Matemática I

Matemática Básica

Matemática I

Matemática Básica

Preparado pelo Prof. Jairus, Khalagai

African Virtual university

Université Virtuelle Africaine

Universidade Virtual Africana

Índice

I. Matemática 1, Matemática Básica 5
II. Pré-requisitos do curso ou conhecimentos prévios 5
III. Tempo 5
IV. Material 5
V. Fundamentação do Módulo 7
VI. Conteúdo 8
6.1 Visão Geral 8
6.2 Plano Geral 9
VII. Objectivo Geral 11
VIII. Objectivos Específicos de Aprendizagem 11
IX. Actividades de Ensino e Aprendizagem 12
X. Conceitos Chave (glossário) 18
XI. Leituras Obrigatórias 20
XII. Recursos Obrigatórios 21
XIII. Links úteis (ligações úteis) 22
XIV. Actividades da Aprendizagem 25
XV. Síntese do Módulo 51
XVI. Avaliação Sumativa 52
XVII. Referências 65
XVIII. Principal Autor do Módulo 66

I. Matemática 1, Matemática Básica

Pelo Prof. Jairus Khalagai, Universidade de Nairobi

II. Pré-requisitos do curso ou conhecimentos prévios

Unidade 1: (i) Conjuntos e Funções (ii) Funções Compostas

Os conhecimentos atinentes à matemática do nível secundário são um pré-requisito para esta unidade, que enquadra-se no nível 1.

Unidade 2: Operações Binárias

Pressupõe a aplicação de conhecimentos de Matemática Básica 1. Esta unidade é também de nível 1.

Unidade 3: Grupos, subgrupos e Homomorfismo

Tem como pré-requisito a Matemática Básica 2.

É uma unidade de nível 2.

III. Tempo

120 horas

IV. Material

Os Materiais a usar para este módulo consistem em:

Materiais de estudo (impressos, CD, on-line)

(materiais de pré-avaliação contidos nos materiais de estudo).

Duas actividades de avaliação formativa por unidade (sempre disponível com a data de submissão especificada). (CD, on-line).

Referências e Leituras a partir de Fontes Abertas (CD, on-line)

Arquivos da Actividade ICT

Aqueles que dependem de software com direitos autorais

Aqueles que dependem de software de Fonte Aberta

Aqueles que são autónomos

Arquivos de video

Arquivos áudio (com versão em cassete)

Fonte Aberta de Arquivos de instalação de software

Calculadoras gráficas e software licenciado onde estiver disponível.

V. Fundamentação do Módulo

A importância do ensino da Matemática Básica reside no facto de ela desempenhar um papel crucial no preenchimento de lacunas que o professor- estudante possa ter, advindas da matemática aprendida no nível secundário, como por exmplo, a falta de um domínio apropriado do sistema de números reais e funções elementares, etc.

Serve também como plataforma de lançamento para a Matemática do nível Universitário, através da introdução ao estudante à ciência do raciocínio, chamada Lógica e aos tópicos relacionados.

VI. Conteúdo

6.1 Visão Geral

Este módulo consiste em três unidades que são as seguintes:

Unidade 1: (i) Conjunto e funções (ii) composição de funções

Esta unidade começa com o conceito de conjunto e depois é introduzida a lógica que fornece aos estudantes técnicas para distinguir argumentos correctos de incorrectos usando proposições e seus conectores. Assim, é essencial o domínio dos conteúdos sobre os conjuntos de números reais nos quais definem-se funções elementares.
A necessidade de se terem representações pictóricas de uma função supõe o estudo dos seus gráficos.
O conceito de função pode ser visto como uma introdução a ser feita por meio de um conjunto de objectos. Isto necessita do estudo de arranjos de objectos num certa ordem chamado permutações e combinações.

Unidade 2: Operações binárias

Nesta unidade olha-se para o conceito de operações binárias. Esta discussão conduz ao estudo das propriedades elementares de números inteiros como a congruência. A introdução às estruturas algébricas é o conhecimento de que se precisa para se transitar para a unidade 3.

Unidade 3: Grupos, sub-grupos e Homomorfismo

Esta unidade é consagrada ao estudo de grupos e anéis. Estes são essencialmente conjuntos de números ou objectos que satisfazem certos axiomas. Os conceitos de sub-grupo e sub-anéis são também importantes, merecendo o seu estudo aqui. Na procura de casos de poucas exigências axiomáticas vão-se também estudar os conceitos de homomorfismos e isomorfismos. Aqui estar-se-à reflectindo sobre o conceito de transformação ou função de um grupo para o outro ou de um anel para o outro por forma a encontrar as propriedades a tal função possui.

6.2 Plano Geral

Unidade 1: (1) Conjunto e Funções (ii) Composição de Funções (50 horas)

Nível 1: Prioridade A. Nenhum pré-requisito

Conjuntos (4)

Lógica Elementar (8)

Sistemas de Numeração (6)

Números Complexos (4)

Relações e Funções (8)

Funções elementares e seus gráficos (8)

Permutações (7)

Combinações (5)

Unidade 2: Operações Binárias (35 horas)

Nível 1: Prioridade A. Matemática Básica 1 como pré-requisito.

Grupos e sub-grupos (7)

Grupos Cíclicos (2)

Grupos de permutações (5)

Homomorfismos de grupos (4)

Grupos Factores (3)

Automorfismos (3)

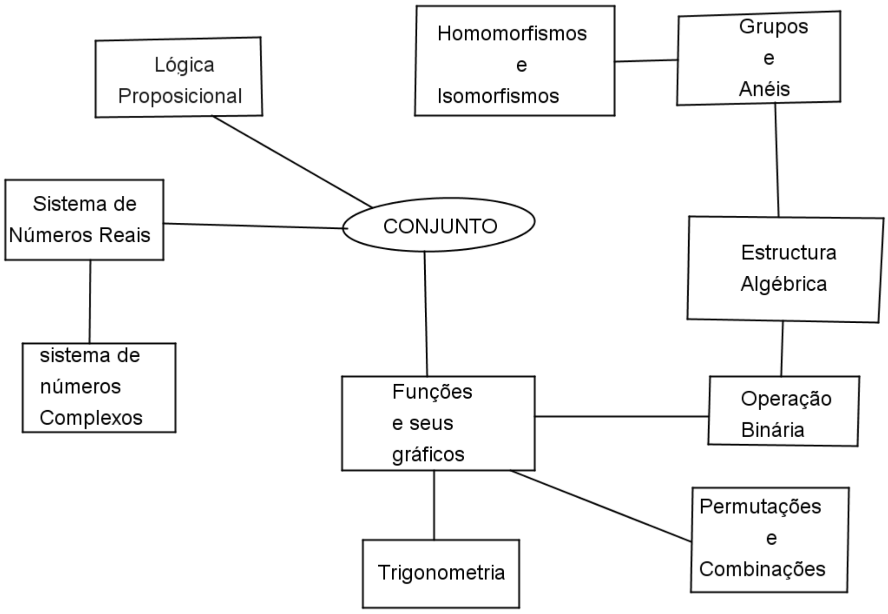
Anéis, sub-anéis, ideais e grupos de quocientes (7)

