2x^2 - 3x) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(\alpha - 2\beta)x^2 + (-\alpha - 3\beta)x + \alpha : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Teorema. O conjunto-solução de um sistema de equações lineares homogéneas, com coeficientes reais e com n incógnitas, é um subespaço vectorial do espaço vectorial real \mathbb{R}^n .

Exemplo. Considere o seguinte sistema de equações lineares sobre o corpo \mathbb{R} :

$$\begin{cases} x - 2y + z - w = 0 \\ -x + y + 2z - w = 0 \end{cases}$$

Como o sistema de equações lineares homogéneas tem 4 incógnitas, então o seu conjunto-solução é um subespaço vectorial de \mathbb{R}^4 .

Determina-se este subespaço vectorial:

$$[A|B] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & -1 & 0 \end{array} \right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -5 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & 0 \end{array} \right] \leftrightarrow \begin{cases} x = 5\alpha - 3\beta \\ y = 3\alpha - 2\beta \\ z = \alpha \in \mathbb{R} \\ w = \beta \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Então,

$S = \{(5\alpha - 3\beta, 3\alpha - 2\beta, \alpha, \beta) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = \langle (5, 3, 1, 0), (-3, -2, 0, 1) \rangle$ é um subespaço vectorial de \mathbb{R}^4 , de dimensão 2.

Teorema. Seja V um espaço vectorial de dimensão n , e seja $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ uma sua base. Seja S um subespaço vectorial de V com dimensão k . Então, é possível constituir um sistema de " $n - k$ " equações lineares homogêneas, com coeficientes reais, cujas soluções são as componentes dos vectores de S , em relação à base B de V , considerada inicialmente.

Observação. O teorema anterior estabelece que todo subespaço de um espaço vectorial de dimensão finita, pode ser representado por um sistema de equações lineares homogêneas, em relação à uma determinada base.

Exemplo. No espaço vectorial real \mathbb{P}^2 , considera-se o subespaço vectorial S definido pelo sistema homogêneo

$$x - y + z = 0,$$

em relação:

- À base canónica.
- Em relação à base $B = \{x^2 - x, x - 1, x^2 + 2\}$.

Determinar S e uma base.

Neste caso, primeiramente, resolve-se o sistema dado.

$$x - y + z = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha - \beta \\ y = \alpha \in \mathbb{R} \\ z = \beta \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Para a primeira **alínea (a)**,

$$S = \{(\alpha - \beta)x^2 + \alpha x + \beta : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = \langle x^2 + x, -x^2 + 1 \rangle$$

Como os vectores $x^2 + x$ e $-x^2 + 1$ geram S e são linearmente independentes, então

- $S = \{ax^2 + bx + c : a - b + c = 0\}$.
- $S = \{a(x^2 - x) + b(x - 1) + c(x^2 + 2) : a - b + c = 0\}$.

Para determinar S procede-se da mesma forma, isto é, resolve-se o sistema homogêneo dado, e substitui-se as respectivas variáveis no vector genérico de S , ou seja:

$$a - b + c = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = \alpha - \beta \\ b = \alpha \in \mathbb{R} \\ c = \beta \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Logo,

- $S = \{(\alpha - \beta)x^2 + \alpha x + \beta : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = \langle x^2 + x, -x^2 + 1 \rangle$.
- $S = \{(\alpha - \beta)(x^2 - x) + \alpha(x - 1) + \beta(x^2 + 2) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = \langle x^2 - 1, x + 2 \rangle$.

Exemplo. No espaço vectorial real \mathbb{P}^2 , seja $S = \langle x^2 - 1, x + 2 \rangle$. Representar S por intermédio de um sistema homogéneo, em relação à:

- Base canónica;
- Base $B = \{x^2 - 1, x - 1, -x^2 + x + 1\}$.

Para a primeira **alínea (a)**, há que determinar a condição nas variáveis a, b e c tal que $\alpha(x^2 - 1) + \beta(x + 2) = ax^2 + bx + c$, ou seja, a condição para o qual os vectores de S são combinações lineares dos vectores da base canónica de \mathbb{P}^2 .

$$[A|B] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ -1 & 2 & c \end{array} \right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & a - 2b + c \end{array} \right]$$

Então,

$$S = \{ax^2 + bx + c : a - 2b + c = 0\}.$$

Para a segunda **alínea (b)**, há que determinar a condição nas variáveis a, b e c tal que $\alpha(x^2 - 1) + \beta(x + 2) = a(x^2 - 1) + b(x - 1) + c(-x^2 + x + 1)$, ou seja, a condição para o qual os vectores de S são combinações lineares dos vectores da base B de \mathbb{P}^2 .

$$\begin{aligned} \alpha(x^2 - 1) + \beta(x + 2) &= a(x^2 - 1) + b(x - 1) + c(-x^2 + x + 1) \\ \Leftrightarrow \alpha(x^2 - 1) + \beta(x + 2) &= (a - c)x^2 + (b + c)x - a - b + c \end{aligned}$$

$$[A|B] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & a - c \\ 0 & 1 & b + c \\ -1 & 2 & -a - b + c \end{array} \right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & a - c \\ 0 & 1 & b + c \\ 0 & 0 & -3b - 2c \end{array} \right]$$

Então,

$$S = \{a(x^2 - 1) + b(x - 1) + c(-x^2 + x + 1) : -3b - 2c = 0\}.$$

Exemplo. No espaço vectorial real \mathbb{R}^3 , seja o subespaço vectorial $S = \langle (1, -1, 2) \rangle$. Representar S por intermédio de um sistema homogéneo, em relação à:

- Base canónica.
- Base $B = \{(1, 1, 1), (0, 1, -1), (-1, -1, 0)\}$.

Para a alínea a), há que determinar a condição na variável x, y e z tal que

$$\alpha(1, -1, 2) = (x, y, z).$$

$$[A|B] = \left[\begin{array}{c|c} 1 & x \\ -1 & y \\ 2 & z \end{array} \right] \longrightarrow \left[\begin{array}{c|c} 1 & x \\ 0 & x + y \\ 0 & -2x + z \end{array} \right]$$

Então,

$$S = \{(x, y, z) : x + y = -2x + z = 0\}$$

Para a alínea b), há que determinar a condição na variável x, y e z tal que

$$\begin{aligned} \alpha(1, -1, 2) &= x(1, 1, 1) + y(0, 1, -1) + z(-1, -1, 0) \\ \Leftrightarrow \alpha(1, -1, 2) &= (x - z, x + y - z, x - y) \end{aligned}$$

$$[A|B] = \left[\begin{array}{c|c} 1 & x - z \\ -1 & x + y - z \\ 2 & x - y \end{array} \right] \longrightarrow \left[\begin{array}{c|c} 1 & x - z \\ 0 & 2x + y - 2z \\ 0 & -x - y + 2z \end{array} \right]$$

Então,

$$\begin{aligned} S &= \{x(1,1,1) + y(0,1,-1) + z(-1,-1,0) : 2x + y - 2z = -x - y + 2z = 0\} \\ &= \{(x - z, x + y - z, x - y) : 2x + y - 2z = -x - y + 2z = 0\} \end{aligned}$$

Teorema (Propriedades de subespaços gerados). Seja V um espaço vectorial real arbitrário, e sejam X e Y subconjuntos quaisquer de V . Então:

1. $X \subseteq \langle X \rangle$.
2. $X = \langle X \rangle$ se, e somente se, $X \leq V$.
3. $\langle V \rangle = V$.
4. $\langle \{\vec{0}\} \rangle = \{\vec{0}\} = \langle \vec{0} \rangle$.
5. Se $X \subseteq Y$, então $\langle X \rangle \subseteq \langle Y \rangle$.
6. Se $S \leq V$ e $X \subseteq S$, então $\langle X \rangle \subseteq S$.
7. $\langle X \rangle$ é o único subespaço vectorial de V que satisfaz as propriedades 1. e 6.

Operações com subespaços vectoriais

Teorema (Intersecção de subespaços). Seja V um espaço vectorial real, e sejam $F, G \leq V$. Então $F \cap G \leq V$.

Observação. Seja V um espaço vectorial real de dimensão $n \in \mathbb{N}$, e sejam $F, G \leq V$. Dada uma base $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ de V , se F e G são representados, em relação à essa base, por

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \dots + b_{1n}x_n = 0 \\ b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \dots + b_{2n}x_n = 0 \\ \dots \\ b_{p1}x_1 + b_{p2}x_2 + \dots + b_{pn}x_n = 0 \end{cases}$$

respectivamente, então o subespaço vectorial $F \cap G$ é representado em relação à mesma base por

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n = 0 \\ b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \dots + b_{1n}x_n = 0 \\ b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \dots + b_{2n}x_n = 0 \\ \dots \\ b_{p1}x_1 + b_{p2}x_2 + \dots + b_{pn}x_n = 0 \end{cases}$$

Exemplo. No espaço vectorial \mathbb{R}^3 , sejam os subespaços F e G definidos por

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x - 2y + 2z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases},$$

respectivamente, em relação à base $B = \{(1,1,1), (0,1,-1), (-1,-1,0)\}$. Determinar $F \cap G$.

Pela observação anterior, $F \cap G$ é definido, em relação à base $B = \{(1,1,1), (0,1,-1), (-1,-1,0)\}$, por

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + y - z = 0 \\ x - 2y + 2z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} .$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Então,

$$F \cap G = \{0(1,1,1) + 0(0,1,-1) + 0(-1,-1,0)\} = \{(0,0,0)\},$$

isto é, o subespaço nulo.

Exemplo. No espaço vectorial \mathbb{P}^2 , sejam os subespaços vectoriais F , definido por

$$x + y - 2z = 0,$$

em relação à básica canónica, e $G = \langle x^2 + x - 1, x^2 + 2x + 1 \rangle$. Determinar $F \cap G$.

$$\begin{aligned} G &= \{\alpha(x^2 + x - 1) + \beta(x^2 + 2x + 1) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(\alpha + \beta)x^2 + (\alpha + 2\beta)x - \alpha + \beta : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Isto é, $G \equiv_B (\alpha + \beta, \alpha + 2\beta, -\alpha + \beta)$, onde $B = \{x^2, x, 1\}$ (base canónica de \mathbb{P}^2). Logo,

$$\begin{aligned} F \cap G &= \{(\alpha + \beta)x^2 + (\alpha + 2\beta)x - \alpha + \beta : \alpha + \beta + \alpha + 2\beta - 2(-\alpha + \beta) = 0\} \\ &= \{(\alpha + \beta)x^2 + (\alpha + 2\beta)x - \alpha + \beta : 4\alpha + \beta = 0\} \\ &= \{-3\alpha x^2 - 7\alpha x - 5\alpha : \alpha \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle -3x^2 - 7x - 5 \rangle \end{aligned}$$

Exemplo. No espaço vectorial real \mathbb{P}^2 , sejam os subespaços vectoriais

$$F = \langle x^2 - x + 1, x^2 + 2x + 2 \rangle \text{ e } G = \langle 2x^2 + x + 1, -x^2 - x + 3 \rangle.$$

Determinar $F \cap G$.

Ora,

$$\begin{aligned} \oplus F &= \{\alpha(x^2 - x + 1) + \beta(x^2 + 2x + 2) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(\alpha + \beta)x^2 + (-\alpha + 2\beta)x + \alpha + 2\beta : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \quad \square \end{aligned}$$

Determina-se os valores reais de α e β , de modo que os vectores

$$"(\alpha + \beta)x^2 + (-\alpha + 2\beta)x + \alpha + 2\beta"$$

pertencem ao subespaço vectorial G :

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & \alpha + \beta \\ 1 & -1 & -\alpha + 2\beta \\ 1 & 3 & \alpha + 2\beta \end{array} \right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2\alpha - \beta \\ 0 & 1 & 3\alpha - 3\beta \\ 0 & 0 & -20\alpha + 24\beta \end{array} \right]$$

Então,

$$-20\alpha + 24\beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = -\frac{8}{5}\beta \text{ e } \beta \in \mathbb{R},$$

ou seja,

$$F \cap G = \left\{ -\frac{3}{5}\beta x^2 + \frac{18}{5}\beta x + \frac{2}{5}; \beta \in \mathbb{R} \right\} = \langle -3x^2 + 18x + 2 \rangle.$$

Teorema (Reunião de subespaços). Seja V um espaço vectorial real, e sejam $F, G \leq V$. Então $F \cup G$ é um subespaço vectorial de V se, e somente se, $F \subseteq G$ ou $G \subseteq F$.

Observação (Importante!!!). Se F e G são subespaços vectoriais, de dimensões finitas, de um espaço vectorial real V , então $F \subseteq G$ se, e somente se, cada um dos geradores de F pertence a G , ou seja, é combinação linear dos geradores de G . Se $F \subseteq G$, então $\dim(F) \leq \dim(G)$, e nesse caso $F \cup G = G$.

Exemplo. No espaço vectorial real \mathbb{P}^2 , sejam $F = \langle x^2 - x \rangle$, $G = \langle x - 1, 1 \rangle$. Verificar se $F \cup G$ é um subespaço vectorial de \mathbb{P}^2 .

Ora, $G \not\subseteq F$ porque $\dim(G) = 2 > 1 = \dim(F)$. $F \subseteq G$ se cada um dos seus geradores é combinação linear dos geradores de G , ou seja, se a equação

$$x^2 - x = \lambda_1(x - 1) + \lambda_2 \cdot 1$$

é possível. Mas esta equação é impossível, porque polinómios de grau inferior ou igual a um não geram um polinómio de grau dois. Logo, $F \not\subseteq G$. Sendo assim, o subconjunto $F \cup G$ não é um subespaço vectorial de \mathbb{P}^2 .

Definição. Seja V um espaço vectorial real arbitrário, e sejam F e G subconjuntos de V . A soma de F e G é

$$F + G = \{ \vec{f} + \vec{g}; \vec{f} \in F \text{ e } \vec{g} \in G \}.$$

Se um dos conjuntos é unitário, por exemplo $F = \{ \vec{f} \}$, tem-se $\{ \vec{f} \} + G = \vec{f} + G$.

Teorema. Seja V um espaço vectorial real arbitrário, e sejam $F, G \leq V$. Então:

1. $F + G \leq V$.

Ora,

$$\begin{cases} a - b + c = 0 \\ b - c + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -d \\ b = c - d \\ c, d \in \mathbb{R} \end{cases}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} G &= \{ -d(1,1,1,1) + (c-d)(-1,0,1,2) + c(1,1,-2,1) + d(0,0,1,1); c, d \in \mathbb{R} \} \\ &= \{ d(0,-1,-1,-2) + c(0,1,-1,3); c, d \in \mathbb{R} \} \\ &= \langle (0,-1,-1,-2), (0,1,-1,3) \rangle \end{aligned}$$

Então, $F + G = \langle (1,0,0,0), (0,1,0,1), (0,-1,-1,-2), (0,1,-1,3) \rangle$. Calcula-se uma base de $F + G$, determinando um subsistema independente maximal do conjunto dos geradores de $F + G$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Como $c(A) = 4$, então $\dim(F + G) = 4$ e $F + G = \mathbb{R}^4$, ou seja, $F + G$ é um subespaço impróprio de \mathbb{R}^4 .

Teorema (das dimensões). Seja V um espaço vectorial real arbitrário, e sejam $F, G \leq V$. Se F e G têm dimensões finitas, então

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$

Exemplo. Determinar $F \cap G$, onde F e G são os subespaços vectoriais do exemplo imediatamente anterior.

$\dim(F) = 2$, $\dim(G) = 2$ e $F + G = \mathbb{R}^4$. Tem-se então, pelo teorema das dimensões, $4 = 2 + 2 - \dim(F \cap G) \Leftrightarrow \dim(F \cap G) = 0 \Leftrightarrow F \cap G = \{(0,0,0,0)\}$.

Definição (Soma directa). Seja V um espaço vectorial real arbitrário, e sejam $F, G \leq V$. Diz-se que $S = F + G$ é uma soma directa, e representa-se por $S = F \oplus G$, se $F \cap G = \{\vec{0}\}$.

Exemplo. No exemplo anterior, $S = F + G = F \oplus G$.

Teorema. Seja V um espaço vectorial real arbitrário, e sejam $F, G \leq V$. Se B_F é uma base de F , B_G é uma base de G e $S = F + G = F \oplus G$, então $B = B_F \cup B_G$ é uma base de $S = F + G = F \oplus G$.

Definição. Seja V um espaço vectorial real arbitrário, e sejam $F_1, F_2, \dots, F_k \leq V$. Diz-se que a soma $S = F_1 + F_2 + \dots + F_k$ é uma soma directa, e escreve-se $S = F_1 \oplus F_2 \oplus \dots \oplus F_k$, se para todo $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ tem-se

$$F_i \cap \left(\sum_{j \neq i} F_j \right) = \{\vec{0}\}.$$

Exemplo. No espaço vectorial real \mathbb{P}^3 , sejam $F = \langle x^3, x^2 \rangle$, $G = \langle x^3 + x \rangle$ e $H = \langle x^3 + 1, 2x^2 + 3x \rangle$. Verificar se $S = F + G + H$ é uma soma directa.

$S = F + G + H = F \oplus G \oplus H$ se $F \cap (G + H) = G \cap (F + H) = H \cap (F + G) = \{0\}$. Ora, $G + H = \langle x^3 + x, x^3 + 1, 2x^2 + 3x \rangle$, e como estes três vectores são linearmente independentes, então $\dim(G + H) = 3$.

Pelo teorema das dimensões,

$$\dim(F + (G + H)) = \dim(F) + \dim(G + H) - \dim(F \cap (G + H)).$$

Como $F + (G + H) \leq \mathbb{P}^3$, e conseqüentemente $\dim(F + (G + H)) \leq \dim(\mathbb{P}^3) = 4$, então não pode ser que $\dim(F \cap (G + H)) = 0$, pois seria

$$\dim(F + (G + H)) = \dim(F) + \dim(G + H) = 5 > \dim(\mathbb{P}^3) = 4,$$

ou seja, $F \cap (G + H) \neq \{0\}$. Logo $S = F + G + H$ não é uma soma directa.

Definição (Subespaço complementar). Seja V um espaço vectorial real arbitrário, e seja $F \leq V$. Chama-se complementar de F a um subespaço vectorial F' de V tal que $F \oplus F' = V$.

Nota. Se $F = V$, então $F' = \{0\}$; e se $F = \{0\}$, então $F' = V$.

Teorema. Seja V um subespaço vectorial real de dimensão finita, e seja $F \leq V$. Então existe um subespaço complementar de F .

Nota (Importante!!!). Escolhe-se uma base arbitrária de \mathbb{P}^4 (de preferência a base canónica) e determina-se uma nova base de \mathbb{P}^4 que inclua os vectores de base de F , aplicando o teorema de Steinitz (por exemplo). Sendo assim, a base de F' é composta pelos vectores da base que se determinou, que não fazem parte da base de F .

Exemplo. No espaço vectorial real \mathbb{P}^4 , seja $F = \langle 1, x + 1, x^2 + 1 \rangle$. Determinar F' .

Neste exemplo, seja $B = \{x^4, x^3, x^2, x, 1\} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4, \vec{e}_5\}$ a base canónica de \mathbb{P}^4 .

Tem-se:

$$\vec{f}_1 = 1 = \vec{e}_5, \quad \vec{f}_2 = \vec{e}_4 + \vec{e}_5 \quad e \quad \vec{f}_3 = \vec{e}_3 + \vec{e}_5.$$

Logo:

$$B_1 = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4, \vec{f}_1\}, \quad e \quad \vec{f}_2 = \vec{e}_4 + \vec{f}_1, \quad \vec{f}_3 = \vec{e}_3 + \vec{f}_1$$

$$B_2 = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{f}_2, \vec{f}_1\}, \quad e \quad \vec{f}_3 = \vec{e}_3 + \vec{f}_1.$$

$$B_3 = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{f}_3, \vec{f}_2, \vec{f}_1\}.$$

$$\text{Então } F' = \langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle = \langle x^4, x^3 \rangle.$$

Conclusão

Subespaço vectorial de um espaço vectorial real, também é um espaço vectorial real.

A representação de um subespaço através do seu vector genérico, através de um sistema homogéneo e através dos seus geradores, é fundamental nas operações (soma, intersecção e reunião) realizadas entre eles.

O Teorema das dimensões relaciona as dimensões de subespaços com a dimensão da respectiva soma e intersecção.

O conceito da soma directa e, conseqüentemente, do subespaço complementar, é de extrema importância no estudo de projecção sobre um subespaço (que será estudada mais adiante)

Avaliação

1. No espaço vectorial real \mathbb{R}^4 , seja o subconjunto

$$S = \{(x, y, z, w) : ax + by + cz + dw = 0\},$$
 onde a, b, c, d são números reais fixos.
 - a) Mostre que S é um subespaço vectorial de \mathbb{R}^4 .
 - b) Determine uma base de S e a sua dimensão.
2. Defina, por intermédio de um sistema de equações lineares homogéneas, o subespaço vectorial do espaço vectorial real \mathbb{P}^3 , em relação à base indicada:
 - a) $S = \langle x^2 - 1 \rangle$, em relação à base $B = \{x^2 - x, x^2 + 1, x + 2\}$.
3. Determine o subespaço vectorial de \mathbb{P}^3 , definido pelo sistema

$$\begin{cases} a - b + c + 2d = 0 \\ a - 2b + c + d = 0 \end{cases}$$
 em relação à base $B = \{x^3 - x^2, x^2 - x, x - 1, x^3\}$.
4. No espaço vectorial real \mathbb{P}^3 , sejam os subespaços vectoriais $F = \langle x^3 + x^2, x^3 - 1 \rangle$ e G representado pelo sistema $a - b + c - d = a + c + 2d = -b + c + d = 0$, em relação à base $B = \{x^3 - x^2, x^2 - 2x, x - 1, -x^3 + x + 2\}$.
 - a) Determine $F + G$.
 - b) Represente $F + G$ por intermédio de um sistema de equações lineares homogéneas, em relação à base B .
 - c) Determine $F \cap G$.
5. No espaço vectorial real \mathbb{R}^3 , sejam $F = \{(x, y, z) : 3x + y = x - z = 0\}$ e $G = \{(x, y, z) : kx + 2y - z = 0\}$, com $k \in \mathbb{R}$. Determine o valor real de k para o qual $F \cup G$ é um subespaço vectorial de \mathbb{R}^3 .
6. No espaço vectorial real \mathbb{R}^3 , sejam os subespaços vectoriais $F = \langle (1, 0, 0) \rangle$, $G = \{(x, y, z) : x + y = 0\}$ e $H = \{(x, y, z) : 2x - y = x + z = 0\}$. Verifique se:
 - a) $F + G = F \oplus G$.
 - b) $F + G + H = F \oplus G \oplus H$.
7. No espaço vectorial real \mathbb{R}^4 , sejam os subespaços vectoriais $F = \{(x, y, z, w) : x + y + z + w = 0\}$ e $G = \{(x, y, z, w) : x = y = z = 0\}$.
 - a) Verifique que $F \oplus G = \mathbb{R}^4$.

Actividade 3 – Espaço vectorial real com produto interno

Introdução

Introduz-se o conceito de matriz mudança de base, como instrumento que permite relacionar diferentes bases de um determinado espaço vectorial real.