Teoremas de Isomorfismos para grupos e anéis (4)

O diagrama abaixo mostra como as diferentes secções deste módulo estão relacionadas uma com a outra.

O essencial ou o conceito nuclear está no centro do diagrama.

Os conceitos que dependem um do outro estão ligados por uma linha, por exemplo, Conjunto é o conceito central e o sistema de números reais depende da ideia de um conjunto e, por sua vez, o sistema de números complexos depende do sistema de números reais.



VII. Objectivo Geral

Fornecer conhecimentos de Lógica Matemática Elementar, conjuntos, números e estruturas algébricas, requeridos para o ensino efectivo da matemática no nível secundário.

VIII. Objectivos Específicos de Aprendizagem

(Objectivos Instrucionais)

No fim do módulo, o estudante deve ser capaz de:

- Construir argumentos matemáticos;
- Fazer conexões e comunicar efectiva e economicamente ideias matemáticas;
- Examinar padrões, fazer abstracções e generalizar;
- Demonstrar compreensão das várias estruturas matemáticas, as suas semelhanças e diferenças.

IX. Actividades de Ensino e Aprendizagem

Módulo 1: Matemática Básica, Pré-avaliação

Unidade 1: Conjuntos e funções

Avaliações e Soluções

Questões de Pré-avaliação

1. Dada a equação quadrática:

$$2x^2 - x - 6 = 0$$

As raízes são

a. {-4, 3}

b. {4, -3}

c. {2, -**Error!**}

d. {-2, **Error!**}

2. O valor da função $f(x) = 2x^2 + 3x + 1$ em x = 3 é

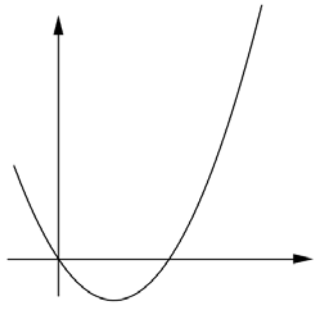
a. 19

b. 28

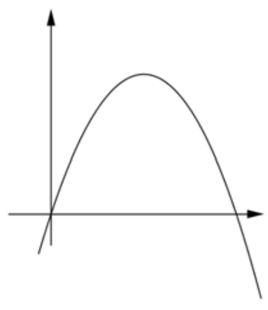
c. 46

d. 16

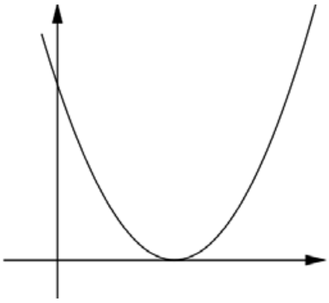
3. Qual dos seguintes diagramas abaixo representa o gráfico de y = 3x(2 – x)

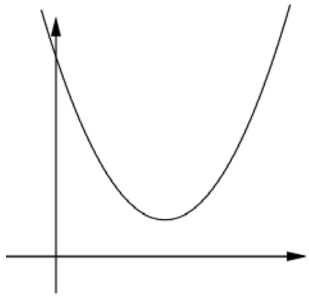


a.



b.

c. 

d. 

4. A solução da equação sen(x) = $-\frac{1}{2}$ na amplitude 0 ≤ xº ≤ 360º é:

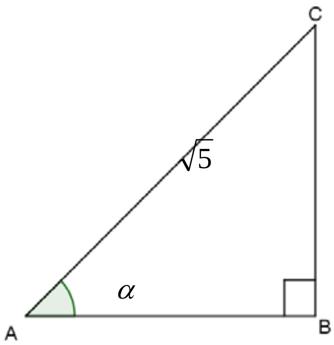
a. {150º, 210º}

b. {30º, 150º}

c. {210º, 330º}

d. {30º, 330º}

5. Dado o triângulo ABC ao lado



Qual das seguintes sentenças é correcta:

a) cos(α) = **Error!**

b) sen(α) = **Error!**

c) tan(α) = 2

d) sec(α) = **Error!**

Unidade 1: Soluções das questões de Pré-Avaliação

As respostas seguintes correspondem às questões de escolha múltipla:

Q 1 c Q 2 b Q 3 b Q 4 c Q 5 c

Unidade 2: Operações Binárias

1. A inversa da função

f(x) = **Error!** é:

(a) $f^{-1}(x) = x - 1$

(b) $f^{-1}(x) =$ **Error!**

(c) $f^{-1}(x) =$ **Error!**

(d) $f^{-1}(x) =$ **Error!** - 1

2. Se sen(**Error!**) = **Error!** então

sen(x) em termos a α é:

(a) **Error!**

(b) $\alpha\sqrt{4 - \alpha^2}$

(c) α

(d) **Error!**

3. Uma menina tem 3 saias, 5 blusas e 4 lenços. O número de combinações diferentes consistindo numa saia, numa blusa e num lenço que ela pode fazer com estes artigos é:

a. 220

b. 60

c. 12

d. 150

4. Dado o número complexo

z = 1 – i temos que Arg(z) é:

(a) 45º

(b) 135º

(c) 225º

(d) 315º

5. Se $a*b = a^2 + ab - 1$, então

5*3 é

(a) 39

(b) 41

(c) 23

(d) 25

Unidade 2: Soluções das questões da pré-avaliação:

Q1. c Q2. b Q3. b Q4. b Q5. a

Unidade 3: Grupos, sub-grupos e Homomorfismo

1. Qual das seguintes operações, é uma operação binária?

(a) Radiciação de um número

(b) Tomar o predecessor (antecessor) de um número natural

(c) Tomar o sucessor de um número natural

(d) Determinar a soma de dois números naturais

2. Recorde-se da definição de homomorfismo e diga qual das seguintes é um homomorfismo de um grupo G de números reais sob multiplicação ou adição.