Introduz-se, também, o produto interno no espaço vectorial, com destaque para os espaços de dimensões finitas, com intuito de dar certas características aos vectores.

Detalhes da atividade

Matriz mudança de base

Definição (Matriz mudança de base). Seja V um espaço vectorial real de dimensão $n \in \mathbb{N}$. Seja $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ uma base de V (**base antiga**), e seja $B' = \{\vec{v}'_1, \vec{v}'_2, \dots, \vec{v}'_n\}$ uma outra base de V (**base nova**). Como $B' \subset V$, então cada vector de B' é combinação linear dos vectores de B :

$$\begin{aligned} \vec{v}'_1 &\equiv_B (a_{11}, a_{21}, \dots, a_{n1}) \\ \vec{v}'_2 &\equiv_B (a_{12}, a_{22}, \dots, a_{n2}) \\ \dots &\dots \dots \\ \vec{v}'_n &\equiv_B (a_{1n}, a_{2n}, \dots, a_{nn}) \quad \square \end{aligned}$$

A matriz

$$M(B \longrightarrow B') = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

denomina-se por **matriz mudança de base, da base antiga B para a base nova B'** .

Nota-se que a primeira coluna da matriz $M(B \rightarrow B')$ é composta pelas componentes do vector \vec{v}'_1 na base B , a segunda coluna, pelas componentes do vector \vec{v}'_2 na base B , e assim sucessivamente.

Teorema. Toda matriz mudança de base é invertível (ou regular). Qualquer matriz invertível pode ser considerada uma matriz mudança de base, isto é, dada uma matriz invertível, invertível Q , de orden n , é possível tomar duas bases B e B' dum certo espaço vectorial de dimensão n tais que $B' = M(B \rightarrow B')$. Seja $B = \{x^2 + 1, x - 1, x^2 + x + 1\}$ e $B' = \{x^2, x, 1\}$.

- Determinar a matriz $P = M(B' \rightarrow B)$.
- Mostrar que PX^t , onde $X = [\lambda_1 \ \lambda_2 \ \lambda_3]$ e $ax^2 + bx + c \equiv_B (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, tem como entradas as componentes de $ax^2 + bx + c$ na base B' .
- Determinar $Q = M(B \rightarrow B') = P^{-1}$

Alínea a). A **matriz mudança de base de B' para B** é $P = M(B' \rightarrow B)$, isto é, a primeira coluna de P é composta pelas componentes do vector $x^2 + 1$ na base B' , a segunda coluna de P é composta pelas componentes do vector $x - 1$ na base B' e a última coluna de P é composta pelas componentes do vector $x^2 + x + 1$ na base B' . Como B' é base canónica de \mathbb{P}^2 , então: $x^2 + 1 \equiv_{B'} (1, 0, 1)$, $x - 1 \equiv_{B'} (0, 1, -1)$ e $x^2 + x + 1 \equiv_{B'} (1, 1, 1)$. Logo

$$P = M(B' \longrightarrow B) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Alínea b). Ora, $ax^2 + bx + c \equiv_B (2a - b - c, a - c, -a + b + c)$, para todo $a, b, c \in \mathbb{R}$. Então

$$P \begin{bmatrix} 2a - b - c \\ a - c \\ -a + b + c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix},$$

logo $ax^2 + bx + c \equiv_{B'} (a, b, c)$.

Alinea c). A matriz mudança de base de B para B' é

$$Q = P^{-1} = M(B \rightarrow B') = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Nota-se que:

$$\begin{aligned} x^2 &\equiv_B (2, 1, -1) \\ x &\equiv_B (-1, 0, 1) \\ 1 &\equiv_B (-1, -1, 1) \end{aligned}$$

ou seja, a primeira coluna da matriz mudança de base Q é composta pelas componentes do vector x^2 na base B , a segunda coluna, pelas componentes do vector x na base B e a terceira coluna, pelas componentes do vector 1 na base B .

uma matriz invertível.

- Determinar duas bases B e B' de \mathbb{R}^3 , tais que $Q = M(B' \rightarrow B)$.
- Sabendo que $Q = M(B \rightarrow B')$ e que $B' = \{(1, 0, -1), (1, 1, 2), (2, 1, 2)\}$, determinar B .

Alinea a). Seja $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ e $B' = \{\vec{v}'_1, \vec{v}'_2, \vec{v}'_3\}$ duas bases de \mathbb{R}^3 . Então

$$\begin{cases} \vec{v}_1 = \vec{v}'_1 + \vec{v}'_2 - \vec{v}'_3 \\ \vec{v}_2 = -\vec{v}'_1 + \vec{v}'_2 - \vec{v}'_3 \\ \vec{v}_3 = \vec{v}'_1 - 2\vec{v}'_2 + \vec{v}'_3 \end{cases}.$$

Para $B' = \{(1, 0, -1), (1, -1, -4), (1, -4, -11)\}$, então $B = \{(1, 3, 6), (-1, 3, 8), (-2, 6, 18)\}$.

Alinea b). $Q = M(B \rightarrow B')$ e a matriz B' foi dado, então vai-se expressar cada vector da base B em função dos vectores da base B' :

$$\begin{cases} \vec{v}'_1 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 - \vec{v}_3 \\ \vec{v}'_2 = -\vec{v}_1 + \vec{v}_2 - \vec{v}_3 \\ \vec{v}'_3 = \vec{v}_1 - 2\vec{v}_2 + \vec{v}_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{v}_1 = \frac{1}{2}\vec{v}'_1 - \frac{1}{2}\vec{v}'_2 \\ \vec{v}_2 = \frac{1}{3}\vec{v}'_1 - \frac{1}{3}\vec{v}'_3 \\ \vec{v}_3 = -\frac{1}{6}\vec{v}'_1 - \frac{1}{2}\vec{v}'_2 - \frac{1}{3}\vec{v}'_3 \end{cases}.$$

Como $B' = (1, 0, -1), (1, 1, 2), (2, 1, 2)$, então fazendo substituições nas equações acima, tem-se:

$$B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\} = \left\{ \left(0, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right), \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -1\right), \left(-\frac{4}{3}, -\frac{5}{6}, -\frac{3}{2}\right) \right\}.$$

Espaço vectorial real com produto interno

Definição (Produto interno). Seja V um espaço vectorial real. Um **produto interno** (ou **escalar**) em V é uma função que associa a cada par ordenado de vectores, \vec{u} e \vec{v} em V , um escalar real, denotado por $\vec{u} \cdot \vec{v}$, que satisfaz as seguintes propriedades:

- $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$, tem-se $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$;
- $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V, \forall \lambda \in \mathbb{R}$, tem-se $(\lambda \vec{u}) \cdot \vec{v} = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v})$;
- $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V$, tem-se $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$;
- $\forall \vec{u} \in V$ e $\vec{u} \neq \vec{0}$, tem-se $\vec{u} \cdot \vec{u} > 0$.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 + \dots + u_nv_n.$$

Verificação.

$$\forall \vec{u} = (u_1, u_2, u_3, \dots, u_n), \vec{v} = (v_1, v_2, v_3, \dots, v_n), \vec{w} = (w_1, w_2, w_3, \dots, w_n) \in \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R}:$$

Propriedade (1),

$$\begin{aligned} (\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} &= (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3, \dots, u_n + v_n) \cdot \vec{w} \\ &= (u_1 + v_1)w_1 + (u_2 + v_2)w_2 + (u_3 + v_3)w_3 + \dots + (u_n + v_n)w_n \\ &= (u_1w_1 + u_2w_2 + u_3w_3 + \dots + u_nw_n) + (v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3 + \dots + v_nw_n) \\ &= \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w} \end{aligned}$$

Propriedade (2),

$$\begin{aligned} (\lambda \vec{u}) \cdot \vec{v} &= (\lambda u_1, \lambda u_2, \lambda u_3, \dots, \lambda u_n) \cdot \vec{v} \\ &= \lambda u_1v_1 + \lambda u_2v_2 + \lambda u_3v_3 + \dots + \lambda u_nv_n \\ &= \lambda(u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 + \dots + u_nv_n) \end{aligned}$$

Propriedade (3),

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 + \dots + u_nv_n \\ &= v_1u_1 + v_2u_2 + v_3u_3 + \dots + v_nu_n \\ &= \vec{v} \cdot \vec{u} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|p(x) = -x + 1\| &= \sqrt{p(x) \cdot p(x)} \\ &= \sqrt{\int_{-1}^1 p(t)^2 dt.} \\ &= \sqrt{\frac{1}{3} - 1 + 1 - \left(\frac{-1}{3} - 1 - 1\right)} \\ &= \sqrt{\frac{8}{3}} \end{aligned}$$

Exemplo (Outros produtos internos). São também produtos internos os que se seguem:

(1) $\forall \vec{u} = (u_1, u_2), \vec{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2, \vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_1 + u_1v_2 + 2u_2v_2;$

(2) $\forall \vec{u} = (u_1, u_2, u_3), \vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3,$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 5u_1v_1 + 2u_2v_1 - u_3v_1 + 2u_1v_2 + 2u_2v_2 - 3u_3v_2 - u_1v_3 - 3u_2v_3 + 12u_3v_3.$$

Definição (Norma). Seja V um espaço vectorial real com produto interno. Para cada $\vec{x} \in V$, chama-se norma de \vec{x} ao número real não negativo $\|\vec{x}\| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}}$.

Exemplo. No espaço vectorial real \mathbb{R}^3 , determinar a norma do vector $\vec{x} = (1, -1, 2)$, em relação:

(a) Produto interno canónico;

(b) $\forall \vec{u} = (u_1, u_2, u_3), \vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 5u_1v_1 + 2u_2v_1 - u_3v_1 + 2u_1v_2 + 2u_2v_2 - 3u_3v_2 - u_1v_3 - 3u_2v_3 + 12u_3v_3.$$

Alínea (a). $\|\vec{x}\| = \sqrt{1 + 1 + 4} = \sqrt{6}$.

Alínea (b). $\|\vec{x}\| = \sqrt{5 - 2 - 2 - 2 + 2 + 6 - 2 + 6 + 48} = \sqrt{59}$.

Teorema (Propriedades da norma). Seja V um espaço vectorial real, com um produto interno. Para quaisquer vectores $\vec{x}, \vec{y} \in V, \forall \lambda \in \mathbb{R}$, tem-se:

(1) $\|\vec{x}\| = 0$, se e somente se, $\vec{x} = \vec{0}$.

(2) $\|\lambda\vec{x}\| = |\lambda|\|\vec{x}\|$.

ou seja,

$$\theta = \sphericalangle(\vec{x}, \vec{y}) = \arccos\left(\frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{\|\vec{x}\|\|\vec{y}\|}\right).$$

Exemplo. No espaço vectorial real \mathbb{R}^3 , sejam $\vec{x} = (1, -1, 1)$ e $\vec{y} = (-1, 2, -2)$. Determinar $\sphericalangle(\vec{x}, \vec{y})$, considerando:

(a) O produto interno canónico.

(b) $\forall \vec{u} = (u_1, u_2, u_3), \vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 5u_1v_1 + 2u_2v_1 - u_3v_1 + 2u_1v_2 + 2u_2v_2 - 3u_3v_2 - u_1v_3 - 3u_2v_3 + 12u_3v_3.$$

Alínea (a). $\vec{x} \cdot \vec{y} = -1 - 2 - 2 = -5; \|\vec{x}\| = \sqrt{3}; \|\vec{y}\| = \sqrt{9} = 3$. Então:

$$\sphericalangle(\vec{x}, \vec{y}) = \arccos\left(\frac{-5}{3\sqrt{3}}\right) \approx 164^\circ.$$

Alínea (b). $\vec{x} \cdot \vec{y} = -5 + 2 + 1 + 4 - 4 - 6 + 2 - 6 - 24 = -36; \|\vec{x}\| = \sqrt{19}; \|\vec{y}\| = \sqrt{73}$. Então:

$$\sphericalangle(\vec{x}, \vec{y}) = \arccos\left(\frac{-36}{\sqrt{19}\sqrt{73}}\right) \approx 165^\circ.$$

$\vec{x} \cdot \vec{y} = 0$.

Teorema (Propriedades de ortogonalidade). Seja V um espaço vectorial real, com um produto interno. Para quaisquer vectores $\vec{x}, \vec{y} \in V$, tem-se:

(1) Se $\vec{x} \perp \vec{y}$, então $\vec{y} \perp \vec{x}$. \square

(2) $\vec{0} \perp \vec{x}$.

(3) $\vec{x} \perp \vec{x}$ se, e somente se, $\vec{x} = \vec{0}$.

(4) Se $\vec{x} \perp \vec{y}$, então Se $\vec{x} \perp \lambda\vec{y}, \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

Definição (Sistema ortogonal e ortonormal de vectores). Seja V um espaço vectorial real, com um produto interno. Os vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k \in V$ formam um **sistema ortogonal** se cada um deles é ortogonal a cada um dos outros, ou seja, $\forall i \in \{1, 2, \dots, k\} \vec{v}_i \cdot \vec{v}_j = 0$, com $i \neq j$ e $j = \overline{1, k}$. Se para além disso, $\forall i \in \{1, 2, \dots, k\} \|\vec{v}_i\| = 1$, diz-se que $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$ formam um **sistema ortonormal**, ou seja, para quaisquer $i, j = \overline{1, k}$, se tem:

$$\vec{v}_i \cdot \vec{v}_j = \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq j \\ 1, & \text{se } i = j \end{cases}$$

Nota. Num espaço vectorial real V , com um produto interno, se $\vec{u} \in V$ é tal que $\|\vec{u}\| = 1$, diz-se que \vec{u} é um **vector unitário** (ou **normalizado**).

Definição (Versor de um vector). Seja V um espaço vectorial real, com um produto

$$\frac{1}{\|\vec{u}\|} \vec{u} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}.$$

Nota. Versor de um vector $\vec{u} \in V$ é unitário (ou normalizado). Basta ver que:

$$\left\| \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} \right\| = \left| \frac{1}{\|\vec{u}\|} \right| \|\vec{u}\| = \frac{1}{\|\vec{u}\|} \|\vec{u}\| = \frac{\|\vec{u}\|}{\|\vec{u}\|} = 1.$$

Exemplo. No espaço vectorial real \mathbb{R}^3 , sejam os vectores $\vec{v}_1 = (1,1,1)$, $\vec{v}_2 = (-1,1,0)$ e $\vec{v}_3 = (-1,-1,2)$.

- (a) Mostrar que $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ é ortogonal, para o produto interno canónico.
 (b) Obter um sistema ortonormal a partir de S .

Alínea (a). $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = -1 + 1 + 0 = 0$; $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_3 = -1 - 1 + 2 = 0$; $\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_3 = 1 - 1 + 0 = 0$. Logo, $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ é ortogonal.

Alínea (b). $\|\vec{v}_1\| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$; $\|\vec{v}_2\| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$; $\|\vec{v}_3\| = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$. Calcula-se os versores de \vec{v}_1, \vec{v}_2 e \vec{v}_3 :

$$\vec{u}_1 = \frac{\vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right); \vec{u}_2 = \frac{\vec{v}_2}{\|\vec{v}_2\|} = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right); \vec{u}_3 = \frac{\vec{v}_3}{\|\vec{v}_3\|} = \left(\frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}} \right).$$

Então, os vectores \vec{u}_1, \vec{u}_2 e \vec{u}_3 formam um sistema ortonormal.

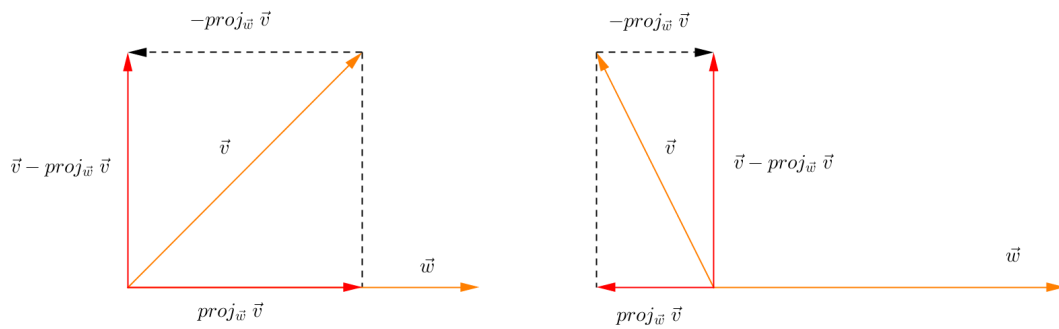
Nota. O processo de transformação de um sistema ortogonal S em um sistema ortonormal, consiste na determinação do versor de cada um dos vectores de S .

Teorema. Todo sistema ortogonal formado por vectores não nulos é linearmente independente. Em particular, todo sistema ortonormal é linearmente independente.

Definição (Projectão ortogonal). Seja V um espaço vectorial real, com um produto interno. Sejam $\vec{v}, \vec{w} \in V$ e $\vec{w} \neq \vec{0}$. Projectão ortogonal de \vec{v} sobre \vec{w} é o vector

$$proj_{\vec{w}} \vec{v} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{\|\vec{w}\|^2} \vec{w}.$$

No plano e no espaço usual (\mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3), a projectão ortogonal de \vec{v} sobre \vec{w} pode ser representado por:



Teorema. Seja V um espaço vectorial real, com um produto interno. Seja $\vec{w} \in V$ e $\vec{w} \neq \vec{0}$. Então, $\forall \vec{v} \in V$, $\vec{v} - \text{proj}_{\vec{w}} \vec{v}$ é ortogonal a \vec{w} , ou seja,

$$(\vec{v} - \text{proj}_{\vec{w}} \vec{v}) \cdot \vec{w} = 0.$$

Teorema. Seja V um espaço vectorial real, com um produto interno, e seja X um subconjunto de V , **composto por vectores ortogonais não nulos**. Se $\vec{v} \in \langle X \rangle$, então existem vectores $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_k \in \langle X \rangle$ tais que:

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^k \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}_i}{\|\vec{w}_i\|^2} \vec{w}_i.$$

Nota (Muito importante!!!). $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_k \in \langle X \rangle$ que se refere o teorema anterior são tais que:

$$\vec{v} = \lambda_1 \vec{w}_1 + \lambda_2 \vec{w}_2 + \dots + \lambda_k \vec{w}_k.$$

Então, se o subespaço $\langle X \rangle$ tem dimensão finita, os vectores $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_k \in \langle X \rangle$ são os vectores de uma determinada base de $\langle X \rangle$, tais que \vec{v} é combinação linear deles.

Exemplo. No espaço vectorial real \mathbb{R}^3 , com produto interno canónico, seja

$$B = \{(1,1,1), (-1,1,0), (-1,-1,2)\}$$

uma sua base. Pelo exemplo anterior, B é composto de vectores ortogonais não nulos.

e $\vec{w}_1 = (1,1,1)$; $\vec{w}_2 = (-1,1,0)$ e $\vec{w}_3 = (-1,-1,2)$.

Ora, $\|\vec{w}_1\| = \sqrt{3}$; $\|\vec{w}_2\| = \sqrt{2}$ e $\|\vec{w}_3\| = \sqrt{6}$. Então,

$$\lambda_1 = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}_1}{\|\vec{w}_1\|^2} = \frac{a+b+c}{(\sqrt{3})^2} = \frac{a+b+c}{3}.$$

$$\lambda_2 = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}_2}{\|\vec{w}_2\|^2} = \frac{-a+b}{(\sqrt{2})^2} = \frac{-a+b}{2}.$$

$$\lambda_3 = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}_3}{\|\vec{w}_3\|^2} = \frac{-a-b+2c}{(\sqrt{6})^2} = \frac{-a-b+2c}{6} = \frac{-a-b}{6} + \frac{c}{3}.$$

Teorema (de Pitágoras). Seja V um espaço vectorial real, com produto interno. Sejam

$\vec{u}, \vec{v} \in V$. Se $\vec{u} \perp \vec{v}$, então $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$.

Produto interno em espaços de dimensões finitas

Definição (Espaço euclidiano). Um espaço vectorial real V , com um produto interno e de dimensão finita, denota-se por **espaço euclidiano**.

Definição (Base ortogonal e ortonormal). Seja V um espaço euclidiano, de dimensão $n \in \mathbb{N}$. Diz-se que:

- (3) Uma base B de V é ortogonal se B é um sistema ortogonal de vectores.
- (4) Uma base B de V é ortonormal se B é um sistema ortonormal de vectores.

Exemplo. No espaço vectorial real \mathbb{R}^n , a base canónica, isto é, a base formada pelos vectores:

$$\vec{e}_1 = (1,0,0, \dots, 0), \vec{e}_2 = (0,1,0, \dots, 0), \dots, \vec{e}_n = (0,0,0, \dots, 1),$$

é ortonormal em relação ao produto interno usual (ou canónico), isto é, $\forall \vec{u} = (u_1, u_2, u_3, \dots, u_n), \vec{v} = (v_1, v_2, v_3, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$, tem-se

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 + \dots + u_n v_n.$$

Teorema. Sejam $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_n$ vectores ortogonais não nulos de V . Então, $\forall \vec{v} \in V$, o vector

$$\vec{v} - \text{proj}_{\vec{w}_1} \vec{v} - \dots - \text{proj}_{\vec{w}_n} \vec{v}$$

Nota. Na construção da base $B' = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$, do teorema anterior, primeiro utiliza-se o **processo de ortogonalização de Gram-Schmidt** para constituir uma base ortogonal, da seguinte forma:

$$\vec{w}_1 = \vec{e}_1$$

$$\vec{w}_2 = \vec{e}_2 - \text{proj}_{\vec{w}_1} \vec{e}_2$$

$$\vec{w}_3 = \vec{e}_3 - \text{proj}_{\vec{w}_1} \vec{e}_3 - \text{proj}_{\vec{w}_2} \vec{e}_3$$

...

$$\vec{w}_n = \vec{e}_n - \text{proj}_{\vec{w}_1} \vec{e}_n - \text{proj}_{\vec{w}_2} \vec{e}_n - \dots - \text{proj}_{\vec{w}_{n-1}} \vec{e}_n$$

Seguidamente, determina-se os versores de cada vector $\vec{w}_i, i \in \{1, 2, \dots, n\}$ obtendo:

$$\vec{u}_1 = \frac{\vec{w}_1}{\|\vec{w}_1\|}, \quad \vec{u}_2 = \frac{\vec{w}_2}{\|\vec{w}_2\|}, \quad \vec{u}_3 = \frac{\vec{w}_3}{\|\vec{w}_3\|}, \quad \dots, \quad \vec{u}_n = \frac{\vec{w}_n}{\|\vec{w}_n\|}.$$

Exemplo. Seja o espaço vectorial real \mathbb{R}^3 , com o produto interno canónico:

$$\forall \vec{u} = (u_1, u_2, u_3), \vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3, \vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3.$$

Considere a base $B = \{(1,1,1), (0,0,1), (1,0,0)\}$ de \mathbb{R}^3 . Determinar uma base ortonormal $B' = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$, em que

$$\vec{u}_1 = \frac{(1,1,1)}{\|(1,1,1)\|}.$$

Então, primeiro vai-se ortogonalizar a base B , aplicando o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt:

$$\vec{w}_1 = (1,1,1)$$

$$B' = \left\{ \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3} \right), \left(\frac{-\sqrt{6}}{6}, \frac{-\sqrt{6}}{6}, \frac{2\sqrt{6}}{6} \right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2}, 0 \right) \right\}.$$

Definição (Matriz da métrica). Seja V um espaço euclidiano de dimensão $n \in \mathbb{N}$, e seja $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ uma sua base. A matriz real $G = [\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j], i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, denomina-se por **matriz da métrica** (do produto interno definido em V) em relação à base considerada.

Nota. Num espaço euclidiano V , a matriz da métrica em relação à base ortonormada $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ é a matriz identidade, pois:

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j \end{cases},$$

porque quando $i \neq j$, os vectores \vec{e}_i e \vec{e}_j são proporcionais, e quando $i = j$, $\|\vec{e}_i\| = 1 \Leftrightarrow \vec{e}_i \cdot \vec{e}_i = 1$.

Teorema. Seja V um espaço euclidiano de dimensão $n \in \mathbb{N}$, e seja $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ uma sua base. Seja $G = [\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j], i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ a matriz da métrica (do produto interno definido em V) em relação à base $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$. Sejam $\vec{u}, \vec{v} \in V$ tais que

$$\vec{u} \equiv_B (u_1, u_2, \dots, u_n) \quad \text{e} \quad \vec{v} \equiv_B (v_1, v_2, \dots, v_n).$$

Então,

Teorema. Seja V um espaço euclidiano, sejam $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ e $B' = \{\vec{v}'_1, \vec{v}'_2, \dots, \vec{v}'_n\}$ duas bases de V , e seja $P = M(B \rightarrow B')$, matriz mudança de base, da base antiga B para a base nova B' . Se G é a matriz da métrica do produto interno em V , em relação à base B , então a matriz da métrica do produto interno em V , em relação à base B' , é

$$G' = P^t G P.$$

Consequência do teorema anterior. Se $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ e $B' = \{\vec{v}'_1, \vec{v}'_2, \dots, \vec{v}'_n\}$ são bases ortonormadas de V , então $G' = G = I_n$, logo tem-se:

$$I_n = P^t P \Leftrightarrow P^{-1} = P^t.$$

Definição. (Matriz ortogonal). Seja P uma matriz quadrada real de ordem n . Diz-se que P é ortogonal, se $P^{-1} = P^t$.

Exemplo. Considere o espaço vectorial real \mathbb{R}^3 , com produto interno canónico, isto é, para todo $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3), \vec{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$,

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3.$$

Sejam $B = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ e $B' = \left\{ \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3} \right), \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right), \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right) \right\}$ bases ortonormadas de \mathbb{R}^3 . Seja

$$P = M(B \rightarrow B') = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

Pelo teorema anterior P é uma matriz ortogonal. De facto, $PP^t = I_3$, o que equivale a dizer que $P^{-1} = P^t$.

Teorema (Produto de matrizes ortogonais). Seja P e Q matrizes quadradas reais. Se

P e Q são matrizes ortogonais, então PQ é uma matriz ortogonal.

Definição (Matriz definida positiva). Seja A uma matriz real simétrica, isto é, $A = A^t$. Diz-se que A é uma matriz definida positiva se, para cada vector $\vec{0} \neq \vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$, tem-se:

$$[u_1 \quad u_2 \quad \dots \quad u_n] A \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = [u], \quad u > 0.$$

Então, a matriz A é definida positiva se, e somente se, $|A| = ac - b^2 > 0$.

Exemplo. A matriz real $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$ é definida positiva.

Teorema. Seja A uma matriz real definida positiva. Então A define um produto interno em \mathbb{R}^n , isto é, para quaisquer vectores $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ de \mathbb{R}^n :

$$[u_1 \quad u_2 \quad \dots \quad u_n] A \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = [\vec{u} \cdot \vec{v}].$$

Teorema. Seja V um espaço euclidiano. Então qualquer matriz da métrica é definida positiva.

Definição (Complemento ortogonal). Seja V um espaço euclidiano, e seja $\emptyset \neq S \subseteq V$.

O complemento ortogonal de S designado por S^\perp é o conjunto de todos os vectores de V ortogonais a todos os vectores de S . **Exemplo.** Seja V um espaço euclidiano. Se $S = \{\vec{0}\}$, então $S^\perp = V$. E se $S = V$, então $S^\perp = \{\vec{0}\}$.

Exemplo. No espaço euclidiano \mathbb{R}^n , $n \in \mathbb{N}$ e $n > 1$. Seja $S = \{\vec{v}\}$, onde $\vec{0} \neq \vec{v} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. Então,

$$S^\perp = \{\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \vec{v} \cdot \vec{x} = 0\} \\ \Leftrightarrow \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = 0\}. \quad \square$$

Caso particular do espaço euclidiano \mathbb{R}^3 . Se $S = \{\vec{v}\}$, onde $\vec{0} \neq \vec{v} = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, Então,

$$S^\perp = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : ax + by + cz = 0\},$$

a equação do plano, que passa pela origem e com vector normal $\vec{v} = (a, b, c)$.

Caso particular do espaço euclidiano \mathbb{R}^2 . Se $S = \{\vec{v}\}$, onde $\vec{0} \neq \vec{v} = (a, b) \in \mathbb{R}^2$, Então,

$$S^\perp = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ax + by = 0\},$$

A equação da recta que passa pela origem.

Nota (Muito importante!!!). No espaço euclidiano \mathbb{R}^n , com o produto interno canónico, seja $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m\}$, onde

$$\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdot \\ x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdot \\ 0 \end{bmatrix}$$

Exemplo. No espaço euclidiano \mathbb{R}^3 , com o produto interno canónico, seja

$$S = \{(1,1,1), (-1,0,1)\}.$$

Determinar S^\perp .

Então,

$$S^\perp = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z = -x+z=0\}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ -x + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \lambda \\ y = -2\lambda \\ z = \lambda \in \mathbb{R} \end{cases}.$$

$$S^\perp = \{(\lambda, -2\lambda, \lambda) : \lambda \in \mathbb{R}\} = \langle (1, -2, 1) \rangle.$$

Teorema. Seja V um espaço euclidiano, com um produto interno. Para quaisquer subconjuntos não vazios X e Y de V , tem-se:

- (1) Se $X \subseteq Y$, então $Y^\perp \subseteq X^\perp$.
- (2) $X \subseteq (X^\perp)^\perp$.
- (3) $(X)^\perp = X^\perp$; e em particular, $\langle \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\} \rangle^\perp = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}^\perp$.

Nota. O "ponto 3." do teorema anterior, permite calcular complemento ortogonal de qualquer subespaço de V finitamente gerado.

Exemplo. No espaço euclidiano \mathbb{R}^3 , seja $S = \langle (1,1,1), (-1,0,1) \rangle$. Então,

$$S^\perp = \langle (1,1,1), (-1,0,1) \rangle^\perp = \{(1,1,1), (-1,0,1)\}^\perp = \langle (1, -2, 1) \rangle.$$

Teorema. Seja V um espaço euclidiano, e seja F um subespaço vectorial de V . Tem-se, neste caso:

- (1) $V = F \oplus F^\perp$.
- (2) $(F^\perp)^\perp = F$.

Exemplo. No espaço euclidiano \mathbb{R}^3 , com o produto interno canónico, seja o subespaço vectorial $F = \langle (1, -1, 0) \rangle$. Seja $\vec{v} = (x, y, z)$, um vector arbitrário de \mathbb{R}^3 . Determinar a projecção ortogonal de \vec{v} sobre F , e sobre F^\perp .

Ora,

$$F = \{\alpha(1, -1, 0) : \alpha \in \mathbb{R}\} = \{(\alpha, -\alpha, 0) : \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Determina-se em primeiro lugar o complemento ortogonal de F . Ora,

$$\begin{aligned} F^\perp &= \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : (\alpha, -\alpha, 0) \cdot (a, b, c) = 0\} \\ &= \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : \alpha a - \alpha b = 0\} \\ &= \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : a - b = 0\} \\ &= \{(b, b, c) : b, c \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle (1, 1, 0), (0, 0, 1) \rangle \end{aligned}$$

Como $\mathbb{R}^3 = F \oplus F^\perp$, então $\mathbb{R}^3 = \langle (1, -1, 0), (1, 1, 0), (0, 0, 1) \rangle$, o que significa que

$$B = \{(1, -1, 0), (1, 1, 0), (0, 0, 1)\}$$

é uma base de \mathbb{R}^3 .

Assim sendo, existem escalares reais α, β, δ , tais que

$$\vec{v} = (x, y, z) = \alpha(1, -1, 0) + \beta(1, 1, 0) + \delta(0, 0, 1).$$

Então:

$$\alpha = \frac{1}{2}(x - y), \quad \beta = \frac{1}{2}(x + y), \quad \delta = z.$$

- (1) $d(\vec{a}, \vec{b}) = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{b}$.
- (2) $d(\vec{a}, \vec{b}) = d(\vec{b}, \vec{a})$.
- (3) $d(\vec{a}, \vec{b}) \leq d(\vec{a}, \vec{c}) + d(\vec{c}, \vec{b})$.

Teorema. Seja V um espaço vectorial, com um produto interno, e seja F um subespaço vectorial, de dimensão finita, de V . Para cada vector $\vec{v} \in V$, a $proj_F^\perp \vec{v}$ é o vector de F mais próximo de \vec{v} , isto é, cuja distância a \vec{v} é mínima.

Definição (Distância de um vector a um subespaço). Seja V um espaço vectorial, com um produto interno, e seja F um subespaço vectorial, de dimensão finita, de V . Dado um vector $\vec{v} \in V$, chama-se distância de \vec{v} a F , ao número real

$$d(\vec{v}, F) = \min\{\|\vec{v} - \vec{f}\| : \vec{f} \in F\}.$$

Nota. Seja V um espaço vectorial, com um produto interno, e seja F um subespaço vectorial, de dimensão finita, de V . Pelo teorema anterior, para cada $\vec{v} \in V$, então:

$$d(\vec{v}, F) = \min\{\|\vec{v} - \vec{f}\| : \vec{f} \in F\} = \|\vec{v} - proj_F^\perp \vec{v}\| = \sqrt{\|\vec{v}\|^2 - \|proj_F \vec{v}\|^2}.$$

A última igualdade deve-se ao teorema de Pitágoras.

Produto externo

Teorema. Seja V um espaço euclidiano de dimensão três. Sejam os vectores $\vec{u}, \vec{v} \in V$ linearmente independentes. Então existe uma infinidade de vectores \vec{z} , tais que:

cujas colunas são compostas pelas componentes dos vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$, na base B considerada. O determinante da matriz A , toma o nome de determinante dos vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ em relação à base B :

$$det_B(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n) = |A|.$$

Teorema. Seja V um espaço euclidiano de dimensão 3, com uma base fixa $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$. Seja ε um número real positivo qualquer e sejam os vectores $\vec{u}, \vec{v} \in V$ linearmente independentes. Então, existe um, e um só, vector \vec{z} tal que:

- (a) $\vec{z} \perp \vec{u}$ e $\vec{z} \perp \vec{v}$,
- (b) $\|\vec{z}\| = \varepsilon$,
- (c) $det_B(\vec{u}, \vec{v}, \vec{z}) > 0$.

Definição (Produto externo). Seja V um espaço euclidiano de dimensão 3, com uma base fixa $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$. Para quaisquer vectores $\vec{u}, \vec{v} \in V$, chama-se produto externo (ou produto vectorial) de \vec{u} por \vec{v} , e representa-se por $\vec{u} \times \vec{v}$, ao vector assim definido:

- (1) Se os vectores \vec{u} e \vec{v} são linearmente dependentes, então $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$.
- (2) Se os vectores \vec{u} e \vec{v} são linearmente independentes, então $\vec{u} \times \vec{v}$ é o único vector de V que verifica as seguintes condições:
 - (a) $\vec{u} \times \vec{v} \perp \vec{u}$ e $\vec{u} \times \vec{v} \perp \vec{v}$,
 - (b) $\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin(\angle(\vec{u}, \vec{v}))$,
 - (c) $det_B(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \times \vec{v}) > 0$.

Nota. A determinação do produto externo de dois vectores linearmente independentes é, em geral, muito laboriosa. No entanto, se se conhece as componentes dos vectores em causa em relação à uma base ortonormada, o cálculo fica muito mais fácil, de acordo com o teorema que se segue.

Teorema. Seja V um espaço euclidiano de dimensão 3, com uma base ortonormada fixa $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$. Para quaisquer vectores $\vec{u}, \vec{v} \in V$, sejam

$$\vec{u} \equiv_B (u_1, u_2, u_3) \text{ e } \vec{v} \equiv_B (v_1, v_2, v_3).$$

Então, tem-se:

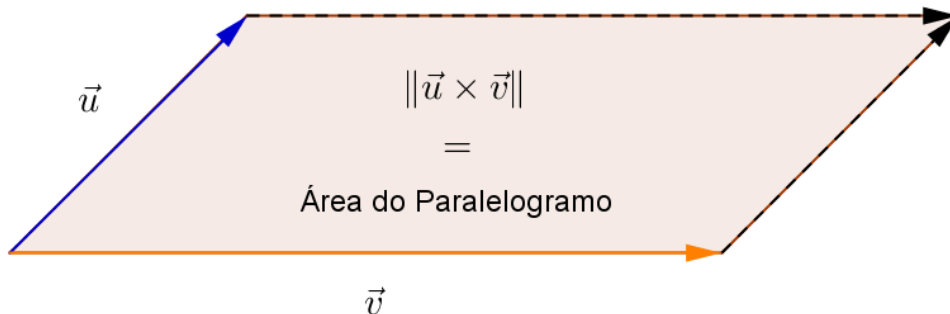
$$\vec{u} \times \vec{v} = (u_2 v_3 - u_3 v_2, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1).$$

Nota. Existe uma regra mnemónica para o resultado do teorema anterior:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \vec{e}_1 - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \vec{e}_2 + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \vec{e}_3,$$

Aplicando desenvolvimento de Laplace sobre a primeira linha.

Nota. Se os vectores \vec{u} e \vec{v} forem vectores do espaço euclidiano \mathbb{R}^3 , então $\|\vec{u} \times \vec{v}\|$ representa a área do paralelogramo, construído sobre os vectores dados, conforme a figura.



Exemplo. No espaço euclidiano \mathbb{R}^3 , com o produto interno canónico, sejam os vectores $\vec{u} = (1, 3, 4)$ e $\vec{v} = (2, -6, -5)$ de \mathbb{R}^3 .

- Determinar um vector unitário e ortogonal a \vec{u} e a \vec{v} .
- Determinar a área do paralelogramo construído sobre os vectores \vec{u} e \vec{v} .

Alínea (a). Seja $B = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ uma base ortonormada de \mathbb{R}^3 , em relação ao produto interno canónico. Então,

$$\vec{u} \equiv_B (1, 3, 4) \text{ e } \vec{v} \equiv_B (2, -6, -5).$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \left(\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -6 & -5 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} \right) = (9, 13, -12).$$

O vector pedido é o versor de $\vec{u} \times \vec{v}$:

$$\frac{1}{\|\vec{u} \times \vec{v}\|} \vec{u} \times \vec{v} = \left(\frac{9\sqrt{394}}{394}, \frac{13\sqrt{394}}{394}, \frac{-12\sqrt{394}}{394} \right).$$

Alínea (b). A área do paralelogramo é de $394 u^2$.

Conclusão

A introdução de produto interno num espaço vectorial real abstracto, permite, de uma certa forma, dar mais característica aos vectores (norma, ângulo entre vectores, projecção ortogonal, etc.)

A matriz mudança de base, entre outras coisas, permite relacionar diferentes aspectos, entre bases distintas, num espaço vectorial real de dimensão finita.

A matriz da métrica permite saber se uma determinada base é ou não ortogonal (ou ortonormada) em relação ao produto interno considerado.

O produto externo tem várias aplicações no cálculo de área e volume, nos espaços euclidianos \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3 .

1. No espaço vectorial real \mathbb{P}^2 , sejam as bases

$$B = \{x^2 - x + 1, -x + 1, -x^2 - x + 2\} \text{ e } B' = \{x^2 - x, -x^2 + 2x + 1, -x^2 + x + 1\}.$$

a) Determine $P = M(B \rightarrow B')$.

b) Mostre que $Q = P^{-1} = M(B' \rightarrow B)$.

c) Determine as componentes $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ do $\vec{v} = ax^2 + bx + 1$, $a, b \in \mathbb{R}$, na base B . Verifique que as componentes $(\lambda'_1, \lambda'_2, \lambda'_3)$ do vector \vec{v} na base B' , é dado por:

$$\begin{bmatrix} \lambda'_1 \\ \lambda'_2 \\ \lambda'_3 \end{bmatrix} = Q \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix}.$$

2. Verifique a seguinte operação é produto interno no espaço vectorial indicado:

(a) $\forall \vec{u} = (u_1, u_2), \vec{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2, \vec{u} \cdot \vec{v} = 3u_1v_1 + u_2v_1 + u_1v_2 + 2u_2v_2.$

3. Considere o seguinte produto interno no espaço vectorial real \mathbb{R}^3 :

$$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3), \vec{v} = (v_1, v_2, v_3),$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2u_1v_1 + u_3v_1 + 2u_2v_2 - u_3v_2 + u_1v_3 - u_2v_3 + 2u_3v_3.$$

Sejam $\vec{a} = (1, 2, 1)$ e $\vec{b} = (-1, 1, 1)$.

(a) Determine o ângulo de \vec{a} com \vec{b} , em relação a este produto interno.

(b) Determine a norma de \vec{a} e \vec{b} , em relação a este produto interno.

4. No espaço vectorial real \mathbb{R}^3 , seja o seguinte produto interno:

$$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3), \vec{v} = (v_1, v_2, v_3),$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2u_1v_1 + u_2v_1 - u_3v_1 + u_1v_2 + 3u_2v_2 - u_1v_3 + u_3v_3.$$

- (a) Diga para que valores reais de α são ortogonais os vectores $\vec{a} = (2, \alpha, 1)$ e $\vec{b} = (\alpha + 1, \alpha - 1)$.
7. Seja o espaço euclidiano \mathbb{R}^3 , com o seguinte produto interno:
 $\forall \vec{u} = (u_1, u_2, u_3), \vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$,
 $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2u_1v_1 + u_2v_1 - u_3v_1 + u_1v_2 + 3u_2v_2 - u_1v_3 + u_3v_3.$
- (a) Determine a matriz da métrica G em relação à base canónica B , e a matriz da métrica G' , em relação à base $B' = \{(1,1,1), (-1,0,1), (2,1,1)\}$, de \mathbb{R}^3 .
- (b) Determine a matriz mudança de base $P = M(B \rightarrow B')$.
- (c) Verifique que $G' = P^t G P$.
- (d) Verifique que G' é uma matriz definida positiva.
8. No espaço euclidiano \mathbb{R}^2 , seja o seguinte produto interno:
 $\vec{x} \cdot \vec{y} = 3x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2$,
 onde $\vec{x} = (x_1, x_2)$ e $\vec{y} = (y_1, y_2)$ são vectores arbitrários de \mathbb{R}^2 . Indique uma base ortonormada para o espaço.
9. No espaço euclidiano \mathbb{R}^3 , seja um produto interno que, em relação à base canónica, tem a seguinte matriz da métrica

$$G = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Indique uma base ortonormada para \mathbb{R}^3 .

10. No espaço euclidiano \mathbb{R}^3 , com o produto interno canónico, sejam os vectores $\vec{u} = (-1, 1, 2)$, $\vec{v} = (0, -1, 2)$ e $\vec{w} = (2, -1, -3)$.
- Determine, supondo fixa a base canónica:
- (a) $\vec{u} \times \vec{v}$
 (b) $\vec{v} \times \vec{w}$
 (c) $(\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w}$
 (d) $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$
11. No espaço euclidiano \mathbb{R}^3 , seja uma base $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, formada pelos vectores unitários e que fazem entre si ângulo de

$$\frac{\pi}{3}.$$

Sejam $\vec{x} = \vec{e}_1 - \vec{e}_3$, $\vec{y} = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2$, $\vec{z} = -\vec{e}_1 + 2\vec{e}_3$. Calcule:

- (a) $\vec{x} \times \vec{y}$.
 (b) $(\vec{x} \times \vec{y}) \cdot \vec{z}$.
 (c) $(\vec{x} \times \vec{y}) \times \vec{z}$.

Resumo da Unidade

Nesta unidade introduziu-se o conceito de espaço e subespaço vectorial real, com destaque para os espaços (ou subespaços) de dimensões finitas.

O conhecimento de base e dimensão de um determinado espaço vectorial real, permite identificar, com rigor, qualquer vector nele incluído.

Introduziu-se o produto interno num espaço vectorial real, facto esse que permitiu, entre outras coisas, a determinação da norma de um vector, cálculo do ângulo entre vectores,

normalização de uma base, cálculo de projecção ortogonal sobre um vector e sobre um subespaço vectorial.

Avaliação da Unidade

Verifique a sua compreensão!

Teste sumativo da unidade Espaço e subespaço vectorial

Instruções

O Teste de avaliação tem sete questões, algumas com alíneas.

Responda cada uma das questões de uma forma clara e justifique cada passo de resolução.

Critérios de Avaliação

Cada ponto ou alínea vale 10 pontos. Considera-se aprovado o estudante que tiver pelo menos 50% da cotação total.

1. No espaço vectorial real \mathbb{P}^3 , seja
 $B = \{x^3 - x^2 + 1, x^2 - x - 2, (k - 1)x^3 + x^2 + x - 1, -x^2 + x + 3\}$, $k \in \mathbb{R}$.
 Determine, justificando, os valores reais do parâmetro k , de modo que B seja uma base de \mathbb{P}^3 .
2. No espaço vectorial \mathbb{R}^4 , sejam os seguintes subespaços vectoriais:
 $F = \langle (1, 0, 1, -1) \rangle$, $G = \langle (1, -1, 1, 1), (0, 1, -1, 1) \rangle$ e $H = \langle (1, 1, -1, 3), (1, -1, 1, 0) \rangle$.
 Verifique se $F + G + H = F \oplus G \oplus H$.
3. No espaço vectorial real \mathbb{P}^3 , seja o subespaço vectorial $S = \{p(x) \in \mathbb{P}^3 : p(1) = 0\}$.
 Verifique que $S \leq \mathbb{P}^3$. Determine uma base e a dimensão de S .
4. No espaço vectorial real \mathbb{P}^2 , sejam os seguintes subespaços vectoriais:
 $F = \{a(x^2 - x) + b(x - 1) + c(-x^2 + 2x) : a = b - c = 0\}$ e
 $G = \{ax^2 + bx + c : a - b = a + b + c = 0\}$.
 Determine $F \cap G$.
5. No espaço vectorial real \mathbb{R}^3 , seja o seguinte produto interno:
 $\forall \vec{u} = (u_1, u_2, u_3), \vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$,
 $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2u_1v_1 + u_2v_1 - u_3v_1 + u_1v_2 + 3u_2v_2 - u_1v_3 + u_1v_3 + u_3v_3$.
 (a) Diga para que valores reais de α são ortogonais os vectores $\vec{a} = (2, \alpha, 1)$ e $\vec{b} = (\alpha + 1, 2, -1)$.
 (b) Determine um vector unitário e ortogonal a $\vec{u} = (1, -1, 2)$ e $\vec{v} = (2, 1, -1)$.
6. No espaço euclidiano \mathbb{R}^3 , considere o seguinte produto interno:
 $\forall \vec{u} = (u_1, u_2, u_3), \vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$,
 $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2u_1v_1 + u_2v_1 - u_3v_1 + u_1v_2 + 3u_2v_2 - u_1v_3 + u_3v_3$.
 Use o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt, para transformar a base $B = \{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (1, 2, 3)\}$ numa base ortonormal.
7. No espaço euclidiano \mathbb{R}^3 , com o produto interno canónico, sejam os vectores
 $\vec{u} = (-1, 1, 2)$, $\vec{v} = (0, -1, 2)$.
 Determine a área do paralelogramo, que tem como lados não paralelos os vectores \vec{u} e \vec{v} .