(a) $\phi(x) = 2^x$

(b) $\phi(x) = 6x$

(c) $\phi(x) = x^2$

(d) $\phi(x) = x + 5$

2. Para um grupo G se $a \times a = b$ em G, então $\times$ é:

(a) b

(b) ba^{-1}

(c) $a^{-1}b$

(d) $a^{-1}ba^{-1}$

4. Se um elemento *a* num anel $\Re$ é tal que $a^2 = a$ então *a* é chamado

(a) nilpontente

(b) característica

(c) idempotente

(d) identidade

5. Seja $\Re$ um anel e x □ *R* se existe um único elemento a $\in$ *R* tal que xa = a, então ax é:

(a) *e*

(b) *a*

(c) -x

(d) x

Unidade 3: Soluções das questões de pré-avaliação

1. d 2. c 3. d 4. c 5. d

Sobre a Pré-Avaliação: Comentários pedagógicos para os estudantes

As questões nesta pré-avaliação são destinadas a testar a sua prontidão para o estudo do módulo.

As 5 questões que se lhe apresentam para a unidade 1 requerem a matemática do nível secundário. Qualquer erro por si cometido deve sugerir a necessidade de revisita aos tópicos da matemática do ensino secundário que são referidos nas respectivas questões.

As questões para as unidades 2 e 3 testam a sua prontidão depois de ter completado as actividades de aprendizagem para as unidades 1 e 2.

Se cometer alguns erros na pré-avaliação da unidade 2, deve rever o seu trabalho da unidade 1 neste módulo. De igual modo, se cometer erros na pré-avaliação da unidade 3, deve rever o seu trabalho da unidade 2 neste módulo.

X. Conceitos Chave (glossário)

1. Grupo abelinao: este é um grupo $\langle G, *\rangle$ no qual $a * b = b * a$ para $a, b \in G$.

2. Estrutura Algébrica: Esta é uma colecção de um dado conjunto G com uma operação binária *que satisfaz um dado conjunto de axiomas.

3. Operação binária: esta é uma transformação que associa a cada par ordenado de elementos de um conjunto G, exactamente um elemento de G.

4. Função Composta: esta é uma função obtida por combinar duas ou mais funções simples numa dada ordem.

5. Função: é um tipo especial de transformação onde um objecto é transformado a uma única imagem.

6. Grupo: este é um conjunto não vazio G munido de uma operação binária * tal que:

(i) $a * b \in G$ para todo $a, b \in G$,

(ii) $a * (b * c) = (a * b) * c$ para todo $a, b, c \in G$,

(iii) existe um elemento e em G tal que $e * a = a = a * e$ para todo $a \in G$, onde e é chamado de identidade (elemento neutro da operação * em G)

(iv) Para cada $a \in G$ existe $a^{-1} \in G$ tal que $a * a^{-1} = e = a^{-1} * a$ onde a^{-1} é chamado de inverso de a.

7. Homomorfismo: esta é uma transformação ϕ de um grupo G para um outro grupo H tal que para qualquer par $a, b \in G$, tem-se $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$.

8. Isomorfismo: é homomorfismo que também é uma bijecção

9. Transformação: esta é simplesmente uma relação entre quaisquer dois conjuntos dados.

10. Proposição: esta é uma afirmação com valor de verdade. Assim podemos dizer se ela é verdadeira ou falsa.

11. Anel: este é um conjunto não vazio, digamos R, com duas operações binárias + e * chamadas de adição e multiplicação, respectivamente, tais que:

(i) $\langle G, +\rangle$ é um grupo Abeliano

(ii) $\langle G, *\rangle$ é um semi-grupo multiplicativo

12. Semi-grupo: este é um conjunto não vazio S com uma operação binária * tal que

(i) $a * b \in S$ para todo $a, b \in S$,

(ii) $a * (b * c) = (a * b) * c$ para todo a, b, c $\in S$,

(iii) Para todos elementos a, b, c $\in S$, temos:

$$a * (b + c) = a * b + a * c \quad \text{e} \quad (a + b) * c = a * c + b * c$$

13. **Conjunto:** este é uma colecção de objectos ou itens com a mesma propriedade.

14. **Sub-grupo:** este é um subconjunto H de um grupo G tal que H é também um grupo com respeito à operação binária em G.

XI. Leituras Obrigatórias

Leitura nº 1

Um texto para estudantes do nível secundário da secção de matemática de autores de textos de Ciência da Escola Secundária Livre, 2005, pp 38-47 (o nome do ficheiro em CD: Secondary_School_Maths).

Leitura nº 2

(OriginaL: Elements of Abstract and Linear Algebra):Elementos da Álgebra Abstracta e Linear por E. H. Connell, 1999, Universidade de Miami, pp 1-13 (o nome do ficheiro em CD: Abstract_and_linear_algebra_Connell).

Leitura nº 3

(Sets relations and fucntions) Relações entre conjuntos e funções por Ivo Duntsch e Gunther Gediga methodos publishers (UK) 2000 (o nome do ficheiro em CD: Sets_Relations_Functions_Duntsch)

Leitura nº 4

(Abstract Algebra: The Basic Graduate year): Álgebra Abstracta. Ano Básico de Graduação, por Robert B. Ash (Pasta em CD: Abstract_Algebra_Ash)

Resumo Geral e Fundamentação

Todas das leituras obrigatórias são textos de livros de fontes completas abertas. Em conjunto eles fornecem mais do que o material suficiente para suportar o curso.

O texto contém páginas específicas de referências para activar leituras e orientar exercícios tais que são referenciadas nas actividades de aprendizagem.

XII. Recursos Obrigatórios

Wolfram MathWorld (visitado a 29.08.2006)

http://mathworld.wolfram.com/

- Este é um guia completo e compreensivo para todos os tópicos em matemática. Espera-se que os estudantes se familiarizem com este website e que sigam as palavras chave e os tópicos do módulo no site.

Wikipedia (visitado a 29.08.2006

http://en.wikipedia.org/

O Wikipédia fornece uma cobertura enciclopédica de todos os tópicos de matemática.

Os estudantes devem seguir as palavras chave para pesquisar no wikipédia.