Leituras e outros Recursos

As leituras e outros recursos desta unidade encontram-se na lista de Leituras e Outros Recursos do curso.

- HOWARD,A., RORRES C., Álgebra linear com aplicações, Bookman, Porto Alegre, 8. Ed., 2001;
- LIPSCHUTZ, S., Álgebra Linear – teoria e problemas, McGraw-Hill, São Paulo, 2. ed., 1994.
- MONTEIRO A., Álgebra Linear e Geometria Analítica, McGraw-Hill L.da, Lisboa, 2001.
- NICHOLSON, W. K., Álgebra Linear, McGraw-Hill, São Paulo, 3. ed., 2006.

Unidade 3. Aplicação linear

Introdução à Unidade

Nesta unidade vai estudar-se as aplicações lineares de um espaço vectorial arbitrário para um outro espaço vectorial arbitrário. Os resultados que se vão obter aqui têm várias aplicações na Física, Engenharias e vários ramos de Matemática.

Objetivos da Unidade

Após a conclusão desta unidade, deverá ser capaz de:

- Identificar uma aplicação linear.
- Determinar o núcleo e a imagem de uma aplicação linear.
- Identificar um isomorfismo.
- Determinar matriz de uma aplicação linear, em relação à uma determinada base.
- Operar com aplicações lineares.

Termos-chave

Aplicação linear: Sejam V e V' espaços vectoriais quaisquer sobre o corpo \mathbb{R} . Uma aplicação

$$f: V \rightarrow V'$$

diz-se uma **aplicação linear**, se $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V, \lambda \in \mathbb{R}$ tem-se:

1. $f(\vec{u} + \vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v})$;
2. $f(\lambda \vec{u}) = \lambda f(\vec{u})$.

Imagem e imagem inversa de um conjunto: Seja $f: V \rightarrow V'$ uma aplicação linear, entre os espaços vectoriais reais V e V' . Sejam $F \subseteq V$ e $F' \subseteq V'$. **Imagem** de F é

$$f(F) = \{f(\vec{v}) : \vec{v} \in F\},$$

e **imagem inversa** de F' é

$$f^{-1}(F') = \{\vec{v} \in V : f(\vec{v}) \in F'\}.$$

Matriz de uma aplicação linear: Seja $f: V \rightarrow V'$ uma aplicação linear entre os espaços vectoriais V e V' sobre o corpo \mathbb{R} , com dimensões n e p , respectivamente. Sejam

$$B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\} \text{ e } B' = \{\vec{v}'_1, \vec{v}'_2, \dots, \vec{v}'_p\}$$

bases arbitrárias de V e V' , respectivamente. Sejam

$$\begin{aligned} f(\vec{v}_1) &\equiv_{B'} (a_{11}, a_{21}, \dots, a_{p1}) \\ f(\vec{v}_2) &\equiv_{B'} (a_{12}, a_{22}, \dots, a_{p2}) \\ &\vdots \\ f(\vec{v}_n) &\equiv_{B'} (a_{1n}, a_{2n}, \dots, a_{pn}) \end{aligned}$$

Então, a matriz da aplicação linear $f: V \rightarrow V'$ em relação às bases B e B' é

$$A = M(f; B, B') = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pn} \end{bmatrix},$$

isto é, é a matriz de dimensão $p \times n$, cuja coluna i é composta pelos componentes do vector $f(\vec{v}_i)$ na base B' .

Actividades de Aprendizagem

Actividade 1 – Aplicação Linear: núcleo e imagem.

Introdução

Nesta actividade introduz-se o conceito de aplicação linear, e dá-se principal destaque à determinação do núcleo da imagem.

Os conceitos de “imagem” e de “imagem inversa”, de um subespaço ou de um vector, bem como as suas propriedades, são fundamentais na determinação do núcleo e da imagem e, conseqüentemente, na caracterização de uma aplicação linear (monomorfismo, epimorfismo e isomorfismo).

Mostra-se a relação existente entre a dimensão do espaço de partida de uma aplicação linear, com a nulidade (dimensão do núcleo) e a característica (dimensão da imagem).

Detalhes da actividade

Definição (Aplicação linear). Sejam V e V' espaços vectoriais quaisquer sobre o corpo \mathbb{R} . Uma aplicação

$$f: V \rightarrow V'$$

diz-se uma **aplicação linear**, se $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V, \lambda \in \mathbb{R}$ tem-se:

3. $f(\vec{u} + \vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v})$;
4. $f(\lambda \vec{u}) = \lambda f(\vec{u})$.

Teorema. A definição anterior é equivalente ao seguinte: $f: V \rightarrow V'$ é uma aplicação linear se $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V, \forall \lambda, \beta \in \mathbb{R}$ tem-se:

$$f(\lambda \vec{u} + \beta \vec{v}) = \lambda f(\vec{u}) + \beta f(\vec{v}).$$

Exemplo. A aplicação $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, definida por

$$f(x, y, z) = (3x - 7z, x - 5y + 8z),$$

é uma aplicação linear.

Verificação. Sejam $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3), \vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ e seja $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(\vec{u} + \vec{v}) &= f(u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3) \\ &= (3(u_1 + v_1) - 7(u_3 + v_3), u_1 + v_1 - 5(u_2 + v_2) + 8(u_3 + v_3)) \\ f(\vec{u}) + f(\vec{v}) &= (3u_1 - 7u_3, u_1 - 5u_2 + 8u_3) + (3v_1 - 7v_3, v_1 - 5v_2 + 8v_3) \\ &= (3u_1 - 7u_3 + 3v_1 - 7v_3, u_1 - 5u_2 + 8u_3 + v_1 - 5v_2 + 8v_3) \\ &= (3(u_1 + v_1) - 7(u_3 + v_3), u_1 + v_1 - 5(u_2 + v_2) + 8(u_3 + v_3)) \end{aligned}$$

Isto é, $f(\vec{u} + \vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v})$.

$$\begin{aligned} \text{⊕} \quad f(\lambda \vec{u}) &= f(\lambda u_1, \lambda u_2, \lambda u_3) \\ &= (3(\lambda u_1) - 7(\lambda u_3), \lambda u_1 - 5(\lambda u_2) + 8(\lambda u_3)) \\ \lambda f(\vec{u}) &= \lambda(3u_1 - 7u_3, u_1 - 5u_2 + 8u_3) \\ &= (\lambda 3u_1 - \lambda 7u_3, \lambda u_1 - \lambda 5u_2 + \lambda 8u_3) \\ &= (3(\lambda u_1) - 7(\lambda u_3), \lambda u_1 - 5(\lambda u_2) + 8(\lambda u_3)) \end{aligned}$$

Isto é, $f(\lambda\vec{u}) = \lambda f(\vec{u})$.

Aplicação linear nula. Sejam V e V' espaços vectoriais quaisquer sobre o corpo \mathbb{R} . A aplicação linear

$$0: V \rightarrow V'$$

tal que $\forall \vec{v} \in V, 0(\vec{v}) = \vec{0}$, denomina-se por **aplicação linear nula**.

Aplicação linear identidade. Seja V um espaço vectorial qualquer sobre o corpo \mathbb{R} . A aplicação linear

$$i: V \rightarrow V$$

tal que $\forall \vec{v} \in V, i(\vec{v}) = \vec{v}$, denomina-se por **aplicação linear identidade**.

Nota. Pode-se definir uma aplicação linear $f: V \rightarrow V'$, entre os espaços vectoriais V e V' sobre o corpo \mathbb{R} , dando a conhecer as imagens de todos os vectores de uma base qualquer V .

Exemplo. Seja $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma aplicação linear definida por:

$$f((1,1)) = (3,2,1) \text{ e } f((0,-2)) = (0,1,0).$$

Determinar $f((a,b))$, para todo $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

Como os vectores $(1,1)$ e $(0,-2)$ é uma base de \mathbb{R}^2 , então qualquer vector $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, é uma combinação linear destes vectores, isto é, existem escalares λ_1 e λ_2 tais que

$$(a,b) = \lambda_1(1,1) + \lambda_2(0,-2).$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 1 & -2 & b \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & -2 & b-a \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & (a-b)/2 \end{bmatrix}$$

Então, $\lambda_1 = a$ e $\lambda_2 = (a-b)/2$.

Sendo assim,

$$\begin{aligned} f((a,b)) &= f\left(a(1,1) + \frac{a-b}{2}(0,-2)\right) \\ &= af((1,1)) + \frac{a-b}{2}f(0,-2) \\ &= a(3,2,1) + \frac{a-b}{2}(0,1,0) \\ &= \left(3a, \frac{5a-b}{2}, a\right) \end{aligned}$$

Uma aplicação linear $f: V \rightarrow V'$, entre os espaços vectoriais V e V' sobre o corpo \mathbb{R} , diz-se:

- **Monomorfismo**, se é injectiva.
- **Epimorfismo**, se é sobrejectiva.
- **Isomorfismo**, se é simultaneamente monomorfismo e epimorfismo.
- **Endomorfismo**, se $V = V'$.
- **Automorfismo**, se é simultaneamente isomorfismo e endomorfismo.

Teorema. Seja $f: V \rightarrow V'$ uma aplicação linear, entre os espaços vectoriais V e V' sobre o corpo \mathbb{R} . Então:

1. $f(\vec{0}_V) = \vec{0}_{V'}$, onde $\vec{0}_V$ e $\vec{0}_{V'}$ representam vectores nulos em V e V' , respectivamente.
2. $\forall \vec{v} \in V, f(-\vec{v}) = -f(\vec{v})$.
3. $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V, f(\vec{u} - \vec{v}) = f(\vec{u}) - f(\vec{v})$.
4. f transforma vectores linearmente dependentes de V em vectores linearmente dependentes de V' , isto é, se $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ são vectores linearmente dependentes de V , então $f(\vec{v}_1), f(\vec{v}_2), \dots, f(\vec{v}_n)$ são também linearmente dependentes.
5. f transforma vectores linearmente independentes de V em vectores linearmente independentes de V' se, e somente se, f é injectiva.

Definição. (Imagem e imagem inversa). Seja $f: V \rightarrow V'$ uma aplicação linear, entre os espaços vectoriais reais V e V' . Sejam $F \subseteq V$ e $F' \subseteq V'$. **Imagem** de F é

$$f(F) = \{f(\vec{v}): \vec{v} \in F\},$$

e **imagem inversa** de F' é

$$f^{-1}(F') = \{\vec{v} \in V: f(\vec{v}) \in F'\}.$$

Nota. $f(\{\vec{v}\}) = f(\{\vec{v}\})$ e $f^{-1}(F') = f^{-1}(\{F'\})$.

Exemplo. Seja a aplicação linear $f: \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^1$, definida por

$$f(ax^2 + bx + c) = (a - c)x + b, \text{ para todo } a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Sejam $F = \langle x, x - 1 \rangle$, $G = \langle x, x - 1 \rangle$, $F' = \langle x + 1, -x \rangle$ e $G' = \langle -2x + 1 \rangle$. Determinar $f(F)$, $f(G)$, $f^{-1}(F')$ e $f^{-1}(G')$.

$$f(F) = \{f(x), f(x - 1)\} = \{1, x - 1\}.$$

$$G = \langle x, x - 1 \rangle = \{ax + \beta(x - 1): \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = \{(\alpha + \beta)x - \beta: \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

Então:

$$\begin{aligned} f(G) &= \{f((\alpha + \beta)x - \beta): \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \\ &= \{\beta x + \alpha + \beta: \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \\ &= \{\beta(x + 1) + \alpha: \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle x + 1, 1 \rangle \\ &= \mathbb{P}^1 \end{aligned}$$

$$f^{-1}(F') = \{ax^2 + bx + c \in \mathbb{P}^2: f(ax^2 + bx + c) \in F'\}$$

$$\begin{aligned} f(ax^2 + bx + c) \in F' &\Leftrightarrow f(ax^2 + bx + c) = x + 1 \quad \text{ou} \quad f(ax^2 + bx + c) = -x \\ &\Leftrightarrow (a - c)x + b = x + 1 \quad \text{ou} \quad (a - c)x + b = -x \\ &\Leftrightarrow (a - c = 1 \quad \text{e} \quad b = 1) \quad \text{ou} \quad (a - c = -1 \quad \text{e} \quad b = 0) \\ &\Leftrightarrow (a = 1 + c \quad \text{e} \quad b = 1) \quad \text{ou} \quad (a = -1 + c \quad \text{e} \quad b = 0) \end{aligned}$$

Então:

$$\begin{aligned} f^{-1}(F') &= \{(1 + c)x^2 + x + c: c \in \mathbb{R}\} \cup \{(-1 + c)x^2 + c: c \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x^2 + x\} + \{x^2 + 1\} \cup \{-x^2\} + \{x^2 + 1\} \end{aligned}$$

$$G' = \langle -2x + 1 \rangle = \{\lambda(-2x + 1): \lambda \in \mathbb{R}\}$$

$$f^{-1}(G') = \{ax^2 + bx + c \in \mathbb{P}^2: f(ax^2 + bx + c) = -2\lambda x + \lambda\}$$

$$\begin{aligned} f(ax^2 + bx + c) = -2\lambda x &\Leftrightarrow +\lambda(a - c)x + b = -2\lambda x + \lambda \\ &\Leftrightarrow a - c = -2\lambda \quad e \quad b = \lambda \\ &\Leftrightarrow a = c - 2\lambda \quad e \quad b = \lambda \end{aligned}$$

$$f^{-1}(G') = \{(c - 2\lambda)x^2 + \lambda x + c: \lambda, c \in \mathbb{R}\} = \langle -2x^2 + x, x^2 + 1 \rangle.$$

Teorema. Seja $f: V \rightarrow V'$ uma aplicação linear entre os espaços vectoriais V e V' sobre o corpo \mathbb{R} , e sejam F e F' subespaços vectoriais sobre V e V' respectivamente. Então:

1. $f(F) = \{f(\vec{v}): \vec{v} \in F\}$ (diz-se **imagem** de F) é um subespaço vectorial de V' .
2. $f^{-1}(F') = \{\vec{v} \in V: f(\vec{v}) \in F'\}$ (diz-se **imagem inversa** de F') é um subespaço de V .

Nota. Seja $f: V \rightarrow V'$ uma aplicação linear entre os espaços vectoriais V e V' sobre o corpo \mathbb{R} . Sabe-se que o espaço vectorial V é subespaço vectorial de si próprio, e que $\{\vec{0}'\}$ é um subespaço vectorial de V' , onde $\vec{0}'$ é o vector nulo no espaço vectorial V' . Então:

1. $f(V)$ é um subespaço vectorial de V' ,
2. $f^{-1}(\{\vec{0}'\})$ é um subespaço vectorial de V .

Definição (Imagem e núcleo). Seja $f: V \rightarrow V'$ uma aplicação linear entre os espaços vectoriais V e V' sobre o corpo \mathbb{R} . O subespaço vectorial de V' , $f(V) = Im(f) = D'_f$, diz-se **imagem**, ou **contradomínio**, ou **espaço-imagem** ou **espaço característico** de f . Quando o espaço-imagem é finitamente gerado, a sua dimensão denomina-se por **característica** de f , e representa-se por c_f , ou seja, $c_f = dim(f(V))$.

O subespaço vectorial de V , $f^{-1}(\{\vec{0}'\}) = f^{-1}(\vec{0}') = Nuc(f) = Ker(f)$, diz-se **núcleo** ou **espaço-nulidade** de f . Quando o núcleo é finitamente gerado, a sua dimensão chama-se nulidade de f , e representa-se por n_f , ou seja, $n_f = dim(Nuc(f))$.

Exemplo. Seja a aplicação linear $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida por

$$f((x, y, z)) = (3x - 7z, x - 5y + 8z),$$

para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Determina-se a imagem de f e c_f , o núcleo de f e n_f .

$$Im(f) = f(\mathbb{R}^3) = \{f((x, y, z)): (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\}.$$

Então,

$$\begin{aligned} f((x, y, z)) &= (3x - 7z, x - 5y + 8z) \\ &= (3x, x) + (0, -5y) + (-7z, 8z) \\ &= x(3, 1) + y(0, -5) + z(-7, 8) \\ &= \langle (3, 1), (0, -5), (-7, 8) \rangle \end{aligned}$$

Como $Im(f)$ é um subespaço vectorial do espaço vectorial \mathbb{R}^2 e $dim(\mathbb{R}^2) = 2$, então $c_f \leq 2$. Por outro lado, no sistema de geradores de $im(f)$ há dois vetores linearmente independentes, por exemplo, $(3, 1)$ e $(0, -5)$, então $c_f = 2$.

$$Nuc(f) = f^{-1}((0, 0)) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: f((x, y, z)) = (0, 0)\}.$$

Ora,

$$\begin{aligned} f((x, y, z)) &= (0, 0) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 7z = 0 \\ x - 5y + 8z = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Resolve-se este sistema homogêneo com recurso a redução da sua matriz ampliada à forma escalonada reduzida.

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & -7 \\ 1 & -5 & 8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 0 & -7 \\ 0 & -5 & \frac{31}{3} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{-7}{3} \\ 0 & 1 & \frac{-31}{15} \end{bmatrix}$$

Tem-se então:

$$\begin{cases} x + \frac{-7}{3}z = 0 \\ y + \frac{-31}{15}z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7}{3}z \\ y = \frac{31}{15}z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7}{3}\lambda \\ y = \frac{31}{15}\lambda \\ z = \lambda \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\text{Nuc}_f = \left\{ \left(\frac{7}{3}\lambda, \frac{31}{15}\lambda, \lambda \right) : \lambda \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \left(\frac{7}{3}, \frac{31}{15}, 1 \right) \right\rangle = \langle (35, 31, 15) \rangle$$

Sendo assim, a nulidade de f é igual a um, ou seja, $n_f = 1$.

Teorema. Seja $f: V \rightarrow V'$ uma aplicação linear entre os espaços vectoriais V e V' sobre o corpo \mathbb{R} . Dados os vectores $\vec{v} \in V$ e $\vec{v}' = f(\vec{v})$, tem-se:

1. $f^{-1}(\vec{v}') = \{\vec{v} \in V: f(\vec{v}) = \vec{v}'\} = \{\vec{v}\} + \text{Nuc}(f)$.
2. f é um monomorfismo se, e somente se, $\text{Nuc}(f) = \{\vec{0}\}$, isto é, $\text{Nuc}(f)$ é o subespaço nulo de V .

Exemplo. A aplicação linear $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida por

$$f((x, y, z)) = (3x - 7z, x - 5y + 8z),$$

para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, tem núcleo diferente do subespaço nulo, $\{(0, 0, 0)\}$, de \mathbb{R}^3 , pois $\text{Nuc}_f = \langle (35, 31, 15) \rangle$ (ver o exemplo anterior). Logo a aplicação f não é um monomorfismo, isto é, não é injectiva.

Exemplo. Seja o endomorfismo $f: \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$, definida por:

$$\forall p(x) = ax^2 + bx + c \in \mathbb{P}^2, f(p(x)) = p'(x) = 2ax + b.$$

Determina-se $f^{-1}(3x + 1)$ e verifica-se se f é um monomorfismo.

$$f^{-1}(3x + 1) = \{ax^2 + bx + c: f(ax^2 + bx + c) = 3x + 1\}.$$

$$\begin{aligned} f(ax^2 + bx + c) &= 3x + 1 \\ \Leftrightarrow 2ax + b &= 3x + 1 \\ \Leftrightarrow 2a &= 3 \text{ e } b = 1 \text{ e } c \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow a &= \frac{3}{2} \text{ e } b = 1 \text{ e } c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Então,

$$f^{-1}(3x + 1) = \left\{ \frac{3}{2}x^2 + x + c: c \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \frac{3}{2}x^2 + x \right\} + \{c: c \in \mathbb{R}\} = \left\{ \frac{3}{2}x^2 + x \right\} + \langle 1 \rangle.$$

Ou seja, $\text{Nuc}_f = \langle 1 \rangle \neq \{0\}$, o que significa que f não é um monomorfismo.

Exemplo. Seja o endomorfismo $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, definida por

$$f((x, y, z)) = (x + y - z, y + z, x - y + z), \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Determina-se $f^{-1}((-2,1,4))$ e verifica-se se f é um monomorfismo.

$$f^{-1}((-2,1,4)) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f((x, y, z)) = (-2,1,4)\}.$$

$$\begin{aligned} & f((x, y, z)) = (-2,1,4) \\ \Leftrightarrow & (x + y - z, y + z, x - y + z) = (-2,1,4) \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x + y - z = -2 \\ y + z = 1 \\ x - y + z = 4 \end{cases} \end{aligned}$$

Resolve-se este sistema com recurso a redução da sua matriz ampliada à forma escalonada reduzida.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 4 \end{bmatrix} & \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \\ & \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{cases} x + y - z = -2 \\ y + z = 1 \\ x - y + z = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ z = 2 \end{cases}$$

Assim, $f^{-1}((-2,1,4)) = \{(1, -1, 2)\}$, ou seja, $\text{Nuc}_f = \{(0,0,0)\}$, isto é, f é um monomorfismo.

Teorema. Seja $f: V \rightarrow V'$ uma aplicação linear entre os espaços vectoriais V e V' sobre o corpo \mathbb{R} . Se F é um subespaço vectorial de V e $F = \langle X \rangle$, então

$$f(F) = \langle f(X) \rangle.$$

Em particular, se F é finitamente gerado, então $f(F)$ também é finitamente gerado, e

$$\dim(f(F)) \leq \dim(F).$$

$$\forall p(x) = ax^2 + bx + c \in \mathbb{P}^2, f(p(x)) = p'(x) = 2ax + b.$$

Calcular $f(F)$, onde $F = \langle x^2 - 1, x \rangle$ é um subespaço de \mathbb{P}^2 .

Pelo teorema anterior, $f(F) = \langle f(x^2 - 1), f(x) \rangle = \langle 2x, 1 \rangle = \mathbb{P}^1$.

Nota. O teorema aplica-se na determinação da imagem de uma aplicação $f: V \rightarrow V'$, desde que se conheça uma base de V .