XIII. Links úteis (ligações úteis)

(Set Theory) teoria de conjuntos (visitado a 29.08.2006)

http://www.mathresourece.iitb.ac.in/project/indexproject.html

- Leia qualquer das secções clicando nos sectores circulares
- Trabalhe especialmente na secção chamada 'functions'.
- Clique no link NEXT no fim da página para se deslocar à frente
- Clique nos botões da seta dupla >> para activar o movimento do conteúdo.

Wolfram MathWorld (visitado a 29.08.2006)

http://mathworld.wolfram.com/SetTheory.html

- Leia esta entrada para a Teoria de Conjuntos
- Segue os links para explicar os conceitos específicos que queira.

Wikipedia (visitado a 29.08.06)

http://www.wikipedia.org/

- Escreva 'Set Theory' na caixa de pesquisa e prima ENTER.
- Segue os links para explicar os conceitos específicos que queira.

MacTutor History of Mathematics (visitado a 03.03.07)

http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Biginnings_of_set_theory

Para o seu interesse leia a história da Teoria de Conjuntos

Composição de Funções (vistidado a 06.11.2006)

http://www.bbc.co.uk/education/asguru/maths/13pure/02functions/06composite/index.shtml

- Leia a primeira Página
- Use os botões das setas no fim da página para passar para a página seguinte
- A página 2 é uma actividade interactiva. Trabalhe nessa actividade cuidadosamente.
- Leia a página 3 para detalhes na notação.
- Teste a sua compreensão na página 4.

Wolfram MathWorld (visitado a 29.08.2006)

http://mathworld.wolfram.com/Composition.html

- Leia esta entrada para a composição de funções
- Segue os links para explicar os conceitos específicos que queira.

Wikipedia (visitado a 06.11.06)

http://www.wikipedia.org/

- Escreva 'Composite Functions' na caixa de pesquisa e prime ENTER
- Segue os links para explicar os conceitos específicos que queira.

Binary Color Device (vistado a 06.11.06)

http://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Algebra/BinaryColorDevice.shtml

- Este é um quebra-cabeça envolvendo operações binárias e tabelas de grupos. Use o quebra cabeça para desenvolver a sua compreensão.

Wolfram MathWorld (visitado a 06.11.2006)

http://mathworld.wolfram.com/BinaryOperation.html

- Leia esta entrada para a Teoria de Grupos
- Segue os links para explicar os conceitos específicos que queira.

Wikipedia (visitado a 06.11.06)

http://www.wikipedia.org/

- Clique 'Binary Operations' na caixa de pesquisa e prime ENTER
- Segue os links para explicar os conceitos específicos que queira.

Wikipedia (visitado a 06.11.06)

http://en.wikipedia.org/wiki/Grupo_Theory

- Leia esta entrada para aTeoria de Grupos
- Segue os links para explicar os conceitos específicos que queira.

MacTutor History of Mathematics (visitado a 03.03.07)

http://www-groups.dcs.stand.ac.uk/~history/HistTopics/Development_group_theory.html

Leia para o seu interesse a história da Teoria de Grupos.

XIV. Actividades da Aprendizagem

Modulo 1: Matemática Básica

Unidade 1, Actividade 1: Conjuntos e Funções

Objectivos específicos de aprendizagem

Até ao fim desta actividade, o estudante deve ser capz de:

- Distinguir uma função de uma transformação geral.
- Demonstrar as relações entre conjuntos e funções
- Dar exemplos de conjuntos de números reais e algumas funções definidas em tais conjuntos.

Visão Geral

As noções de conjunto e de função são os conceitos fundamentais que em conjunto constituem as bases da Matemática. Na verdade, as diferentes áreas da Matemática começam com estes dois conceitos fundamentais.

Nesta actividade, demonstramos como os conjuntos de objectos são facilmente extraídos das nossas situações circundantes. Em particular, vamos motivar o estudante a ser capaz de facilmente exemplificar a transformação geral e funções no conjunto de números reais.

Notamos que é de grande importância para o estudante que ele seja capaz de distinguir por meio de um diagrama uma transformação geral de uma função. Fazer isto vai ajudar o estudante no domínio de muitas propriedades de funções em cursos superiores.

Conceitos Chave

Função: é um tipo especial de transformação onde um objecto é transformado numa única imagem.

Transformação: é simplesmente uma relação entre quaisquer dois conjuntos dados.

Proposição: esta é uma afirmação com valor de verdade. Assim podemos julgar se essa afirmação é verdadeira ou falsa.

Conjunto: este uma colecção de objectos ou itens com as mesmas propriedades.

Leituras

Todas as leituras para o módulo vêm de livros de textos de Fonte Aberta (Open Source text books). Isto significa que os autores fizeram-nos disponíveis para qualquer leitor usá-los sem cobrança. Fornecemos cópias completas destes textos nos CD´s que acompanham este curso.

1. Um livro de texto para estudantes da secção de matemática do ensino médio, por Autores de textos de Ciência da Escola Secundária Livre, 2005, pp 38-47 (o nome do ficheiro em CD: Secondary_School_Maths).

2. (OriginaL: Elements of Abstract and Linear Algebra):Elementos da Álgebra Abstracta e Linear por E. H. Connell, 1999, Universidade de Miami, pp 1-13 (o nome do ficheiro em CD: Abstract_and_linear_algebra_Connell).

Recursos da Internet

(Set Theory) teoria de conjuntos (visitado a 29.08.2006)

http://www.mathresourece.iitb.ac.in/project/indexproject.html

- Leia qualquer das secções clicando nos sectores circulares
- Trabalhe especialmente na secção chamada ‘fuactions’.
- Clique no link NEXT no fim da página para se deslocar à frente
- Clique nos botões da seta dupla >> para activar o movimento do conteúdo.

Wolfram MathWorld (visitado a 29.08.2006)

http://mathworld.wolfram.com/SetTheory.html

- Leia esta entrada para a Teoria de Conjuntos
- Segue os links para explicar os conceitos específicos que queira.

Wikipedia (visitado a 29.08.06)

http://www.wikipedia.org/

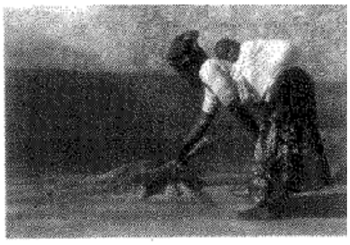
- Escreve ‘Set Theory’ na caixa de pesquisa e prime ENTER.
- Segue os links para explicar os conceitos específicos que queira.

MacTutor History of Mathematics (visitado a 03.03.07)

http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Biginnings_of_set_theory

Para o seu interesse leia a história da Teoria de Conjuntos

Introdução



a) Uma história da moagem de milho

A Jane caminha de uma vila para perto do mercado carregando um cesto de milho para ser moído para transformar em farinha. Ela põe o milho num contentor da máquina de moer e começa a girar a manivela. O milho é então moído e da máquina vem a farinha que depois ela leva depois para casa.

Questão

Que relação você faz entre o milho, a moagem e a farinha?

b) Uma história de crianças nascidas no dia de natal no ano de 2005

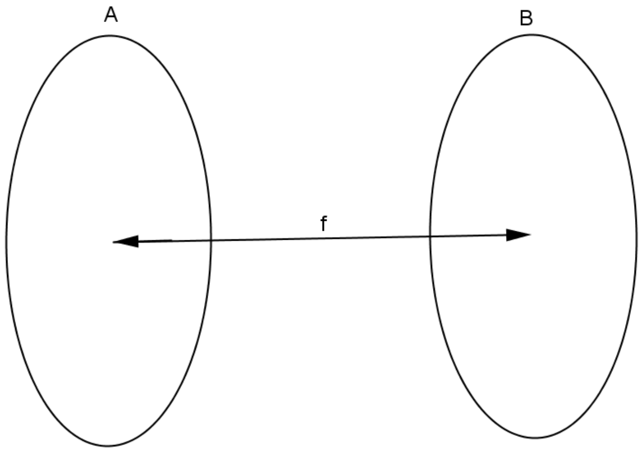
Foi reportado no 25º dia de Dezembro de 2005 na Maternidade do Hospital Pumwani, em Nairobi, cidade Capital de Kenya que um total de 52 mães deram a luz, cada uma, um bebé. Este foi o registo mais alto da ocasião. Como sempre se tem feito, cada bebé recebe um rótulo para identificá-lo(a) em relação à mãe.

Questões

1. Na situação acima, dada a mãe, como localizamos o bebé?
2. Dado o bebé, como localizamos a mãe?

Actividade

Note que agora podemos representar a história da moagem de milho em forma de diagrama, como se segue:



A = Conjunto de algum conteúdo (neste caso, milho) a ser posto numa moagem

f = A transformação ou a função a representar o processo na moagem

B = Conjunto do conteúdo, produto resultante ou (neste caso farinha) a ser obtido.

Exemplo 1

Neste exemplo definimos dois conjuntos e uma relação entre eles, como se segue:

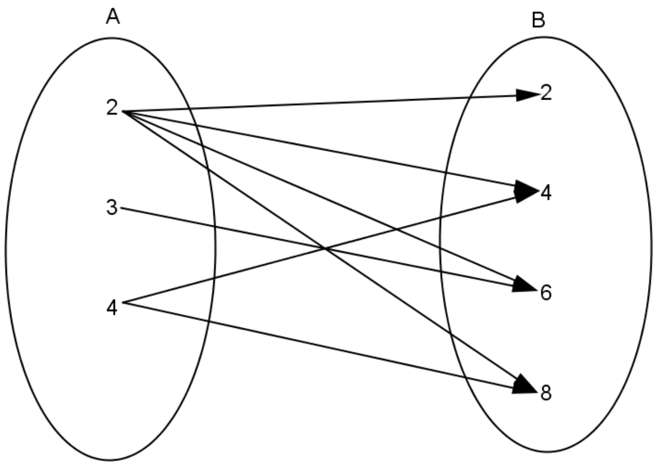
Seja A = {2, 3, 4]

B = {2, 4, 6, 8}

f é uma relação que diz "é um factor de".

Ex. 3 é factor de 6

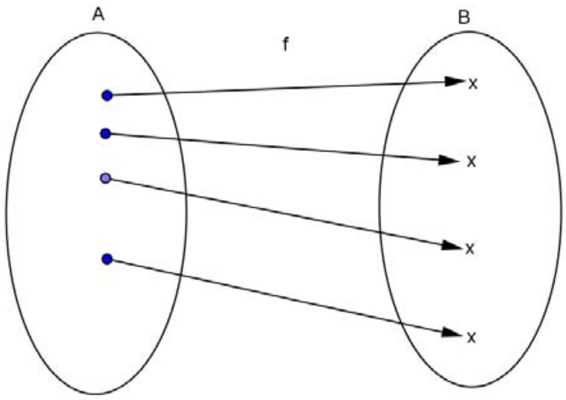
Neste caso temos a seguinte transformação:



Exemplo 2

Pense numa série de situações idênticas e represente-as num diagrama de transformação como se mostrou acima.

Na nossa segunda história de cada mãe dar luz a exactamente um criança pode ser repesentada num diagrama de transformação como se segue:



A = Conjunto de bebés

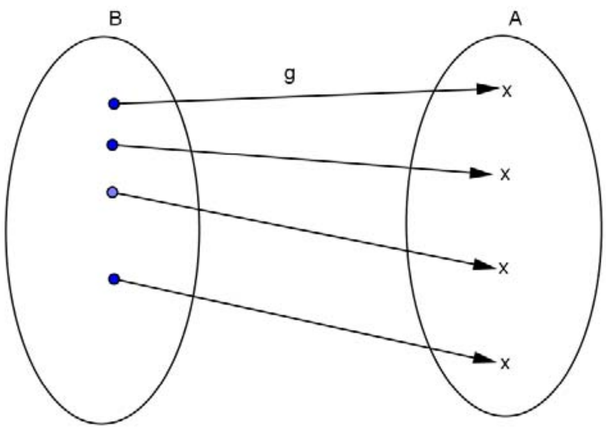
B = Conjunto de mães

f = relação que diz “bebé para”.

Exemplo 3

i. Note que nesta transformação cada objecto é transformado numa única imagem. Neste caso ela é uma função. Escrevemos *f*: A $\rightarrow$ B

ii. Note também que na transformação acima mesmo se invertêssemos os papéis dos conjuntos A e B teríamos, na mesma, que cada objecto tem uma única imagem. Assim escrevemos ...