Exemplo. Determinar a imagem do endomorfismo $f: \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$, definida por:

$$\forall p(x) = ax^2 + bx + c \in \mathbb{P}^2, f(p(x)) = p'(x) = 2ax + b.$$

Como $\mathbb{P}^2 = \langle x^2, x, 1 \rangle$, então

$$\text{Im}(f) = f(\mathbb{P}^2) = \langle f(x^2), f(x), f(1) \rangle = \langle 2x, 1, 0 \rangle = \langle 2x, 1 \rangle = \mathbb{P}^1.$$

Teorema. Seja $f: V \rightarrow V'$ uma aplicação linear entre os espaços vectoriais V e V' sobre o corpo \mathbb{R} . Se o espaço vectorial V tem dimensão finita, então

$$\dim(V) = c_f + n_f.$$

Em particular, se $\dim(V) = \dim(V') = n$, $n \in \mathbb{N}$, então f é um monomorfismo se, e somente se, f é um epimorfismo.

Exemplo. Sabe-se que núcleo do endomorfismo $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, definida por

$$f((x, y, z)) = (x + y - z, y + z, x - y + z), \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$$

é o subespaço nulo $\{(0,0,0)\}$. Logo a nulidade de f é igual a zero (0). Sendo assim, tem-se:

$$\dim(\mathbb{R}^3) = c_f + n_f \Leftrightarrow c_f = 3,$$

ou seja, $\text{Im}(f) = \mathbb{R}^3$, pois qualquer subespaço de \mathbb{R}^3 com a mesma dimensão que \mathbb{R}^3 é igual a \mathbb{R}^3 , conseqüentemente f é um epimorfismo. Então pode-se dizer que f é um automorfismo, pois é endomorfismo e isomorfismo (epimorfismo e monomorfismo).

Conclusão

Uma aplicação entre dois espaços vectoriais pode ser linear ou não. Uma aplicação entre dois espaços vectoriais é linear, se ela obedece todas as propriedades de uma aplicação linear.

Os conceitos de imagem e imagem inversa permitem a determinação do núcleo e da imagem.

Um isomorfismo pode ser identificado a partir do conhecimento do núcleo e da imagem de .

A relação entre a nulidade, característica e , numa aplicação linear , revela-se muito importante, pois desde que se conheça dois desses valores pode-se obter o terceiro, e a partir daí, tirar conclusões acerca da caracterização de uma aplicação linear.

Se a imagem inversa de um vector é diferente de vazio, pode-se deduzir o núcleo a partir daí.

Avaliação

- Verifique se cada uma das seguintes aplicações é ou não linear.
 - $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida por $f((x, y)) = (xy, x + y)$, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$.
 - $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{P}^1$, definida por $g((a, b, c)) = (a + c)x - a + b + 2c$, $\forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.
- Considere a aplicação linear $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{P}^2$ tal que

$$f((1,0,0)) = x^3 + 2x \quad \text{e} \quad f((0,1,0)) = x^2 - 2x \quad \text{e} \quad f((0,0,1)) = x^3 + x^2.$$
 - Determine $f((a, b, c))$, para todo $(a, b, c) \in \mathbb{R}$.
 - Determine o núcleo e a imagem de f .
 - Verifique que $c_f + n_f = 3$.
- Considere a aplicação linear $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{P}^2$, definida por

$$f((a, b, c)) = (2a + c)x^2 + (a + b)x + c, \forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3.$$
 - Verifique se f é um isomorfismo.

4. Considere a aplicação linear $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{P}^1$, definida por

$$f((a, b, c)) = (a + c)x - a + 2b - c, \forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3.$$

- a) Calcule $f^{-1}(x - 3)$.
- b) A partir do resultado da alínea anterior, diga se f é ou não um monomorfismo e indique a c_f .
- c) Determine $f(F)$, onde $F = \langle (1, 1, 0), (-1, 0, 1) \rangle$.
- d) Determine $f^{-1}(F')$, onde $F' = \langle x - 1 \rangle$.

Actividade 2 – Matriz de uma aplicação linear. Operações com aplicação linear.

Introdução

Com esta actividade, pretende-se essencialmente associar uma aplicação linear, entre espaços vectoriais reais de dimensões finitas, a matrizes, isto é, vai determinar-se matrizes de uma aplicação linear, em relação às diferentes bases do espaço de partida e do espaço de chegada.

Introduz-se os conceitos de matrizes equivalentes e de matrizes semelhantes, e mostra-se as relações existentes entre cada uma dessas classes. Aborda-se, também, as operações que se podem efectuar entre aplicações lineares, e mostra-se as relações que existem entre essas operações e as operações com matrizes que representam as aplicações lineares implicadas.

Detalhes da actividade

Definição (Matriz de uma aplicação linear). Seja $f: V \rightarrow V'$ uma aplicação linear entre os espaços vectoriais V e V' sobre o corpo \mathbb{R} , com dimensões n e p , respectivamente. Sejam

$$B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\} \text{ e } B' = \{\vec{v}'_1, \vec{v}'_2, \dots, \vec{v}'_p\}$$

bases arbitrárias de V e V' , respectivamente. Sejam

$$\begin{array}{rcl} \oplus & & \\ f(\vec{v}_1) & \equiv_{B'} & (a_{11}, a_{21}, \dots, a_{p1}) \\ f(\vec{v}_2) & \equiv_{B'} & (a_{12}, a_{22}, \dots, a_{p2}) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ f(\vec{v}_n) & \equiv_{B'} & (a_{1n}, a_{2n}, \dots, a_{pn}) \end{array} \square$$

Então, a matriz da aplicação linear $f: V \rightarrow V'$ em relação às bases B e B' é

$$A = M(f; B, B') = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pn} \end{bmatrix},$$

isto é, é a matriz de dimensão $p \times n$, cuja coluna i é composta pelos componentes do vector $f(\vec{v}_i)$ na base B' .

Nota. Uma aplicação linear tem várias matrizes, mas todas elas têm a mesma ordem. Sempre que se escolha uma base no espaço de partida e uma outra no espaço de chegada tem-se uma determinada matriz, ou seja, **uma matriz de uma aplicação linear depende das bases escolhidas nos espaços de partida e de chegada.**

Exemplo. Seja a aplicação linear $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida por

$$f((x, y, z)) = (3x - 7z, x - 5y + 8z),$$

para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Para determinar uma matriz de f escolhe-se uma base (arbitrária) no espaço de partida \mathbb{R}^3 e uma outra (também arbitrária) no espaço de chegada \mathbb{R}^2 .

Se se escolher a base $B_c = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$, base canónica de \mathbb{R}^3 , e a base $B'_c = \{(1,0), (0,1)\}$, base canónica de \mathbb{R}^2 , tem-se:

$$\begin{aligned} f((1,0,0)) &= (3,1) \equiv_{B'} (3,1) \\ f((0,1,0)) &= (0,-5) \equiv_{B'} (0,-5) \\ f((0,0,1)) &= (-7,8) \equiv_{B'} (-7,8) \end{aligned}$$

Sendo assim, a matriz da aplicação linear f em relação à essas bases é

$$A = M(f; B_c, B'_c) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -7 \\ 1 & -5 & 8 \end{bmatrix}.$$

Por outro lado, se se escolher a base $B = \{(1, -1, -1), (0,1,2), (0,0,1)\}$ de \mathbb{R}^3 , e a base $B' = \{(1, -1), (-1,2)\}$ de \mathbb{R}^2 , tem-se:

$$\begin{aligned} f((1, -1, -1)) &= (10, -2) \\ f((0,1,2)) &= (-14, 11) \\ f((0,0,1)) &= (-7, 8) \end{aligned}$$

As componentes destas imagens na base B' são determinadas da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 10 & -14 & -7 \\ -1 & 2 & -2 & 11 & 8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 10 & -14 & -7 \\ 0 & 1 & 8 & -3 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 18 & -17 & -6 \\ 0 & 1 & 8 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Então:

$$\begin{aligned} f((1, -1, -1)) &= (10, -2) \equiv_{B'} (18, 8) \\ f((0,1,2)) &= (-14, 11) \equiv_{B'} (-17, -3) \\ f((0,0,1)) &= (-7, 8) \equiv_{B'} (-6, 1) \end{aligned}$$

Logo, a matriz da aplicação linear f em relação à estas bases é:

$$A = M(f; B, B') = \begin{bmatrix} 18 & -17 & -6 \\ 8 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Teorema. Seja $f: V \rightarrow V'$ uma aplicação linear entre os espaços vectoriais V e V' sobre o corpo \mathbb{R} , com dimensões n e p , respectivamente. Sejam

$$B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\} \text{ e } B' = \{\vec{v}'_1, \vec{v}'_2, \dots, \vec{v}'_p\}$$

bases arbitrárias de V e V' . Dado um vector $\vec{x} \in V$, seja $\vec{x} \equiv_B (x_1, x_2, \dots, x_n)$ (componentes do vector \vec{x} na base B). Considere a matriz coluna $X = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^t$ das componentes do vector \vec{x} na base B . Então $X' = AX$ é a matriz coluna das componentes de $f(\vec{x})$ na base B' .

Exemplo. Seja a aplicação linear f do exemplo anterior. A matriz de f em relação às bases $B = \{(1, -1, -1), (0,1,2), (0,0,1)\}$ de \mathbb{R}^3 e $B' = \{(1, -1), (-1,2)\}$ de \mathbb{R}^2 é, como se sabe:

$$A = M(f; B, B') = \begin{bmatrix} 18 & -17 & -6 \\ 8 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Seja $\vec{x} = (x, y, z)$ um vector arbitrário de \mathbb{R}^3 . Determina-se as componentes do vector \vec{x} na base $B = \{(1, -1, -1), (0, 1, 2), (0, 0, 1)\}$, da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ -1 & 1 & 0 & y \\ -1 & 2 & 1 & z \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & x+y \\ 0 & 2 & 1 & x+z \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & x+y \\ 0 & 0 & 1 & -x-2y+z \end{bmatrix}$$

Então, $\vec{x} = (x, y, z) \equiv_B X = (x, x+y, -x-2y+z)$. Calcula-se

$$X' = AX = \begin{bmatrix} 7x - 5y - 6z \\ 4x - 5y + z \end{bmatrix}.$$

Isto é, $f((x, y, z)) \equiv_{B'} (7x - 5y - 6z, 4x - 5y + z)$. Então

$$\begin{aligned} f((x, y, z)) &= (7x - 5y - 6z)(1, -1) + (4x - 5y + z)(-1, 2) \\ &= (3x - 7z, x - 5y + 8z) \end{aligned}$$

Nota. O exemplo anterior mostra que uma aplicação linear $f: V \rightarrow V'$ fica bem definida quando se conhece uma matriz de f em relação à duas bases arbitrárias de V e V' .

Toda matriz A de dimensão $m \times n$ representa uma determinada aplicação linear $f: V \rightarrow V'$, onde $\dim(V) = n$ e $\dim(V') = m$. A aplicação linear fica completamente definida, quando se conhece as bases B e B' , tais que $A = M(f; B, B')$.

Exemplo. Seja a matriz real

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

A matriz A representa uma aplicação linear $f: V \rightarrow V'$, onde $\dim(V) = 3$ e $\dim(V') = 2$, por exemplo, $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{P}^1$.

Escolhe-se uma base arbitrária de V , e uma outra de V' . Neste caso, seja

$$B = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\},$$

a base canónica de \mathbb{R}^3 , e

$$B' = \{x, 1\},$$

a base de \mathbb{P}^1 .

Então, para todo $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, $(a, b, c) \equiv_B (a, b, c)$. Tem-se:

$$A \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a - 2c \\ 2a + b + 5c \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$f((a, b, c)) = (-a - 2c)x + 2a + b + 5c.$$

Teorema. Seja $f: V \rightarrow V'$ uma aplicação linear, entre os espaços vectoriais reais V e V' . Sejam B e B' bases arbitrárias de V e V' respectivamente. Então, f é um isomorfismo se, e somente se, $A = M(f; B, B')$ é invertível (ou regular).

Outra forma de definir uma matriz mudança de base

Definição. Seja V um espaço de dimensão $n \in \mathbb{N}$. Seja a aplicação linear identidade

$$i: V \rightarrow V.$$

Considera-se em V duas bases B e B' , a primeira no espaço de partida e a segunda no espaço de chegada. Então, a matriz

$$M(i, B, B') = M(B' \rightarrow B) \quad e \quad M(i, B', B) = M(B \rightarrow B').$$

Operações com aplicações lineares

Definição. Sejam V e V' espaços vectoriais reais, $f: V \rightarrow V'$ e $g: V \rightarrow V'$ aplicações lineares.

1. A **soma de f com g** é uma aplicação linear

$$f + g: V \rightarrow V'$$

definida por $(f + g)(\vec{x}) = f(\vec{x}) + g(\vec{x}), \forall \vec{x} \in V$.

2. O **produto da aplicação f por um escalar $\lambda \in \mathbb{R}$** é uma aplicação linear

$$\lambda f: V \rightarrow V'$$

definida por $(\lambda f)(\vec{x}) = \lambda f(\vec{x}), \forall \vec{x} \in V$.

Teorema. Nas condições da definição anterior, se B e B' são bases de V e V' , respectivamente, e $A = M(f; B, B')$ e $C = M(g; B, B')$, então

$$A + C = M(f + g; B, B') \quad e \quad \lambda A = M(\lambda f; B, B').$$

Definição. Sejam V, V' e V'' espaços vectoriais reais, $f: V \rightarrow V'$ e $g: V' \rightarrow V''$ aplicações lineares. A **composição $g \circ f$** é uma aplicação linear

$$g \circ f: V \rightarrow V''$$

definida por $(g \circ f)(\vec{x}) = g(f(\vec{x})), \forall \vec{x} \in V$.

Teorema. Nas condições da definição anterior, se B, B' e B'' são bases de V, V' e V'' , respectivamente, e $A = M(f; B, B')$ e $C = M(g; B', B'')$, então

$$CA = M(g \circ f; B, B'').$$

Teorema. Seja $f: V \rightarrow V'$ um isomorfismo, entre os espaços vectoriais reais V e V' . Então, a aplicação inversa $f^{-1}: V' \rightarrow V$ é um isomorfismo. Mais ainda, se $A = M(f; B, B')$, então $A^{-1} = M(f^{-1}; B', B)$.

Exemplo. Sejam as seguintes aplicações lineares:

- $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{P}^2$, definida por

$$f((a, b, c)) = (a + c)x^2 + (b + c)x + a - b + c, \quad \forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3;$$
- $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{P}^2$, definida pela matriz

$$A = M(g; B, B') = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

onde $B = \{(1,1,1), (0,1,2), (-1,0,2)\}$ é uma base de \mathbb{R}^3 e $B' = \{x^2, -x, x + 1\}$ é uma base de \mathbb{P}^2 ;

- $h: \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$h(ax^2 + bx + c) = a + b - c, \quad \forall ax^2 + bx + c \in \mathbb{P}^2.$$
- Determinar a matriz $A' = M(f; B, B')$ e a matriz $C = M(h; B', B'')$, onde $B'' = \{1\}$ é uma base de \mathbb{R} .
 - Definir a aplicação linear $f + g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{P}^2$.
 - Determinar a matriz $D = M(f + g, B, B')$ e verificar que $D = A + A'$.
 - Verificar que f é um isomorfismo.
 - Definir o isomorfismo $f^{-1}: \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$.
 - Determinar a matriz da aplicação $-3(f + g): \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{P}^2$.
 - Determinar a matriz $M(h \circ g; B, B'')$; e definir a aplicação $h \circ g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$.

Determinação da matriz $A' = M(f; B, B')$.

$$f((1,1,1)) = 2x^2 + 2x + 1; f((0,1,2)) = 2x^2 + 3x + 1; f((-1,0,2)) = x^2 + 2x + 1$$

Determina-se as componentes destes vectores na base $B' = \{x^2, -x, x + 1\}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & a \\ 1 & 1 & 0 & b \\ 1 & 2 & 2 & c \end{bmatrix} &\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & a \\ 0 & 1 & 1 & b-a \\ 0 & 2 & 3 & c-a \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & a \\ 0 & 1 & 1 & b-a \\ 0 & 0 & 1 & a-2b+c \end{bmatrix} \sim \\ &\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2a-2b+c \\ 0 & 1 & 0 & -2a+3b-c \\ 0 & 0 & 1 & a-2b+c \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Então, $(a, b, c) \equiv_B (2a - 2b + c, -a + 3b - c, a - 2b + c)$. Calcula-se agora,

$$A \begin{bmatrix} 2a - 2b + c \\ -2a + 3b - c \\ a - 2b + c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2a - 2b + c \\ -2a + 3b - c \\ a - 2b + c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a - 2b + c \\ -2a + 3b - c \\ 4a - 5b + 2c \end{bmatrix}$$

Então, $g((a, b, c)) \equiv_{B'} (2a - 2b + c, -2a + 3b - c, 4a - 5b + 2c)$. Logo:

$$\begin{aligned} g((a, b, c)) &= (2a - 2b + c)x^2 + (-2a + 3b - c)x + (4a - 5b + 2c)(x + 1) \\ &= (2a - 2b + c)x^2 + (6a - 8b + 3c)x + 4a - 5b + 2c \end{aligned}$$

$$f((a, b, c)) + g((a, b, c)) = (3a - 2b + 2c)x^2 + (6a - 7b + 4c)x + 5a - 6b + 3c$$

Então, a aplicação linear $f + g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{P}^2$ é definida por

$$(f + g)(a, b, c) = (3a - 2b + 2c)x^2 + (6a - 7b + 4c)x + 5a - 6b + 3c, \forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3.$$

Determinação da matriz $D = M(f + g, B, B')$.

$$(f + g)(1, 1, 1) = 3x^2 + 3x + 2$$

$$(f + g)(0, 1, 2) = 2x^2 + x$$

$$(f + g)(-1, 0, 2) = x^2 + 2x + 1$$

Determina-se as componentes destes vectores na base B' .

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(f + g)(1, 1, 1) = 3x^2 + 2x + 4 \equiv_{B'} (3, -1, 2)$$

$$(f + g)(0, 1, 2) = 2x^2 - x + 4 \equiv_{B'} (2, -1, 0)$$

$$(f + g)(-1, 0, 2) = x^2 + 1 \equiv_{B'} (1, -1, 1)$$

$$D = M(f + g, B, B') = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

$|A'| = -3 - 4 - (-2 - 2) = -7 + 4 = -3$, logo A' é invertível e, conseqüentemente, f é um isomorfismo.

Definição do isomorfismo $f^{-1}: \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$.

$$A'^{-1} = M(f^{-1}; B', B) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Determina-se as componentes do vector arbitrário $ax^2 + bx + c$ de \mathbb{P}^2 , na base $B' = \{x^2, -x, x + 1\}$.

]

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & -1 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & -1 & 0 & b-c \\ 0 & 0 & 1 & c \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & -b+c \\ 0 & 0 & 1 & c \end{bmatrix}$$

$$ax^2 + bx + c \equiv_{B'} (a, -b + c, c)$$

Determina-se as componentes do vector $f^{-1}(ax^2 + bx + c)$.

$$A'^{-1} \begin{bmatrix} a \\ -b+c \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ -b+c \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-b+c \\ b-2c \\ -a+2c \end{bmatrix}.$$

$f^{-1}(ax^2 + bx + c) \equiv_{B'} (a-b+c, b-2c, -a+2c)$. Então:

$$\begin{aligned} f^{-1}(ax^2 + bx + c) &= (a-b+c)(1,1,1) + (b-2c)(0,1,2) + (-a+2c)(-1,0,2) \\ &= (2a-b-c, a-c, -a+b+c) \end{aligned}$$

Determinação da matriz da aplicação linear $-3(f+g): \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{P}^2$.

$$-3D = M(-3(f+g), B, B') = \begin{bmatrix} -9 & -6 & -3 \\ 3 & 3 & 3 \\ -6 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

Determinação da matriz $M(h \circ g; B, B'')$; e definição da aplicação $h \circ g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$.

Como

$$A = M(g; B, B') = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad C = M(h; B', B'') = [1 \quad -1 \quad 0],$$

então

$$M(h \circ g; B, B'') = CA = [1 \quad -1 \quad 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = [1 \quad -1 \quad 0].$$

Como, $(a, b, c) \equiv_B (2a - 2b + c, -a + 3b - c, a - 2b + c)$ e

Como $B'' = \{1\}$, então

$$(h \circ g)(a, b, c) = 4a - 5b + 2c, \quad \forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3.$$

Relação entre duas matrizes de uma aplicação linear

Seja uma aplicação linear $f: V \rightarrow V'$, entre os espaços vectoriais reais V e V' , de dimensões n e m , respectivamente. Sejam $A = M(f; B_1, B'_1)$ e $C = M(f; B_2, B'_2)$, onde B_1 e B_2 são bases arbitrárias de V e B'_1 e B'_2 são bases arbitrárias de V' . Sejam $P = M(i; B_2, B_1)$ e $Q = M(i; B'_1, B'_2)$. Então

$$C = QAP \Leftrightarrow A = Q^{-1}CP^{-1}.$$

Definição (Matrizes equivalentes). Sejam A e C matrizes reais do tipo $m \times n$. Diz-se que A é equivalente a C , e representa-se por $A \sim C$, se existem matrizes invertíveis P , de ordem n , e Q , de ordem m , tais que $C = QAP$.

Teorema. Sejam A e C matrizes de dimensões $m \times n$. Então $A \sim C$ se, e somente se, existe uma aplicação linear $f: V \rightarrow V'$, entre os espaços vectoriais reais V e V' , de dimensões n e m , respectivamente, e existem bases, B_1 e B_2 de V , e B'_1 e B'_2 de V' , tais que $A = M(f; B_1, B'_1)$ e $C = M(f; B_2, B'_2)$.

Nota. Segundo o teorema anterior, se duas matrizes são equivalentes, então elas representam uma determinada aplicação linear, em relação a determinadas bases do espaço de partida e do espaço de chegada. Também, dada uma aplicação linear arbitrária, são equivalentes quaisquer duas das suas matrizes, em relação a determinadas bases do espaço de partida e do espaço de chegada.

Exemplo. Indicar uma matriz equivalente a

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 3}.$$

Ora, A representa uma aplicação linear $f: V \rightarrow V'$, onde $\dim(V) = 3$ e $\dim(V') = 2$. Então, seja $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, por exemplo. Pode-se considerar que $A = M(f; B, B')$, onde $B = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ e $B' = \{(1,0), (0,1)\}$ são bases canónicas de \mathbb{R}^3 e \mathbb{R}^2 , respectivamente.

Para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \equiv_B (x, y, z)$ e

$$A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = [-x + y + z \quad x + 2z],$$

tem-se

$$f((x, y, z)) = (-x + y + z)(1,0) + (x + 2z)(0,1) = (-x + y + z, x + 2z).$$

Escolhe-se uma base B_1 de \mathbb{R}^3 e uma base B'_1 de \mathbb{R}^2 , de modo que $B_1 \neq B$ ou $B'_1 \neq B'$. Por exemplo, $B_1 = \{(1, -2, 0), (0, 1, -1), (1, -2, 1)\}$ e $B'_1 = \{(1, 1), (-1, 1)\}$.

Seja

$$B = M(f; B_1, B'_1) = \begin{bmatrix} -1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 2 & -1 & \frac{5}{2} \end{bmatrix}.$$

As matrizes A e B são equivalentes. Nota-se que $B = QAP$, onde

$$Q = M(i, B', B'_1) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad P = M(i, B_1, B) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

são matrizes invertíveis, pois $|Q| = \frac{1}{2}$ e $|P| = 1$.