Neste caso temos:

B = Conjunto de mães

A = Conjunto de bebés

g = Relação que diz "é mãe de"

Neste caso dizemos que a função *f* tem uma inversa *g*. Normalmente notamos esta inversa *g* por f^{-1}.

Assim para *f*: A $\rightarrow$ B, temos f^{-1}: B $\rightarrow$ A

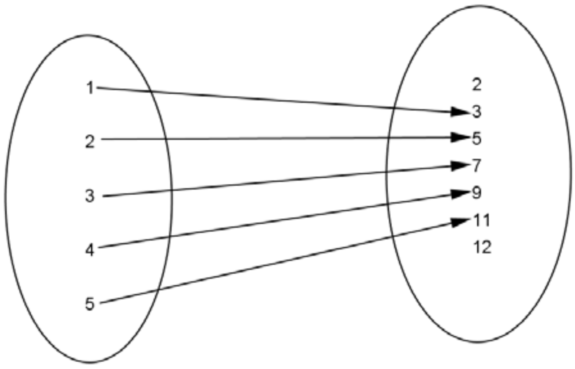
Exemplo 4

Seja $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$B = \{2, 3, 5, 7, 9, 11, 12\}$

$f: x \to 2x + 1$

Então temos a transformação como se segue: $f: x \to 2x + 1$



Uma outra notação nesta transformação seria

$f(1) = 3$ $f(2) = 5$, etc.

Em geral $f(x) = 2x + 1$

O conjunto A é chamado de domínio de *f* e o conjunto B é chamado de o contra-domínio de *f*. O conjunto {3, 5, 7, 9, 11} no qual todos elementos de A são transformados é chamado de amplitude (ou conjunto de imagens) de *f*. Note que aqui a inversa de *f* é dada por $f^{-1}(x)$ = **Error!**e é também uma função.

Exercício 5

Começando com o conjunto

A = {2, 3, 7, 9, 11, 12} como domínio, encontre o conjunto de imagens para cada uma das seguintes funções:

a) $f(x) = 3x – 2$

b) $g(x) = 2x^2 + 1$

c) h(x) = **Error!**

Exercício 6

Determina a inversa de cada uma das seguintes funções:

a) $f(x) = 3$ - **Error!**

b) $g(x) =$ **Error!**

c) $h(x) = 3x^2 – 2$

Exercício 7

Usando muitos conjuntos de números reais, como domínios dê exemplos do seguinte:

a) Uma transformação que não é uma função

b) Uma transformação que é uma função

c) Uma transformação cuja inversa não é uma função

d) Uma transformação cuja inversa é também uma função.

Demonstre cada exemplo num diagrama de transformação. Se está a trabalhar num grupo cada membro do grupo deve produzir um exemplo de sua autoria para cada um dos casos apresentados acima.

Módulo 1: Matemática Básica

Unidade 1, Actividade 2: Funções Compostas

Objectivos específicos

Até ao fim da actividade, o estudante deve ser capaz de:

- Demonstrar uma situação na qual duas instruções consecutivas mediante duas ordens diferentes podem produzir resultados diferentes.
- Verificar que duas funções elementares operadas (uma depois da outra) mediante duas ordens diferentes podem resultar em diferentes funções compostas.
- Desenhar e examinar gráficos de funções de classes diferentes começando por uma linear, quadrática, etc.

Visão Geral

Funções Compostas referem-se a combinações de diferentes transformações simples por forma a produzir uma função, uma vez que revela-se importante o processo de combinação de duas simples afirmações mesmo na vida real por forma a produzir uma afirmação composta. Na verdade, a ordem na qual duas instruções são emitidas deve ser considerada com seriedade de modo a que não se termine com alguns resultados embaraçosos.

Nesta actividade propomo-nos a verificar que duas funções elementares cujas fórmulas são conhecidas se combinadas numa certa ordem irão produzir uma fórmula composta, e se a ordem na qual são combinadas é revertida, então isto pode resultar numa fórmula diferente.

Notamos aqui que é igualmente importante que seja capaz de representar uma função composta pictoricamente por desenhar o seu gráfico e examinar a forma. Na verdade, o estudante será capaz de desenhar estes gráficos começando com funções lineares, quadráticas e mesmo trigonométricas e assim por diante.

Conceitos chave

Função Composta: esta é uma função obtida pela combinação de duas ou mais funções simples numa dada ordem.

Leituras

Todas as leituras para o módulo vêm de livros de textos de Fonte Aberta. Isto significa que os autores fizeram-nos disponíveis para qualquer leitor usá-los sem cobrança. Fornecemos cópias completas destes textos nos CD que acompanham este curso.

1. Relações entre conjuntos e funções (Set relations and functions) por Duntsch and Gunther Gediga, Methodos publishers (UK) 2000. (Nome do ficheiro em CD. Sets_Relations_Functions_Duntsch)

Recursos da Internet

Funções compostas (visitada a 06.11.06)

http://www.bbc.co.uk/education/asguru/maths/13pure/02functions/06composite/index.shtml

- Leia a primeira Página
- Use os botões das setas no final da página para passar para a página seguinte
- A página 2 é uma actividade interactiva. Trabalhe nessa actividade cuidadosamente.
- Leia a página 3 para detalhes na notação.
- Teste sua compreensão na página 4.

Wolfram MathWorld (visitado em 29.08.2006)

http://mathworld.wolfram.com/Composition.html

- Leia esta entrada para a composição de funções
- Segue os links para explicar os conceitos específicos que queira.

Wikipedia (visitado a 06.11.06)

http://www.wikipedia.org/

- Escreve ‘Composite Functions’ na caixa de pesquisa e prime ENTER
- Segue os links para explicar os conceitos específicos que queira.

Introdução

a) Uma história de Crianças da Creche

Duas crianças irmãs, irmão e irmã, ele chamdo John e ela, Jane, vão a uma creche chamada Pequenos Amigos

Numa manhã eles acordam tarde e com pressa vestem-se e correm para a creche, Jane primeiro, coloca meias e depois sapatos, mas o seu irmão John primeiro põe sapatos e depois coloca as meias. O Jane olhou para ele e pôs-se em gargalhadas à medida que corria para creche, à frente do irmão.

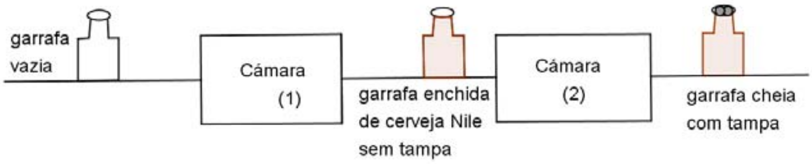
Questão

Por que é que Jane pôs-se em gargalhadas?

b) Uma história de visita a uma fábrica de fermentação de cerveja

Um clube Científico numa escola secundária chamada Escola Pré-Universitária de Nabumali em Uganda, numa Sexta Feira fez uma excursão à cidade de Jinja para observar as diferentes fases da fermentação da bebida chamada Nile Beer (cerveja Nile).

Notou-se que, de interesse especial, era a forma como alguns equipamentos usados no processo podiam entrar em algumas câmaras e sairem transformados. Por exemplo, uma garrafa vazia podia entrar numa câmara e emergir cheia de cerveja Nile mas sem tampa. Depois entrava numa câmara seguinte e sair já tapada.



Questão

Pode tentar explicar o que é que acontce em cada uma das câmaras da fábrica de fermentação?

Actividade

Notamos que na nossa história da creche o que está em causa é a ordem na qual devemos tomar a instrução no contexto de situações da vida real. A Jane riu-se do irmão porque ela viu meias por cima de sapatos. Em outras palavras, o seu irmão terminou com a instrução composta ou função que era inconcebível.

Podemos olhar em outros casos através do seguinte exemplo:

Exemplo 1

Pense num número, eleve-o a 2 e depois adicione 3 ou pense num número, adicone 3 e depois eleve-o a 2. Se designamos o número por x, então terminamos com dois resultados, nomeadamente $x^2 + 3$ e $(x + 3)^2$ respectivamente.

Exemplo 2

Você pode produzir uma série de exemplos similares ao exemplo acima?

Se agora considerarmos a nossa história de fermentação da cerveja no Uganda notamos que cada Câmara tem uma instrução específica do trabalho a fazer. É por causa disso que qulquer que seja o produto que passe pela câmara deve emergir transformado de alguma forma. Podemos também reparar num exemplo onde as instruções são dadas na forma funcional com fórmulas explícitas como se mostra abaixo:

Exemplo 3

Considere a composição das funções.

$f : x \rightarrow 2x$ e $g : x \rightarrow x + 5$

Aqui se estamos operando *f* seguida de *g* então duplicamos x antes de adicionar 5. Mas se operamos *g* seguida de *f* então adicionamos 5 a x antes de duplicar o resultado.

Notamos isso da seguinte maneira

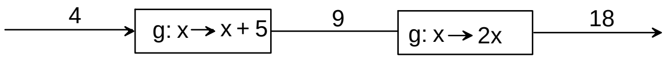
$(f \circ g)(x) = f\,(g(x))$ que significa *g* depois *f*. Enquanto $(g \circ f)(x) = g\,(f(x))$ que significa *f* depois *g*.

Assim temos:

$$\xrightarrow{4} \boxed{f: x \rightarrow 2x} \xrightarrow{8} \boxed{g: x \rightarrow x + 5} \xrightarrow{11}$$

$(g \circ f)(x) = g\,(f(x)) = 2x + 5$

Enquanto que



Representando a composição $(f \circ g)(\mathrm{x}) = f\,(g(\mathrm{x}))$ = 2(x + 5)

Exercício 4

Dada a função f : x → 3x + 1 g : x → x – 2

Determine as seguintes funções:

a) $f \circ g$

b) $g \circ f$

c) $(f \circ g)^{-1}$

d) $(g \circ f)^{-1}$

Tomando x = 3, desenhe o diagrama para cada uma das funções compostas acima como o caso do exemplo 3 acima.

Exercício 5

Esboce o gráfico para cada uma das seguintes funções: assumindo que o domínio para cada uma das funções é todo o conjunto $\Re$ dos números reais.

a) $f(x) = 2x - 3$

b) $g(x) = 4x^2 - 12x$

c) $h(x) = x^3 - 3x + 1$

d) $k(x) = 2\mathrm{sen}(x)$

Módulo 1: Matemátuca Básica
Unidade 2: Operações Binárias

Objectivos específicos de Aprendizagem

Ao fim da actividade, o estudante deve ser capz de:

- Dar exemplos de operações binárias entre várias operações;
- Determinar as propriedades de comutatividade ou de associatividade de algumas operações binárias.
- Determinar algumas relações de equivalência de algumas estruturas algébricas.

Visão Geral

O conceito de operação binária é essencial no sentido de que ele conduz à criação de estruturas algébricas.

As operações binárias bem conhecidas como + (adição) e × (multiplicação) constituem o conjunto $\Re$ dos números reais como uma das mais familiares estruturas algébricas. Na verdade, as propriedades de comutatividade ou associatividade podem ser facilmente verificadas respeitando estas operações em $\Re$.

Todavia, nesta actividade definimos e apresentamos as operações binárias mais gerais que são usualmente denotadas por *.

Por exemplo, para qualquer par de pontos x, e y, num dado conjunto, digamos G, x*y podia mesmo significar que tome o maior dos dois pontos, É claro que x*y = y*x.

Consequentemente exibimos exemplos de estruturas algébricas mais gerais que surgem de tais operações binárias.

Conceitos chave

Estrutura algébrica: esta é a colecção de um conjunto dado G juntamente com uma operação binária * que satisfaz um determinado conjunto de axiomas.

Operação Binária: é um transformação que atribui a cada par ordenado de elementos de um conjunto G, a exactamento um elemento de G.

Leituras

Todas das leituras para o módulo vêm dos livros de textos de Fonte Aberta (Open Source text books). Isto significa que os autores fizeram-nos disponíveis para qualquer leitor usá-los sem cobrança. Fornecemos cópias completas destes textos nos CD que acompanham este curso.

1. (Sets relations and fucntions) Relações entre conjuntos e funções por Ivo Duntsch e Gunther Gediga methodos publishers, UK, 2000 pp 30-34 (o nome do ficheiro em CD: Sets_Relations_Functions_Duntsch).

Recursos da Internet

Binary Color Device (vistado a 06.11.06)

http://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Algebra/BinaryColorDevice.shtml

- Este é um quebra-cabeça envolvendo operações binárias e tabelas de grupos. Use o quebra cabeça para desenvolver a sua compreensão.