Sejam V um espaço vectorial, de dimensão n , e $f: V \rightarrow V$, um endomorfismo de V . Sejam B_1 e B_2 bases arbitrárias de V . Sejam $A = M(f; B_1, B_1)$, $C = M(f; B_2, B_2)$, $P = M(i; B_2, B_1)$ e $Q = P^{-1} = M(i, B_1, B_2)$. Então

Definição (Matrizes semelhantes). Sejam A e C matrizes quadradas reais de ordem n . Diz-se que A é semelhante a B , e representa-se por $A \approx C$, se existe uma matriz invertível P , tal que $C = P^{-1}AP$.

Teorema. Sejam A e C matrizes reais de ordem n . Então $A \approx C$ se, e somente se, existe um endomorfismo $f: V \rightarrow V$, onde V é um espaço vectorial real de dimensão n , e existem bases B_1 e B_2 de V , tais que $A = M(f; B_1, B_1)$ e $C = M(f; B_2, B_2)$.

Nota. Segundo o teorema anterior, se duas matrizes são semelhantes, então elas representam um determinado endomorfismo de um espaço vectorial real V , em relação a duas bases V . Também, dado um endomorfismo de um espaço vectorial real V , são semelhantes quaisquer duas das suas matrizes, em relação a duas bases de V .

Exemplo. Dar exemplo de duas matrizes quadradas A e B , de ordem 3, semelhantes.

Ora, as matrizes A e B representam um endomorfismo $f: V \rightarrow V$, onde $\dim(V) = 3$. Seja, por exemplo, $f: \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ (pode-se escolher, também, $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$).

Escolhe-se uma matriz quadrada qualquer de ordem 3; por exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Pode-se considerar que $A = M(f; B, B)$, onde $B = \{x^2, x, 1\}$ é a base canónica de \mathbb{P}^2 .

Para todo $ax^2 + bx + c \in \mathbb{P}^2$, $ax^2 + bx + c \equiv_B (a, b, c)$ e

$$A \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a - b \\ a + c \\ a + 2b + 3c \end{bmatrix},$$

logo

$$f(ax^2 + bx + c) = (a - b)x^2 + (a + c)x + a + 2b + 3c.$$

Escolhe-se uma base qualquer B_1 de \mathbb{P}^2 , tal que $B_1 \neq B$; por exemplo

$$B_1 = \{x^2 - 1, x + 1, 1\}.$$

Seja

$$B = M(f; B_1, B_1) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

As matrizes A e B são semelhantes. Nota-se que $B = P^{-1}AP$, onde

$$P = M(i; B_1, B) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad P^{-1} = M(i; B, B_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Conclusão

Qualquer aplicação linear $f: V \rightarrow V'$, entre espaços vectoriais de dimensões finitas V e V' , pode ser associada a diferentes matrizes da mesma ordem (conforme for as bases escolhidas em V e V'). Se a $\dim(V) = n$ e a $\dim(V') = m$, então qualquer matriz que representa f tem dimensão $m \times n$.

Uma aplicação linear fica completamente definida quando se conhece uma base do espaço de partida, uma base do espaço de chegada e a matriz que a representa, em relação a essas bases.

Toda matriz de dimensão $m \times n$, pode representar uma aplicação linear $f: V \rightarrow V'$, onde $\dim(V) = n$ e $\dim(V') = m$.

Todo isomorfismo é representado por matrizes invertíveis, e toda matriz invertível representa um isomorfismo. Consequentemente, toda matriz mudança de base é invertível, e toda matriz invertível é matriz de mudança de base.

A soma de duas aplicações lineares, implica adição de matrizes correspondentes, em relação a bases apropriadas. A composição de aplicações, implica multiplicação das matrizes respectivas, na ordem inversa, em relação a bases apropriadas. A multiplicação de uma aplicação linear por um escalar, implica a multiplicação desse escalar pela matriz respectiva.

Dada uma matriz rectangular é sempre possível obter matrizes equivalentes à ela. Dada uma matriz quadrada é sempre possível obter matrizes semelhantes à ela.

Avaliação

1. Seja uma aplicação linear $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{P}^1$, tal que 2

$$A = M(f; B, B') = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix},$$

onde $B = \{(1, -1, 1), (0, 2, -1), (1, -1, 2)\}$ e $B' = \{x + 1, x - 1\}$.

- a) Mostre que, para todo $a, b, c \in \mathbb{R}$, $(a, b, c) \equiv_B \left(\frac{3}{2}a - \frac{1}{2}b - c, \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b, -\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + c\right)$.
 b) Mostre que, para todo $a, b, c \in \mathbb{R}$, $f((a, b, c)) = (-a + b)x - a + b + 2c$.
 c) Determine a matriz $C = M(f; B_1, B'_1)$, onde
 $B_1 = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ e $B'_1 = \{x, -x + 1\}$.
 d) Determine as matrizes invertíveis Q , de ordem 2, e P , de ordem 3, tais que $C = QAP$.

2. Determine uma matriz semelhante à matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

3. Seja a aplicação linear $g: \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $A = M(g; B, B') = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$, onde

$B = \{x^2, x - 1, -x^2 + 1\}$ e $B' = \{(1, 0, 1), (-1, 1, -1), (1, -1, 2)\}$.

- a) Justifique que g é um isomorfismo.
 b) Defina o isomorfismo $g^{-1}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{P}^2$.
 c) Seja $h: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{P}^1$, tal que $h((a, b, c)) = (a + b - c)x - a + 2c$, para todo $a, b, c \in \mathbb{R}$. Defina $h \circ g$.
 d) Determine a matriz $D = M(h \circ g; B', B'')$, onde $B'' = \{x, 1\}$.

Actividade 3 – Adjunta de uma aplicação linear - Endomorfismo adjunto. Endomorfismo ortogonal.

Introdução

Nesta actividade estuda-se a adjunta de uma aplicação linear, com destaque para endomorfismo adjunto e auto-adjunto.

Dá-se realce ao estudo de endomorfismo ortogonal no plano e no espaço euclidiano: reflexão e rotação.

Detalhes da actividade

Definição (Adjunto de uma aplicação linear). Seja $f: V \rightarrow V'$ uma aplicação linear, entre os espaços vectoriais reais V e V' , com produto interno. Uma aplicação linear **Teorema.** Sejam V e V' espaços euclidianos, de dimensões n e m , com bases $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ e $B' = \{\vec{v}'_1, \vec{v}'_2, \dots, \vec{v}'_m\}$, respectivamente. Sejam G e G' matrizes das métricas dos produtos internos, em relação às bases consideradas, em V e V' , respectivamente. Sejam $f: V \rightarrow V'$ uma aplicação linear e $A = [a_{ij}] = M(f; B, B')$ (matriz com dimensão $m \times n$). Então:

- (1) $A' = M(f^*; B', B) = G'^{-1}A^tG$, onde $f^*: V' \rightarrow V$ é a adjunta de $f: V \rightarrow V'$;
 (2) Se as bases B e B' são ortonormais, então $G = I_n$ e $G' = I_m$, logo $A' = A^t$.

Nota. Dados os espaços euclidianos V e V' e uma aplicação linear $f: V \rightarrow V'$, pode-se aplicar os estipulados no teorema anterior para determinar a sua adjunta $f^*: V' \rightarrow V$.

Exemplo. Sejam os espaços vectoriais reais \mathbb{R}^3 e \mathbb{R}^2 , munidos do produto interno canónico. Seja a aplicação linear $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida por

$$f((x, y, z)) = (x - y + z, y + 2z).$$

Determinar a adjunta de f .

Em relação ao produto interno canónico,

$$B = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\} \text{ e } B' = \{(1,0), (0,1)\},$$

são bases ortonormadas de \mathbb{R}^3 e \mathbb{R}^2 , respectivamente. Então

$$A = M(f; B, B') = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$A' = M(f^*; B', B) = A^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Para todo $a, b \in \mathbb{R}$, $(a, b) \equiv_{B'} (a, b)$.

$A' \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ -a + b \\ a + 2b \end{bmatrix}$. Logo $f^*: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, é definida por $f^*((a, b)) = (a, -a + b, a + 2b)$.

De facto, para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, tem-se:

$$\begin{aligned} f((x, y, z)) \cdot (a, b) &= (x - y + z, y + 2z) \cdot (a, b) \\ &= (x - y + z)a + (y + 2z)b \\ &= ax + (-a + b)y + (a + 2b)z \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} f^*((a, b)) \cdot (x, y, z) &= (a, -a + b, a + 2b) \cdot (x, y, z) \\ &= ax + (-a + b)y + (a + 2b)z, \end{aligned}$$

isto é,

$$f((x, y, z)) \cdot (a, b) = f^*((a, b)) \cdot (x, y, z).$$

Definição (Endomorfismo adjunto). Seja $f: V \rightarrow V$, é um endomorfismo de um espaço euclídeo V , de dimensão n . Diz-se que o endomorfismo $f^*: V \rightarrow V$ é um

$$f(\vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{v} \cdot f^*(\vec{w}).$$

Nota (Muito importante!!!). Do teorema anterior, se $f: V \rightarrow V$, é um endomorfismo do espaço euclidiano V , B é uma base arbitrária de V , G é a matriz da métrica do produto interno em V , em relação à base B , e $A = M(f; B, B)$, então:

- (1) $A' = M(f^*, B, B) = G^{-1}A^tG$, onde f^* é a adjunta de f ;
- (2) Se B é uma base ortonormal de V , então $G = G^{-1} = I$, logo $A' = A^t$.

Exemplo. Seja V um espaço euclidiano de dimensão 2. Seja $G = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ a matriz da métrica do produto interno em V , em relação à uma determinada base $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$. Seja $f: V \rightarrow V$, um endomorfismo de V e $A = M(f; B, B) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$. Definir o endomorfismo f^* (adjunto de f).

Pela nota anterior, $C = M(f^*, B, B) = G^{-1}A^tG$. Como $G^{-1} = G$, então

$$A' = GA^tG = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Seja \vec{v} um vector arbitrário de V ; como $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ é uma base de V , então existem escalares $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$, tais que $\vec{v} = \lambda\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2$. Tem-se

$$A' \begin{bmatrix} \lambda \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + \beta \\ -3\lambda + 2\beta \end{bmatrix}.$$

Então, $f^*: V \rightarrow V$ é definida por

$$f^*(\vec{v}) = (\lambda + \beta)\vec{v}_1 + (-3\lambda + 2\beta)\vec{v}_2.$$

Definição (Endomorfismo auto-adjunto). Um endomorfismo que seja adjunto de si próprio, chama-se **endomorfismo auto-adjunto**.

Definição (Endomorfismo ortogonal). Seja $f: V \rightarrow V$, um endomorfismo de um espaço euclidiano V . Diz-se que f é um endomorfismo ortogonal se $\forall \vec{v}, \vec{w} \in V$, tem-se

$$f(\vec{v}) \cdot f(\vec{w}) = \vec{v} \cdot \vec{w}.$$

Teorema. Seja $f: V \rightarrow V$, um endomorfismo de um espaço euclidiano V . Então:

- (1) Se para todo $\vec{v} \in V$, $\|f(\vec{v})\| = \|\vec{v}\|$, então f é um endomorfismo ortogonal;
- (2) f é um endomorfismo ortogonal se, e somente se, a matriz de f , em relação a qualquer base ortonormada de V , é ortogonal.

Exemplos de endomorfismos ortogonais no plano euclidiano \mathbb{R}^2 .

Seja o espaço vectorial \mathbb{R}^2 , munido do produto interno euclidiano.

Rotação por um ângulo θ , em torno da origem \mathcal{O} , no sentido anti-horário. Seja o endomorfismo $R_{\theta, \mathcal{O}}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, que leva todo vector $\vec{v} = (v_x, v_y) \in \mathbb{R}^2$ na sua rotação por um ângulo θ , em torno de \mathcal{O} , no sentido anti-horário, ou seja,

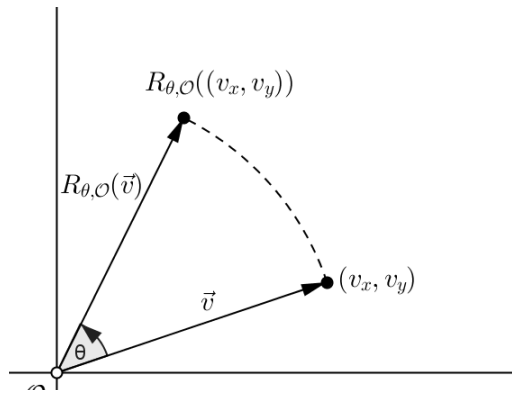
$$R_{\theta, \mathcal{O}}((v_x, v_y)) = (v_x \cos(\theta) - v_y \sin(\theta), v_x \sin(\theta) + v_y \cos(\theta)).$$

ouqse $\mathbb{B} = \{\vec{i} = (1\ 0), \vec{j} = (0\ 1)\}$

$$\mathbb{M} = M(\mathbb{B}^{\theta\ 0}: \mathbb{B}'\ \mathbb{B}) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix},$$

Notar-se que a matriz

este endomorfismo é ortogonal, pois $\|R_{\theta\ 0}((v_x, v_y))\| = \|(v_x, v_y)\|$.



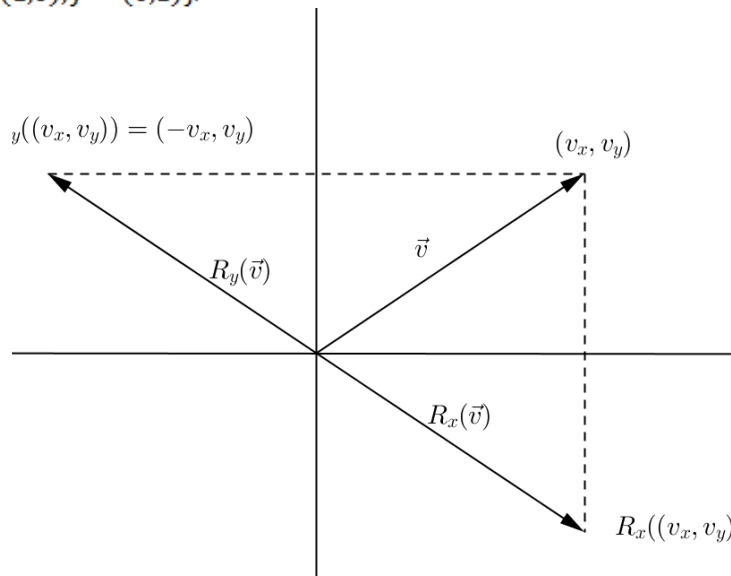
Reflexões em relação aos eixos coordenados. Sejam os endomorfismos $R_x: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $R_y: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que levam todo vector $\vec{v} = (v_x, v_y) \in \mathbb{R}^2$ nas suas reflexões em relação aos eixos x e y , respectivamente, ou seja,

$$R_x((v_x, v_y)) = (v_x, -v_y) \quad \text{e} \quad R_y((v_x, v_y)) = (-v_x, v_y).$$

Nota-se que as matrizes

$$A = M(R_x; B, B) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A = M(R_y; B, B) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

onde $B = \{i = (1,0), j = (0,1)\}$.



Reflexão em relação à recta $y = x$. Seja a aplicação linear $R_{y=x}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que leva todo vector $\vec{v} = (v_x, v_y) \in \mathbb{R}^2$ a sua reflexão em relação à recta $y = x$, ou seja,

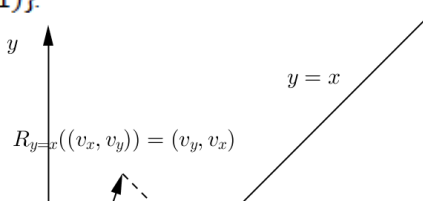
$$R_{y=x}((v_x, v_y)) = (v_y, v_x).$$

Este endomorfismo é ortogonal, pois $\|R_{y=x}((v_x, v_y))\| = \|(v_y, v_x)\|$.

Nota-se que a matriz

$$A = M(R_{y=x}; B, B) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

onde $B = \{i = (1,0), j = (0,1)\}$.



Exemplos de endomorfismos ortogonais no espaço euclidiano \mathbb{R}^3 .

Seja o espaço vectorial \mathbb{R}^3 , munido do produto interno euclidiano.

Rotação em torno do eixo x . Seja o endomorfismo $R_{\theta,x}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que leva todo vector $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z) \in \mathbb{R}^3$

Rotação por um ângulo θ , em torno do eixo y , no sentido anti-horário. Seja o endomorfismo $R_{\theta,y}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que leva todo vector $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z) \in \mathbb{R}^3$ na sua rotação por um ângulo θ , em torno do eixo y , no sentido anti-horário, ou seja,

$$R_{\theta,y}((v_x, v_y, v_z)) = (v_x \cos(\theta) + v_z \text{sen}(\theta), v_y, -v_x \text{sen}(\theta) + v_z \cos(\theta)).$$

Este endomorfismo é ortogonal, pois $\|R_{\theta,y}((v_x, v_y, v_z))\| = \|(v_x, v_y, v_z)\|$.

Nota-se que a matriz

$$A = M(R_{\theta,y}; B, B) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & \text{sen}(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen}(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix},$$

onde $B = \{i = (1,0,0), j = (0,1,0), k = (0,0,1)\}$.

Rotação por um ângulo θ , em torno do eixo x , no sentido anti-horário. Seja o endomorfismo $R_{\theta,x}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que leva todo vector $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z) \in \mathbb{R}^3$ na sua rotação por um ângulo θ , em torno do eixo x , no sentido anti-horário, ou seja,

$$R_{\theta,x}((v_x, v_y, v_z)) = (v_x, v_y \cos(\theta) - v_z \text{sen}(\theta), v_y \text{sen}(\theta) + v_z \cos(\theta)).$$

Este endomorfismo é ortogonal, pois $\|R_{\theta,x}((v_x, v_y, v_z))\| = \|(v_x, v_y, v_z)\|$.

Nota-se que a matriz

$$A = M(R_{\theta,x}; B, B) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & \text{sen}(\theta) \\ 0 & -\text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

Nota-se que a matriz

$$A = M(R_{\theta,x}; B, B) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) & 0 \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

onde $B = \{i = (1,0,0), j = (0,1,0), k = (0,0,1)\}$.

Reflexão em relação ao plano $z = 0$. Seja o endomorfismo $R_{z=0}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, que leva todo vector $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z) \in \mathbb{R}^3$ na sua reflexão em relação ao plano $z = 0$, ou seja,

$$R_{z=0}((v_x, v_y, v_z)) = (v_x, v_y, -v_z).$$

Este endomorfismo é ortogonal, pois $\|R_{z=0}((v_x, v_y, v_z))\| = \|(v_x, v_y, v_z)\|$.

Nota-se que a matriz

$$A = M(R_{z=0}; B, B) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

onde $B = \{i = (1,0,0), j = (0,1,0), k = (0,0,1)\}$.

Reflexão em relação ao plano $y = 0$. Seja o endomorfismo $R_{y=0}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, que leva todo vector $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z) \in \mathbb{R}^3$ na sua reflexão em relação ao plano $y = 0$, ou seja,

$$R_{y=0}((v_x, v_y, v_z)) = (v_x, -v_y, v_z).$$

Este endomorfismo é ortogonal, pois $\|R_{y=0}((v_x, v_y, v_z))\| = \|(v_x, v_y, v_z)\|$.

Nota-se que a matriz

$$A = M(R_{y=0}; B, B) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

onde $B = \{i = (1,0,0), j = (0,1,0), k = (0,0,1)\}$.

Reflexão em relação ao plano $x = 0$. Seja o endomorfismo $R_{x=0}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, que leva todo vector $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z) \in \mathbb{R}^3$ na sua reflexão em relação ao plano $x = 0$, ou seja,

$$R_{x=0}((v_x, v_y, v_z)) = (-v_x, v_y, v_z).$$

Nota-se que a matriz

$$A = M(R_{x=0}; B, B) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

onde $B = \{i = (1,0,0), j = (0,1,0), k = (0,0,1)\}$.

Conclusão

A matriz de um endomorfismo auto-adjunto é uma matriz simétrica. Sendo assim, pode-se sempre construir um endomorfismo auto-adjunto.

Os endomorfismos ortogonais têm grande importância no estudo das isometrias: rotação e reflexão, são alguns exemplos.

Avaliação

1. Verifique se as seguintes matrizes podem representar um endomorfismo ortogonal:

$$A = \begin{bmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/3 \\ -\sqrt{3}/3 & 1/2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/3 & 1/2 \end{bmatrix} \text{ e } C = \begin{bmatrix} 0,6 & 0,8 \\ 0,8 & -0,6 \end{bmatrix}.$$

2. Seja V um espaço euclidiano de dimensão dois. Seja $G = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ a matriz da métrica, em relação a certa base. Seja $f : V \rightarrow V$ o endomorfismo definido, em relação à mesma base, pela matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$. Defina o endomorfismo f^* , adjunto de f .
3. No espaço vectorial real \mathbb{R}^2 , seja $\vec{v} = (-1, 2)$.
 - (a) Determine a reflexão de \vec{v} em relação à recta $y = x$.
 - (b) Determine a rotação de \vec{v} pelo ângulo $\theta = \frac{\pi}{6}$, em torno da origem.
4. No espaço vectorial real \mathbb{R}^3 , seja o vector $\vec{v} = (-2, 1, 3)$.
 - (a) Determine a reflexão do vector \vec{v} sobre o plano $x = 0$.
 - (b) Determine a rotação do vector \vec{v} pelo ângulo $\frac{\pi}{3}$, em torno do eixo z .

Resumo da Unidade

Uma aplicação linear permite relacionar diferentes espaços vectoriais reais. Pode-se representar uma aplicação linear através da sua expressão de imagem, através de uma matriz, em relação a determinadas bases, dos espaços de partida e de chegada ou através de imagens de determinados vectores de uma determinada base do espaço de partida.

O cálculo de núcleo e da imagem de uma aplicação linear permite, entre outras coisas, a classificação de uma aplicação linear quanto à injectividade e sobrejectividade.

Quando existe um isomorfismo entre dois espaços vectoriais, pode-se “transferir” todas as propriedades dos vectores de um espaço para outro.

Avaliação da Unidade

Verifique a sua compreensão!

Teste sumativo da unidade Aplicação Linear

Instruções

O Teste de avaliação tem quatro questões, algumas com alíneas.

Responda cada uma das questões de uma forma clara e justifique cada passo de resolução.

Critérios de Avaliação

Cada ponto ou alínea vale 10 pontos. Considera-se aprovado o estudante que tiver pelo menos 50% da cotação total.

Avaliação

- (1) Seja $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{P}^2$ uma aplicação linear definida por:
 $f(1,0,1) = x^2 - x$, $f(1,1,1) = x^2 - 1$ e $f(0,-1,1) = 3x^2 - x - 2$.
- Determine $f(a, b, c)$, para todo $a, b, c \in \mathbb{R}$.
 - Determine a imagem de f .
 - Determine $f^{-1}(-x + 1)$.
 - Diga, justificando, se f é ou não um monomorfismo?
- (2) Seja $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $f(x, y, z) = (x + y, 0, y - z)$.
- Verifique que se trata de uma aplicação linear;
 - Determine uma base para $Nuc(f)$.
 - Determine uma base para $Im(f)$.
- (3) Seja V um espaço vectorial real, de base $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, e f um endomorfismo de V , que, em relação à essa base, é representado pela matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.
- Determine $f(\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3)$.
 - Indique um sistema de geradores para $Im(f)$.
- (4) No plano vectorial real \mathbb{R}^3 , seja $\vec{v} = (-1, 2, 1)$.
- Determine a rotação do vector \vec{v} , pelo ângulo $\theta = \frac{\pi}{4}$, em torno do eixo z .
 - Determine a rotação do vector \vec{v} , pelo ângulo $\theta = -\frac{\pi}{6}$, em torno do eixo x .

Leituras e outros Recursos

As leituras e outros recursos desta unidade encontram-se na lista de Leituras e Outros Recursos do curso.

- HOWARD, A., RORRES C., Álgebra linear com aplicações, Bookman, Porto Alegre, 8. Ed., 2001;
- LIPSCHUTZ, S., Álgebra Linear – teoria e problemas, McGraw-Hill, São Paulo, 2. ed., 1994.
- MONTEIRO A., Álgebra Linear e Geometria Analítica, McGraw-Hill L.da, Lisboa, 2001.
- NICHOLSON, W. K., Álgebra Linear, McGraw-Hill, São Paulo, 3. ed., 2006.

Unidade 4. Diagonalização de endomorfismo [matriz]. Forma quadrática

Introdução à Unidade

Nesta unidade, pretende-se essencialmente introduzir os conceitos de valor e vector próprio associado a uma matriz [endomorfismo]. A diagonalização de uma matriz [endomorfismo], bem como as consequências que emergem dela, são aspectos que vão ocupar, praticamente, mais da metade desta unidade. Pretende-se, de uma forma separada, analisar a diagonalização de uma matriz, e de um endomorfismo, e no final concluir que são conceitos equivalentes.

Nesta unidade, um vector de $\vec{v} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, passa a ter uma nova representação – a representação matricial, ou seja, o vector \vec{v} passa a ser representado pelo vector linha, $[x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]$, ou pelo vector coluna, $[x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^t$.

Os exercícios são realizados, essencialmente, com matrizes quadradas reais, de ordens 2 e 3; no entanto, pode-se propor exercícios com matrizes de ordens superiores, mas esses, serão realizados com auxílio do software SCILAB.

Objetivos da Unidade

Após a conclusão desta unidade, deverá ser capaz de:

- Determinar valores e vectores próprios de uma matriz [endomorfismo].
- Diagonalizar uma matriz [endomorfismo].
- Determinar o polinómio característico de uma matriz quadrada e de um endomorfismo.
- Diagonalizar ortogonalmente uma matriz simétrica.
- Resolver problemas algébricas de matrizes, aplicando a diagonalização de matrizes.
- Representar uma forma bilinear por uma matriz.
- Determinar uma forma quadrática a partir de uma forma bilinear simétrica e vice-versa.

Termos-chave

Polinómio característico de uma matriz: Seja A uma matriz quadrada real, de ordem $n \in \mathbb{N}$. Seja a matriz quadrada real $M = A - tI_n$, de ordem $n \in \mathbb{N}$, onde I_n é a matriz identidade de ordem $n \in \mathbb{N}$, e t é uma variável real. A simétrica da matriz M é a matriz $tI_n - A$, e o valor do seu determinante,

$$\Delta(t) = |tI_n - A| = (-1)^n |A - tI_n|,$$

que é um polinómio na variável t de ordem n , é chamado **polinómio característico** de A .

Polinómio característico de um endomorfismo: Seja $f : V \rightarrow V$, um endomorfismo de um espaço vectorial real V , de dimensão n , e seja A uma matriz de f , em relação à uma base arbitrária de V . O polinómio característico de f é o polinómio característico de A .

Valor e vector próprio de uma matriz: Seja A uma matriz quadrada real, de ordem n . Um escalar real λ é um **valor próprio** de A se existe um vector coluna não nulo $\vec{v} = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n]^t \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}.$$

Nesse caso, o vector \vec{v} denomina-se por **vector próprio associado ao valor próprio** λ .

Valor e vector próprio de um endomorfismo: Seja $f : V \rightarrow V$, um endomorfismo de um espaço vectorial real V , de dimensão n . Um escalar real λ diz-se **valor próprio** do endomorfismo f , se existe um vector não nulo $\vec{v} \in V$, tal que $f(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$. Nesse caso, diz-se que \vec{v} é um **vector próprio** do endomorfismo f , associado ao valor próprio λ . O conjunto de todos os valores próprios de A chama-se **espectro** de f .

Matriz diagonalizável: Seja A uma matriz quadrada real, de ordem n . A matriz A é diagonalizável se ela é semelhante a uma matriz diagonal

$$D = \text{diag}(k_1, k_2, \dots, k_n) = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & k_n \end{bmatrix}.$$

Ou seja, $D = P^{-1}AP$, para alguma matriz regular, de ordem n , P .

Endomorfismo diagonalizável: Seja $f : V \rightarrow V$, um endomorfismo de um espaço vectorial real V , de dimensão n . O endomorfismo f é diagonalizável se ele é representado por uma matriz diagonal, de ordem n ,

$$D = \text{diag}(k_1, k_2, \dots, k_n) = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & k_n \end{bmatrix}.$$

Por outras palavras, f é diagonalizável se existe uma base $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$ de V , tal que

$$\begin{aligned} f(u_1) &= k_1 u_1 \\ f(u_2) &= k_2 u_2 \\ \vdots & \quad \quad \quad \vdots \\ f(u_n) &= k_n u_n \end{aligned}$$

Multiplicidade geométrica de um valor próprio: Chama-se multiplicidade geométrica de λ , e representa-se por $m_g(\lambda)$, à dimensão do subespaço próprio E_λ .

Forma bilinear: Seja V um espaço vectorial real. Uma forma bilinear em V é uma aplicação $f : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ tal que para quaisquer escalares $a, b \in \mathbb{R}$, para quaisquer vectores $\vec{v}, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{u}, \vec{u}_1, \vec{u}_2$ de V tem-se:

$$(1) f(a\vec{u}_1 + b\vec{u}_2, \vec{v}) = af(\vec{u}_1, \vec{v}) + bf(\vec{u}_2, \vec{v});$$

$$(2) f(\vec{u}, a\vec{v}_1 + b\vec{v}_2) = af(\vec{u}, \vec{v}_1) + bf(\vec{u}, \vec{v}_2).$$

Forma quadrática. Seja V um espaço vectorial real. Uma função

Actividades de Aprendizagem

Actividade 1 - Vector próprio, associado a um valor próprio, num endomorfismo

Introdução

Nesta actividade vai introduzir-se os conceitos de polinómio característico, valor próprio e vector próprio de uma matriz [endomorfismo], bem como algumas das suas propriedades.

Detalhes da actividade

Valores de vectores próprios de uma matriz.

Definição (Polinómio característico de uma matriz). Seja A uma matriz quadrada real, de ordem $n \in \mathbb{N}$. Seja a matriz quadrada real $M = A - tI_n$, de ordem $n \in \mathbb{N}$, onde I_n é a matriz identidade de ordem $n \in \mathbb{N}$, e t é uma variável real. A simétrica da matriz M é a matriz $tI_n - A$, e o valor do seu determinante,

$$\Delta(t) = |tI_n - A| = (-1)^n |A - tI_n|,$$

que é um polinómio na variável t de ordem n , é chamado **polinómio característico** de A .

Teorema (Cayley – Hamilton). Toda matriz quadrada real é raiz do seu polinómio característico.

Exemplo. Seja a matriz quadrada real $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$. O polinómio característico desta matriz é:

$$\Delta(t) = |tI_n - A| = \begin{vmatrix} 1-t & 3 \\ 4 & 5-t \end{vmatrix} = (1-t)(5-t) - 12 = t^2 - 6t - 7.$$

Pelo Teorema Cayley e Hamilton (teorema, imediatamente anterior), a matriz A é raiz de $\Delta(t) = t^2 - 6t - 7$; verifica-se:

$$A^2 - 6A - 7I_2 = \begin{bmatrix} 13 & 18 \\ 24 & 37 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 & -18 \\ -24 & -30 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -7 & 0 \\ 0 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0_n.$$

Teorema. Matrizes semelhantes têm o mesmo polinómio característico. Ou seja, dada uma matriz quadrada real A , então a matriz $B = P^{-1}AP$ (semelhante a A), para alguma matriz real regular P , tem o mesmo polinómio característico que A .

Nota. Existe uma regra para a determinação do polinómio característico de uma matriz quadrada de ordem 2, e de ordem 3.

Caso 1 (Matriz quadrada de ordem 2). Seja $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, uma matriz quadrada real, de ordem 2. Então, o polinómio característico de A é:

$$\Delta(t) = t^2 - \text{tr}(A)t + |A|,$$

onde $\text{tr}(A)$ é o traço de A , e é igual a soma dos elementos principais de uma matriz quadrada qualquer, neste caso, $\text{tr}(A) = a_{11} + a_{22}$.

Caso 2 (Matriz quadrada de ordem 3). Seja $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ uma matriz quadrada real de ordem 3. Então, o polinómio característico de A é:

$$\Delta(t) = t^3 - \text{tr}(A)t^2 + (A_{11} + A_{22} + A_{33})t - |A|,$$

onde, A_{ii} , para todo $i \in \{1,2,3\}$, representa o cofactor da entrada (ou elemento) a_{ii} da matriz A .

Exemplo. Determinar o polinómio característico de cada uma das matrizes, abaixo indicadas:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 10 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 9 \end{bmatrix}.$$

Polinómio característico da matriz A :

$$\Delta(t) = t^2 - \text{tr}(A)t + |A| = t^2 - 15t + 44.$$

Polinómio característico de B :

$$\Delta(t) = t^3 - \text{tr}(A)t^2 + (A_{11} + A_{22} + A_{33})t - |A| = t^3 - 13t^2 + 31t - 17.$$

Definição (Valor e vector próprios de uma matriz). Seja A uma matriz quadrada real, de ordem n . Um escalar real λ é um **valor próprio** de A se existe um vector coluna não nulo $\vec{v} = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n]^t \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}.$$

Nesse caso, o vector \vec{v} denomina-se por **vector próprio associado ao valor próprio** λ .

Nota. Se \vec{v} é um vector próprio associado a um valor próprio λ , então qualquer múltiplo escalar não nulo de \vec{v} , $k\vec{v}$, $k \neq 0$, é, também, um vector próprio associado ao valor próprio λ .

Exemplo. Seja a matriz quadrada real, de ordem 2, $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$, e sejam os vectores $\vec{v}_1 = [1 \ -2]^t$, $\vec{v}_2 = [1 \ 1]^t \in \mathbb{R}^2$. Ora.

$A\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = [1 \ -2]^t$, isto é, \vec{v}_1 é um vector próprio de A , associado ao valor próprio 1.

$A\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} = [4 \ 4]^t = 4\vec{v}_2$, isto é, \vec{v}_2 é um vector próprio de A , associado ao valor próprio 4.

Definição (Subespaço próprio associado a um valor próprio). Seja λ um valor próprio, de uma matriz quadrada A , de ordem n . O conjunto

$$E_\lambda = \{\vec{v} = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n]^t \in \mathbb{R}^n : A\vec{v} = \lambda\vec{v}\}$$

é um subespaço vectorial, do espaço vectorial \mathbb{R}^n , e denomina-se por **subespaço próprio** associado ao valor próprio λ .

Teorema (Propriedades dos valores e vectores próprios). Seja A uma matriz quadrada, de ordem n . Então, as seguintes afirmações são equivalentes:

- (1) Um escalar real λ é um valor próprio de A ;
- (2) A matriz $M = A - \lambda I_n$ é singular;
- (3) O escalar real λ é raiz do polinómio característico $\Delta(t)$ de A .

Mais ainda, o subespaço próprio E_λ , associado ao valor próprio λ , é definido pelo sistema de equações lineares homogéneas $MX = 0_{n \times 1}$, onde $X = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^t$ e $0_{n \times 1} = [0 \ 0 \ \dots \ 0]^t$.

Nota (Muito importante!!!). O teorema anterior estipula que, os valores próprios de uma matriz quadrada real A , são exactamente as raízes reais do polinómio característico $\Delta(t)$ de A .

Como um polinómio, sobre o corpo \mathbb{R} , pode não ter raízes, então uma determinada matriz real pode não ter valores próprios, e, conseqüentemente, não ter vectores próprios.

Exemplo. Determinar os valores próprios da matriz quadrada real,

$$A = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 \end{bmatrix}.$$

Cálculo do polinómio característico. Por A ser uma matriz de ordem 3, em vez utilizar a definição do polinómio característico para determiná-lo, utiliza-se a fórmula que se segue:

$$\Delta(t) = t^3 - \text{tr}(A)t^2 + (A_{11} + A_{22} + A_{33})t - |A| = t^3 + 2t^2 + t.$$

Cálculo de valores próprios. Para determinar os valores próprios de A , basta determinar as raízes de $\Delta(t) = t^3 + 2t^2 + t$.

$$\Delta(t) = 0 \Leftrightarrow t^3 + 2t^2 + t = 0 \Leftrightarrow t = 0 \text{ ou } t = -1.$$

Agora vai determinar-se os subespaços próprios associados aos valores próprios $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = -1$.

Para o caso $\lambda_1 = 0$. Resolve-se o sistema homogéneo

$$MX = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = 0 \\ x_3 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Então, $E_0 = \{(x_3, 0, x_3) : x_3 \in \mathbb{R}\} = \langle (1, 0, 1) \rangle$ é o subespaço próprio associado ao valor próprio $\lambda_1 = 0$.

Para o caso $\lambda_2 = -1$. Resolve-se o sistema homogéneo

$$MX = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = 0 \\ x_3 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Então, $E_{-1} = \{(-x_3, 0, x_3) : x_3 \in \mathbb{R}\} = \langle (-1, 0, 1) \rangle$ é o subespaço próprio associado ao valor próprio $\lambda_2 = -1$.

Nota. É mais que evidente, que o conjunto dos vectores próprios, de uma matriz quadrada real A , de ordem n , associados a uma valor próprio λ , obtém-se eliminando do subespaço próprio E_λ , o vector nulo $\vec{0} = (0 \ 0 \ \dots \ 0) \in \mathbb{R}^n$.

Definição (Multiplicidade algébrica e geométrica de um valor próprio λ). Seja A uma matriz quadrada real, de ordem n . Se λ é um valor próprio da matriz A , então a multiplicidade algébrica de λ , representa-se por $m_a(\lambda)$, é a multiplicidade de λ , como raiz do polinómio característico de A , $\Delta(t)$; enquanto que, a multiplicidade geométrica de λ , representa-se por $m_g(\lambda)$, é definido como a dimensão do subespaço próprio E_λ .

Teorema. Seja A uma matriz quadrada real, de ordem n , e seja λ um valor próprio de A . Então, $m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda)$.

Teorema. Suponha-se que $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$ são vectores próprios, de uma matriz quadrada real A , de ordem n , associados a diferentes valores próprios $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$. Então, $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$ são linearmente independentes.

Valores e vectores próprios de um endomorfismo.

Definição (Polinómio característico de um endomorfismo). Seja $f : V \rightarrow V$, um endomorfismo de um espaço vectorial real V , de dimensão n , e seja A uma matriz de f , em relação à uma base arbitrária de V . O polinómio característico de f é o polinómio característico de A .

Nota. Como duas matrizes de f são semelhantes, e matrizes semelhantes possuem o mesmo polinómio característico, então um **endomorfismo tem um único polinómio característico**.

Definição (Valor e vector próprio de um endomorfismo). Seja $f : V \rightarrow V$, um endomorfismo de um espaço vectorial real V , de dimensão n . Um escalar real λ diz-se **valor próprio** do endomorfismo f , se existe um vector não nulo $\vec{v} \in V$, tal que $f(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$. Nesse caso, diz-se que \vec{v} é um **vector próprio** do endomorfismo f , associado ao valor próprio λ .

O conjunto de todos os valores próprios de A chama-se **espectro** de f .

Definição (Subespaço próprio). Seja λ um valor próprio de um endomorfismo $f : V \rightarrow V$, de um espaço vectorial real V , de dimensão n . Então, o conjunto

$$E_\lambda = \{\vec{v} \in V : f(\vec{v}) = \lambda\vec{v}\}$$

é um subespaço de V , denominado **subespaço próprio**, associado a λ .

Teorema. Seja $f : V \rightarrow V$, um endomorfismo de um espaço vectorial real V , de dimensão n , e seja A uma matriz de f , em relação à uma base qualquer de V . Então, são equivalentes as seguintes afirmações:

- (1) λ é um valor próprio de f ;
- (2) λ é raiz do polinómio característico $\Delta(t)$ de f ;
- (3) A matriz $M = A - \lambda I_n$ é singular.

Mais ainda, as componentes dos vectores de E_λ , em relação à base considerada, são as soluções do sistema homogéneo $MX = 0$, onde $M = A - \lambda I_n$, $X = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^t$ e $0_{n \times 1} = [0 \ 0 \ \dots \ 0]^t$.

Definição (Multiplicidade geométrica e algébrica de um valor próprio de um endomorfismo). Seja $f : V \rightarrow V$, um endomorfismo de um espaço vectorial real V , de dimensão n , e seja λ um valor próprio de f . Chama-se **multiplicidade geométrica** de λ , e representa-se por $m_g(\lambda)$, à dimensão de E_λ . Enquanto, a **multiplicidade algébrica** de λ , que se representa por $m_a(\lambda)$, é a multiplicidade de λ , como raiz do polinómio característico de f .

Teorema. Seja f um endomorfismo de um espaço vectorial real V , e seja λ um valor próprio de f . Então, $m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda)$.

Exemplo. Considere o endomorfismo g de \mathbb{P}^2 , definido por:

$$g(x^2 + 1) = 0, \quad g(-x^2 + x) = -x - 1 \quad \text{e} \quad g(-x + 1) = x^2 + x.$$

- (a) Determinar os valores próprios de g , e a multiplicidade algébrica de cada um deles.
- (b) Determinar os subespaços próprios de g .
- (c) Determinar a multiplicidade geométrica de cada um dos valores próprios obtidos.

Alínea (a). Para determinar valores e vectores próprios do endomorfismo g , é necessário determinar uma matriz de g , em relação à uma determinada base de \mathbb{P}^2 . Como $B = \{x^2 + 1, -x^2 + x, x^2 + x\}$ é uma base de \mathbb{P}^2 (verificar este facto), e são dadas as imagens de cada um dos vectores de B , pelo endomorfismo g , então pode-se determinar uma matriz de g , em relação à base B . Para isto, basta determinar as componentes de

$$g(x^2 + 1) = 0, \quad g(-x^2 + x) = -x - 1 \quad \text{e} \quad g(x^2 + x) = x^2 + x,$$

na base B . Então:

$$g(x^2 + 1) = 0 \equiv_B (0, 0, 0);$$

$$g(-x^2 + x) = -x - 1 \equiv_B (-1, -1, 0);$$

$$g(x^2 + x) = x^2 + x \equiv_B (1, 0, -1).$$

Logo, a matriz de g em relação à base B é

$$A = M(g; B, B) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Como o polinómio característico de g é o polinómio característico de A , então tem-se:

$$\Delta(t) = \begin{vmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & t+1 & 0 \\ 0 & 0 & t+1 \end{vmatrix} = t(t+1)^2.$$

Os valores próprios de g , são as raízes de $\Delta(t)$ que são 0 e -1 . $m_a(0) = 1$, pois é uma raiz simples de $\Delta(t)$, e a $m_a(-1) = 2$, pois é uma raiz dupla de $\Delta(t)$.

Alínea (b). Para calcular os subespaços próprios, há que resolver o sistema $MX = 0$, onde $M = A - \lambda I_3$, para cada valor próprio λ . As soluções de cada um dos sistemas, dão as componentes dos vectores próprios em relação à base considerada.

Para $\lambda = 0$, o conjunto solução do sistema $MX = 0$ é $S_0 = \langle (1, 0, 0) \rangle$, ou seja o subespaço próprio $E_0 = \langle x^2 + 1 \rangle$.

Para $\lambda = -1$, o conjunto solução do sistema $MX = 0$ é $S_{-1} = \langle (0, 1, 0), (0, 0, 1) \rangle$, ou seja, o subespaço próprio $E_{-1} = \langle -x^2 + x, -x + 1 \rangle$.

Alínea (c). $m_g(0) = 1$, pois $\dim(E_0) = 1$, e $m_g(-1) = 2$, pois $\dim(E_{-1}) = 2$.

Teorema. Seja $f : V \rightarrow V$, um endomorfismo de um espaço vectorial real V , de dimensão n . Suponha-se que $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$ são vectores próprios de f , associados a diferentes valores próprios $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, também, de f . Então, $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$ são linearmente independentes.

Conclusão

Os conceitos de valores e vectores próprios de um endomorfismo, definem-se à custa dos mesmos conceitos em relação à uma matriz. Isto deve-se ao facto de qualquer endomorfismo ter uma representação matricial. Por isso, toda propriedade de valor e vector próprio de uma matriz tem um equivalente num endomorfismo.

Avaliação

(1) Seja uma matriz quadrada real, de ordem 3, $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

- Determine os valores próprios de A .
- Determine os subespaços próprios de A . Indique o número máximo de vectores linearmente independentes.
- Determine a multiplicidade algébrica e a multiplicidade geométrica de cada um dos valores próprios de A .

(2) Seja $f : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ um endomorfismo do espaço vectorial real \mathbb{P}^2 , definido por $f(ax^2 + bx + c) = (2a + b - 2c)x^2 + (2a + 3b - 4c)x + a + b - c$.

- Determine o espectro de f .
- Determine os subespaços próprios de f .

Actividade 2 - Endomorfismo diagonalizável e matriz diagonalizável.

Introdução

Nesta actividade introduz-se os conceitos de matriz diagonalizável e endomorfismo diagonalizável, bem como as suas propriedades fundamentais. Aborda-se o caso da diagonalização de uma matriz simétrica.

Detalhes da actividade

Definição (Matriz diagonalizável). Seja A uma matriz quadrada real, de ordem n . A matriz A é diagonalizável se ela é semelhante a uma matriz diagonal

$$D = \text{diag}(k_1, k_2, \dots, k_n) = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & k_n \end{bmatrix}.$$

Ou seja, $D = P^{-1}AP$, para alguma matriz regular, de ordem n , P .

Teorema. Seja A uma matriz quadrada real, de ordem n . A matriz A é **diagonalizável (ou semelhante a uma matriz D)** se, e somente se, A **admite n vectores próprios linearmente independentes**, isto é, **existe uma base de \mathbb{R}^n , constituída de vectores próprios de A .**

Nesse caso, **as entradas diagonais de D , diga-se $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, são os valores próprios de A , associados a esses vectores próprios linearmente independentes**, e $D = P^{-1}AP$, onde P é uma matriz cujas colunas são os referidos vectores próprios linearmente independentes.

Exemplo. Seja a matriz quadrada real, de ordem 2, $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$, e sejam os vectores $\vec{v}_1 = [1 \quad -2]^t, \vec{v}_2 = [1 \quad 1]^t \in \mathbb{R}^2$. Ora.

$A\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = [1 \quad -2]^t$, isto é, \vec{v}_1 é um vector próprio de A , associado ao valor próprio 1.

$A\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} = [4 \ 4]^t = 4\vec{v}_2$, isto é, \vec{v}_2 é um vector próprio de A , associado ao valor próprio 4.

Como A , é uma matriz de ordem 2, e admite 2 vectores próprios linearmente independentes, então A é semelhante à matriz diagonal $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$, e $D = P^{-1}AP$, onde

$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$, ou seja, a matriz A é diagonalizável.

Teorema. Seja A uma matriz quadrada real, de ordem n . A matriz A é diagonalizável, se, e somente se, a soma das multiplicidades geométricas dos subespaços próprios, associados aos seus valores próprios, é igual a n .

Exemplo. Seja a matriz quadrada real, de dimensão 3,

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

O polinómio característico de A é:

$$\Delta(t) = t^3 - \text{tr}(A)t^2 + (A_{11} + A_{22} + A_{33})t - |A| = t^3 - 6t^2 + 9t - 4.$$

Os valores próprios de A são 1, com multiplicidade algébrica 2, e 4, com multiplicidade algébrica 1, ou seja:

$$\Delta(t) = t^3 - 6t^2 + 9t - 4 = (t - 1)^2 \cdot (t - 4).$$

No entanto, os subespaços próprios, associados aos valores próprios 1 e 4, são, respectivamente, $E_1 = \langle (1,0,-1), (0,1,0) \rangle$ e $E_2 = \langle (1,1,0) \rangle$. Assim, $m_g(1) = 2$ e $m_g(4) = 1$. Como A tem dimensão 3, e $m_g(1) + m_g(4) = 3$, então A é diagonalizável, e

$$A = P \text{diag}(1,1,4)P^{-1},$$

onde $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, matriz regular, de ordem 3, cujas colunas são os vectores

próprios que geram os subespaços próprios E_1 e E_2 , pois esses são linearmente independentes.

Neste caso, para todo $m \in \mathbb{N}$, $A^m = P \text{diag}(1^m, 1^m, 4^m)P^{-1} = P \text{diag}(1,1,4^m)P^{-1}$. Por exemplo:

$$A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 64 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 64 & 0 & 63 \\ 63 & 1 & 63 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Seja

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Então, $B^2 = A$.

Nota. A diagonalização de uma matriz diagonalizável facilita muito a álgebra com essa matriz. Pois, se A é uma matriz quadrada real diagonalizável, ou seja, a matriz A é semelhante a uma matriz diagonal

$$D = \text{diag}(k_1, k_2, \dots, k_n) = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & k_n \end{bmatrix}.$$

Então, $D = P^{-1}AP \Leftrightarrow A = PDP^{-1}$, para alguma matriz real regular P , de ordem n . Logo:

- (1) Para todo $m \in \mathbb{N}$, $A^m = PD^mP^{-1} = P \text{diag}(k_1^m, k_2^m, \dots, k_n^m)P^{-1}$;
- (2) Para todo $m \in \mathbb{N}$, para todo polinómio real $f(t)$, $f(A) = P \text{diag}(f(k_1), f(k_2), \dots, f(k_n))$.
- (3) Para $k_i \geq 0$, $i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$, seja $B = P \text{diag}(\sqrt{k_1}, \sqrt{k_2}, \dots, \sqrt{k_n})P^{-1}$. Então $B^2 = A$, e os valores próprios de B , são não negativos.

Teorema. Seja A uma matriz quadrada real, de ordem n . Suponha-se que o polinómio característico de A é $\Delta(t) = (t - a_1) \cdot (t - a_2) \cdot \dots \cdot (t - a_n)$. Então a matriz quadrada real A é diagonalizável. Ou seja, A é semelhante à matriz diagonal

$$D = \text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n) = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{bmatrix}.$$

Definição (Endomorfismo diagonalizável). Seja $f : V \rightarrow V$, um endomorfismo de um espaço vectorial real V , de dimensão n . O endomorfismo f é diagonalizável se ele é representado por uma matriz diagonal, de ordem n ,

$$D = \text{diag}(k_1, k_2, \dots, k_n) = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & k_n \end{bmatrix}.$$

Por outras palavras, f é diagonalizável se existe uma base $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$ de V , tal que

$$\begin{aligned} f(u_1) &= k_1 u_1 \\ f(u_2) &= k_2 u_2 \\ &\vdots \\ f(u_n) &= k_n u_n \end{aligned}$$

Teorema. Seja $f : V \rightarrow V$, um endomorfismo de um espaço vectorial real V , de dimensão n . f é diagonalizável se, e somente se, **existe uma base de V , composta só de vectores próprios de V** . Nesse caso, f é representado por uma matriz diagonal, cujas entradas principais são os valores próprios, associados aos referidos vectores próprios (que constituem uma base de V).

Exemplo. O endomorfismo endomorfismo g de \mathbb{P}^2 , definido por:

$$g(x^2 + 1) = 0, \quad g(-x^2 + x) = -x - 1 \quad \text{e} \quad g(-x + 1) = x^2 + x$$

é diagonalizável (ver o exemplo, abordado anteriormente, sobre este endomorfismo).

Teorema. Seja $f : V \rightarrow V$, um endomorfismo de um espaço vectorial real V , de dimensão n , e seja $\Delta(t)$ o polinómio característico de f . Se

$$\Delta(t) = (t - a_1) \cdot (t - a_2) \cdot \dots \cdot (t - a_n),$$

então o endomorfismo f é diagonalizável. Ou seja, f é representado por uma matriz diagonal

Teorema. Seja $f : V \rightarrow V$, um endomorfismo de um espaço vectorial real V , de dimensão n . O endomorfismo f é diagonalizável, se a soma das multiplicidades geométricas dos subespaços próprios, associados aos seus valores próprios, é igual a $\dim(V) = n$.

Exemplo. O endomorfismo g de \mathbb{P}^2 , definido por:

$$g(x^2 + 1) = 0, \quad g(-x^2 + x) = -x - 1 \quad \text{e} \quad g(-x + 1) = x^2 + x$$

é diagonalizável (ver o exemplo, abordado anteriormente, sobre este endomorfismo).

Diagonalização de uma matriz simétrica.

Teorema. Seja A uma matriz simétrica real. Então, todo valor próprio de λ é real.

Teorema. Seja A uma matriz simétrica real, de ordem n , e sejam \vec{u} e \vec{v} vectores próprios de A , associados a diferentes valores próprios, λ_1 e λ_2 , de A . Então, os vectores \vec{u} e \vec{v} são ortogonais, em relação ao produto interno canónico em \mathbb{R}^n .

Teorema. Seja A uma matriz simétrica real, de ordem n . Então A é diagonalizável, ou seja, existe uma matriz ortogonal P , tal que $D = P^{-1}AP$ é uma matriz diagonal, de ordem n .

Nesse caso, diz-se que A é **ortogonalmente diagonalizável**, e a matriz P obtém-se normalizando a base ortogonal de \mathbb{R}^n , composta de vectores próprios de A .

Exemplo. Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$ uma matriz real simétrica. Encontrar uma matriz ortogonal P tal que $P^{-1}AP$ é uma matriz diagonal.

O polinómio característico de A é $\Delta(t) = t^2 - 7t + 6 = (t - 1)(t - 6)$, ou seja, os valores próprios de A são 1 e 6.

$E_1 = \langle (2,1) \rangle$ e $E_6 = \langle (-1,2) \rangle$. Como A é simétrica, os vectores $\vec{v}_1 = (2,1)$ e $\vec{v}_2 = (-1,2)$ são ortogonais, em relação ao produto interno canónico em \mathbb{R}^2 .

Normalizando os vectores $\vec{v}_1 = (2,1)$ e $\vec{v}_2 = (-1,2)$, obtém-se a matriz

$$P = \begin{bmatrix} \sqrt{5}/5 & 2\sqrt{5}/5 \\ -2\sqrt{5}/5 & \sqrt{5}/5 \end{bmatrix}$$

Conclusão

Os conceitos de matriz diagonalizável e endomorfismo diagonalizável são semelhantes. O processo que se usa para diagonalizar uma matriz, também se usa para diagonalizar um endomorfismo.

Nem toda matriz real é diagonalizável, conseqüentemente, nem todo endomorfismo é diagonalizável.

No entanto, toda matriz simétrica é diagonalizável, mais que isso, é ortogonalmente diagonalizável.

Avaliação

(1) Seja $B = \begin{bmatrix} 11 & -8 & 4 \\ -8 & -1 & -2 \\ 4 & -2 & -4 \end{bmatrix}$ uma matriz real simétrica de ordem 3.

(a) Determine os valores próprios de B .

(b) Determine um conjunto com o número máximo de vectores próprios linearmente independentes.]

(c) Determine uma matriz ortogonal P tal que $D = P^{-1}BP$.

(d) Calcule B^5 , a partir da factorização $D = P^{-1}BP$.

(2) Seja $f : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ um endomorfismo do espaço vectorial real \mathbb{P}^2 , definido por

$$f(ax^2 + bx + c) = (2a + b - 2c)x^2 + (2a + 3b - 4c)x + a + b - c.$$

(a) Verifique se f é diagonalizável. Em caso afirmativo, determine uma base de \mathbb{P}^2 , composta apenas de vectores próprios linearmente independentes.

Actividade 3 - Formas bilineares

Introdução

Nesta actividade introduz-se o conceito de forma bilinear, e destaca-se os conceitos de forma bilinear simétrica e formas quadráticas.

Introduz-se o conceito de matriz congruente.

Detalhes da actividade

Definição (Forma bilinear). Seja V um espaço vectorial real. Uma forma bilinear em V é uma aplicação $f : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ tal que para quaisquer escalares $a, b \in \mathbb{R}$, para quaisquer vectores $\vec{v}, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{u}, \vec{u}_1, \vec{u}_2$ de V tem-se:

$$(3) f(a\vec{u}_1 + b\vec{u}_2, \vec{v}) = af(\vec{u}_1, \vec{v}) + bf(\vec{u}_2, \vec{v});$$

$$(4) f(\vec{u}, a\vec{v}_1 + b\vec{v}_2) = af(\vec{u}, \vec{v}_1) + bf(\vec{u}, \vec{v}_2).$$

Exemplo. O produto interno canónico em $\mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}$ e $n > 1$, é uma forma bilinear.

Exemplo. Seja $A = [a_{ij}]$, uma matriz quadrada real, de dimensão $n \in \mathbb{N}$ e $n > 1$. A aplicação $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(X, Y) = p(x_i, y_i)$, onde $[p(x_i, y_i)] = X^tAY$, para quaisquer vectores colunas $X = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^t, Y = [y_1 \ y_2 \ \dots \ y_n]^t$ de \mathbb{R}^n . Sendo assim, qualquer produto interno em \mathbb{R}^n , é uma forma bilinear.

Teorema. Seja f uma forma bilinear de um espaço vectorial real V , e seja

$$B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$$

uma base de V . Para quaisquer vectores $\vec{u}, \vec{v} \in V$, sejam $X = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^t$, um vector coluna composto pelos componentes de \vec{u} na base B , e $Y = [y_1 \ y_2 \ \dots \ y_n]^t$, um vector coluna composto por componentes de \vec{v} na base B . Então,

$$[f(\vec{u}, \vec{v})] = X^tAY,$$

Teorema. Seja V um espaço vectorial real de dimensão n , seja f uma forma bilinear em V , sejam B e B' duas bases de V , e seja $P = M(B \rightarrow B')$. Então se A é a matriz de f em B , então $A' = P^tAP$ é a matriz de f em B' .

Definição (Matriz congruente). Uma matriz quadrada real B é congruente a uma outra, A , e escreve-se $B \simeq A$, se existe uma matriz regular P , tal que $B = P^tAP$.

Definição (Característica de uma forma bilinear). A característica de uma forma bilinear f dum espaço vectorial real V , representa-se por $c(f)$, é a característica de uma matriz qualquer que a representa.

Definição (forma degenerada e não-degenerada). Seja f uma forma bilinear de um espaço vectorial real V . Diz-se que f é uma **forma degenerada** se $c(f) < \dim(V)$. Diz-se que f é uma forma não-degenerada se $c(f) = \dim(V)$.

Forma bilinear simétrica. Forma quadrática.

Definição (Forma bilinear simétrica). Seja f uma forma bilinear de um espaço vectorial real V . Diz-se que f é uma **forma bilinear simétrica** se, para quaisquer vectores $\vec{u}, \vec{v} \in V$, $f(\vec{u}, \vec{v}) = f(\vec{v}, \vec{u})$.

Teorema. Seja f uma forma bilinear de um espaço vectorial real V , de dimensão n . Então f é simétrica se, e somente se, a matriz de f em uma base B , de V , é uma matriz simétrica.

Teorema. Seja f uma forma bilinear simétrica de um espaço vectorial real V , de dimensão n . Existe uma base $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ de V tal que f é representado por uma matriz diagonal.

Teorema. Seja A uma matriz simétrica real. Então A é congruente com uma matriz diagonal, isto é, existe uma matriz regular P tal que $P^t A P$ é uma matriz diagonal.

Nota. Existe um algoritmo para determinar uma matriz diagonal congruente a uma determinada matriz simétrica. O leitor interessado, pode consultar o livro "Linear Algebra", De Seymour Lipschutz e Marc Lipson (3ª ed.), p. 379.

Definição (Forma quadrática). Seja V um espaço vectorial real. Uma função

$$q : V \rightarrow \mathbb{R}$$

É uma forma quadrática se $q(\vec{v}) = f(\vec{v}, \vec{v})$, para alguma forma bilinear simétrica f .

Nota. Pode-se determinar uma forma bilinear f a partir de uma forma quadrática q , a partir da seguinte forma, denominada **forma polar de f** :

$$f(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{1}{2} [q(\vec{u} + \vec{v}) - q(\vec{u}) - q(\vec{v})].$$

Suponha-se que f é representado por uma matriz simétrica $A = [a_{ij}]$. Seja

Sendo assim, **uma forma quadrática q nas variáveis x_1, x_2, \dots, x_n é um polinómio em que todos os termos têm grau dois.**

Definição (forma bilinear simétrica positiva e semi-definida positiva). Uma forma bilinear simétrica, de um espaço vectorial real V , diz-se :

- (1) Definida positiva se $q(\vec{v}) = f(\vec{v}, \vec{v}) > 0$, para todo vector $\vec{v} \neq \vec{0}$ de V ;
- (2) Semi-definida não-negativa se $q(\vec{v}) = f(\vec{v}, \vec{v}) \geq 0$, para todo vector \vec{v} de V .

Conclusão

Existem várias formas bilineares; umas mais ricas e outras, menos, relativamente às propriedades.

Toda forma bilinear simétrica é representada por uma matriz simétrica, e pode ser representado por uma matriz diagonal, conseqüentemente, toda matriz simétrica é congruente

com uma matriz diagonal.

Uma forma quadrática q nas variáveis x_1, x_2, \dots, x_n é um polinómio em que todos os termos têm grau dois.

Pode-se obter uma forma quadrática a partir de uma forma bilinear simétrica e vice-versa.

Avaliação

(1) Seja a forma bilinear do espaço vectorial real \mathbb{R}^3 , definida por

$$f(\vec{u}, \vec{v}) = 3x_1y_1 - 2x_1y_3 + 5x_2y_1 + 7x_2y_2 - 8x_2y_3 + 4x_3y_2 - 6x_3y_3,$$

para quaisquer vectores $\vec{u} = (x_1, x_2, x_3)$ e $\vec{v} = (y_1, y_2, y_3)$ de \mathbb{R}^3 .

(a) Determine a matriz de f , em relação à base canónica de \mathbb{R}^3 .

(2) Seja a forma bilinear do espaço vectorial real \mathbb{R}^2 , definida por

$$f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 2x_1y_1 - 3x_1y_2 + 4x_2y_2.$$

(a) Determine a matriz A de f , em relação à base $\{\vec{u}_1 = (1, 0), \vec{u}_2 = (1, 1)\}$.

(b) Determine a matriz B de f , em relação à base $\{\vec{v}_1 = (2, 1), \vec{v}_2 = (1, -1)\}$.

(c) Determine uma matriz regular P , de ordem dois, tal que $B = P^tAP$.

(3) Determine a matriz simétrica que representa a seguinte forma quadrática de \mathbb{R}^3 :

$$q((x, y, z)) = 3x^2 + 4xy - y^2 + 8xz - 6yz + z^2.$$

(a) Obtenha a forma bilinear simétrica f , a partir de q .

Resumo da Unidade

A diagonalização de uma matriz [endomorfismo] depende em grande parte da da quantidade de vectores próprios linearmente independentes, comparados com a dimensão de [dimensão do espaço do endomorfismo].

Uma forma quadrática obtém-se a partir de uma forma bilinear simétrica.

Avaliação da Unidade

Verifique a sua compreensão!

Teste sumativo da unidade Diagonalização de um endomorfismo e de uma matriz. Forma quadrática.

Instruções

O Teste de avaliação tem quatro questões, algumas com alíneas.

Responda cada uma das questões de uma forma clara e justificando cada passo de resolução.

Critérios de Avaliação

Cada ponto ou alínea vale 10 pontos. Considera-se aprovado o estudante que tiver pelo menos 50% da cotação total.

Avaliação

(1) Seja $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 7 & -5 & 1 \\ 6 & -6 & 2 \end{bmatrix}$ uma matriz quadrada real de ordem 3.

(a) Determine os valores próprios de A .

(b) Determine os subespaços próprios de A . Conclua se A é ou não diagonalizável.

(2) Considere o endomorfismo do espaço vectorial real \mathbb{P}^2 , definido por:

$$f(ax^2 + bx + c) = \left(\frac{11a - 16b + 16c}{11}\right)x^2 + \left(\frac{-4a + 11b - 8c}{3}\right)x + \frac{4a - 8b + 11c}{3}.$$

(a) Verifique que f é diagonalizável.

(b) Determine uma base de f tal que f é representada por uma matriz diagonal.

(c) Determine uma matriz real A de f , diferente da matriz diagonal.

(d) Determine uma matriz real B de f tal que $B^2 = A$. Determine B^5 .

(3) Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ uma matriz simétrica real, de ordem 3.

(a) Diagonalize ortogonalmente a matriz A .

(4) Determine a matriz simétrica que representa a seguinte forma quadrática de \mathbb{R}^3 :

$$q((x, y, z)) = 3x^2 + xz - 2yz.$$

(a) Determine a forma bilinear simétrica f a partir de q .

Leituras e outros Recursos

As leituras e outros recursos desta unidade encontram-se na lista de Leituras e Outros Recursos do curso.

- HOWARD, A., RORRES C., Álgebra linear com aplicações, Bookman, Porto Alegre, 8. Ed., 2001;
- LIPSCHUTZ, S., Álgebra Linear – teoria e problemas, McGraw-Hill, São Paulo, 2. ed., 1994.
- MONTEIRO A., Álgebra Linear e Geometria Analítica, McGraw-Hill L.da, Lisboa, 2001.
- NICHOLSON, W. K., Álgebra Linear, McGraw-Hill, São Paulo, 3. ed., 2006.

Avaliação do Curso

Avaliação Sumativa de Álgebra Linear

Instruções

O Teste de avaliação tem cinco questões, algumas com alíneas.

Responda cada uma das questões de uma forma clara e justifique cada passo de resolução.

Critérios de avaliação

Cada ponto ou alínea vale 10 pontos. Considera-se aprovado o estudante que tiver pelo menos 50% da cotação total.

Avaliação

(1) Considere o endomorfismo do espaço vectorial real \mathbb{P}^2 , definido pela matriz

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{5}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{4}{3} & -\frac{8}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix},$$

em relação à base $B = \{x^2 + 1, -x - 1, x^2 - 2\}$ de \mathbb{P}^2 .

- Determine os valores próprios de f , e a multiplicidade algébrica de cada um deles.
 - Justifique que f é diagonalizável.
 - Determine A^n , para todo $n \in \mathbb{N}$.
 - Determine a imagem e o núcleo de f . Diga se f é um automorfismo.
- (2) No espaço vectorial real \mathbb{R}^3 , seja $F = \{(x, y, z) : x - y = x + y + z = 0\}$.

- Mostre que F é um subespaço vectorial de \mathbb{R}^3 .
- Determine uma base B , e a dimensão de F .
- Seja $\vec{v} = (2, 1, -3) \in \mathbb{R}^3$. Determine a projecção ortogonal de \vec{v} sobre F .

(3) Considere a forma bilinear f de \mathbb{R}^3 , definida por

$$f(\vec{x}, \vec{y}) = -x_1y_1 + x_3y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_2 + x_1y_3 + 3x_2y_3 - x_3y_3.$$

- Verifique que f é simétrica.
 - Determine uma forma quadrática q de \mathbb{R}^3 , a partir de f .
 - Determine a matriz A de f em relação à base $B = \{(1, 0, 1), (0, -1, 1), (1, 0, 2)\}$ de \mathbb{R}^3 .
 - Determine a matriz de f em relação à base canónica B' de \mathbb{R}^3 .
 - Determine uma matriz A' regular P tal que $A' = P^tAP$.
 - Diagonalize ortogonalmente a matriz A .
- (4) Discuta o sistema de equações lineares que se segue, em função dos parâmetros reais a e b :

$$\begin{cases} ax + y - z + aw = 0 \\ (a + 1)y + z + w = 1 \\ -x + y + (a + 1)w = b \end{cases}.$$

(5) No espaço euclidiano \mathbb{R}^3 , considere o seguinte produto interno:

$$\forall \vec{u} = (u_1, u_2, u_3), \vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3,$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_1v_2 + u_2v_1 + 3u_2v_2 - u_2v_3 - u_3v_2 + u_3v_3.$$

- Determine a matriz da métrica deste produto interno, em relação à base canónica de \mathbb{R}^3 .
- A base canónica de \mathbb{R}^3 é ortonormada para este produto interno? Justifique a sua resposta.
- Aplice o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt, para obter uma base ortonormada, a partir da base canónica de \mathbb{R}^3 .

Referências do Curso

- HOWARD, A., RORRES C., Álgebra linear com aplicações, Bookman, Porto Alegre, 8. Ed., 2001;
- LIPSCHUTZ, S., Álgebra Linear – teoria e problemas, McGraw-Hill, São Paulo, 2. ed., 1994.
- MONTEIRO A., Álgebra Linear e Geometria Analítica, McGraw-Hill L.da, Lisboa, 2001.
- NICHOLSON, W. K., Álgebra Linear, McGraw-Hill, São Paulo, 3. ed., 2006.

Sede da Universidade Virtual africana

The African Virtual University
Headquarters

Cape Office Park

Ring Road Kilimani

PO Box 25405-00603

Nairobi, Kenya

Tel: +254 20 25283333

contact@avu.org

oer@avu.org

Escritório Regional da Universidade Virtual Africana em Dakar

Université Virtuelle Africaine

Bureau Régional de l'Afrique de l'Ouest

Sicap Liberté VI Extension

Villa No.8 VDN

B.P. 50609 Dakar, Sénégal

Tel: +221 338670324

bureauregional@avu.org