Wolfram MathWorld (visitado a 06.11.2006)

http://mathworld.wolfram.com/BinaryOperation.html

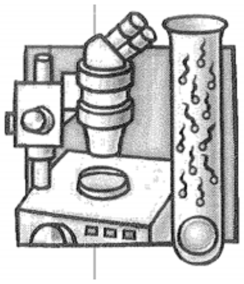
- Leia esta entrada para Teoria de Grupos
- Segue os links para explicar os conceitos específicos que queira.

Wikipedia (visitado a 06.11.06)

http://www.wikipedia.org/

- Clique 'Binary Operations' na caixa de pesquisa e prime ENTER
- Segue os links para explicar os conceitos específicos que queira.

Introdução: A história do sistema de Reprodução.



Numa situação de vida real, entre os seres humanos, um indivíduo mete-se numa relação com um outro indivíduo do sexo oposto. Eles então reproduzem outros indivíduos que constituem uma família. Logo, temos que famílias com a mesma relação constituem um clã e diferentes clãs dão origem a uma tribo, etc.

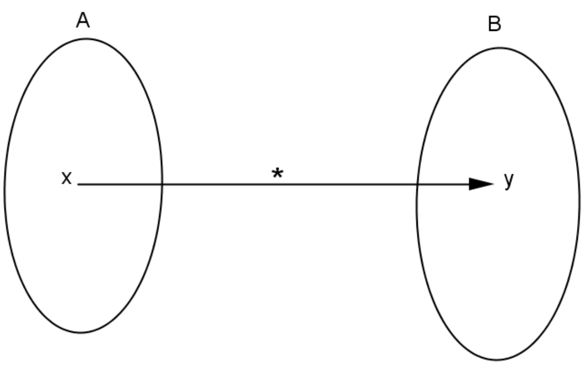
Notamos que mesmo na ecologia a mesma história pode ser repetida. Por exemplo podemos começar com um indivíduo como um organismo, por exemplo, que é capaz de reproduzir outros organismos da mesma espécie que mais tarde constituem uma população. Se diferentes populações ficam juntas então elas constituirão uma comunidade, etc.

Questão

Qual é o mecanismo que pode juntar dois indivíduos (seres humanos ou organismos de ecologia) por forma a começar a reprodução?

Actividade

Sobre a história acima podemos dizer que no caso de seres humanos, o casamento é que junta o homem e a mulher para mais tarde, depois da reprodução, constituirem uma família. Em matemática o conceito de casamento pode ser visto como uma operação binária entre dois indivíduos. Se pensarmos no nosso diagrama de transformação, temos o seguinte:



Onde A = conjunto de homens casando num certo tempo

B = conjunto de mulheres que se casam no mesmo tempo

* = operação que diz x casa y.

Claramente x*y = y*x

Neste caso, esta operação binária particular é comutativa. Se denotamos a relação implicada pela operação binária * por R então escrevemos xRy para significar x é relacionado a y ou yRx para significar y é relacionado a x.

Se $xRy \Rightarrow yRx$ então a relação é dita simétrica.

Questão

Define algumas relações em conjuntos da sua escolha e verifique se elas são simétricas.

Em geral notamos que se uma operação binária * dá origem à relação R então:

a) R é reflexiva se xRx

b) R é simétrica se $xRy \Rightarrow yRx$

c) R é transitiva se xRy e $yRz \Rightarrow xRz$

Para todos os elementos x, y, z num dado conjunto.

Uma relação R satisfazendo todas as três propriedades: de reflexibilidade, de simetria e de transitividade acima é chamada relação de equivalência.

Exemplo 1

Seja U o conjunto de todas as pessoas de uma comunidade.

Qual das seguintes é uma relação de equivalência entre elas?

i. é um tio de

ii. é irmão de

Notamos que na parte (i) se R é a relação "é um tio de" então xRy não implica que yRx.

Assim R em particular não é simétrica. Portanto, R não é uma relação de equivalência.

Todavia na parte (ii) se R é a relação "é um irmão de" então xRx é válida. Também $xRy \Rightarrow yRx$ e finalmente xRy e $yRz \Rightarrow xRz$

Portanto R é uma relação de equivalência.

Exercício 2

Qual das seguintes é uma relação de equivalência no conjunto de todos os seres humanos?

i. é um amigo de

ii. é um pai de

Exercício 3

a) Determine se a operação binária * no conjunto $\Re$ de números reais é comutativa ou associativa em cada um dos seguintes casos:

i. $x*y = y^2x$

ii. $x*y = xy + x$

b) Define uma relação ~ no conjunto de números naturais como se segue

a ~ *b* se e somente se *a* + *b* é par.

Determine se *a* ~*b* é uma relação de equivalência em $\Re$

c) Dá um exemplo de uma relação de equivalência no conjunto $\Re$ de números reais. Se você está a trabalhar num grupo, cada membro do grupo deve dar um tal exemplo.

d) Complete o exercício 2.4.1 p. 34 sobre Conjuntos, Relações e Funções por Duntsch e Gediga (soluções nas pp 48 – 49).

Módulo 1: Matemática Básica

Unidade 3: Grupos, sub-grupos e Homomorfismo

Objectivos Específicos

No fim da actividade o estudante deve ser capaz de:

- Formular axiomas para um grupo bem como para um anel
- Dar exemplos de grupos e sub-grupos
- Dar exemplos de anéis e sub-anéis
- Dar exemplos de homomorfismos entre grupos e isomorfismos entre anéis.
- Provar alguns resultados sobre propriedades de grupos e anéis.

Visão Geral

Recorde-se que na nossa Unidade 2, actividade 2 olhamos para um caso de um organismo individual ser capaz de reproduzir e dar origem a uma população. Note que uma população aqui se refere a um grupo de indivíduos da mesma espécie. Nesta actividade vamos demonstrar que uma estrutura alegébrica geral pode dar origem à uma específica com axiomas específicos bem formulados.

Vamos também reflectir sobre a noção de relações entre conjuntos usando transformações e, por este meio, vamos definir uma transformação entre dois grupos dados quaisquer. É nesta fase que o conceito de homomorfismo vai desempenhar um papel fundamental. O facto de se olhar para as propriedades de uma transformação entre dois conjuntos, satisfeitas com uma estrutura algébrica como os grupos são, podem ser de grande interesse e, na verdade, este é o começo da aprendizagem da própria Álgebra Abstracta.

Conceitos chave

Grupo abeliano: este é um grupo $\langle G, *\rangle$ no qual $\mathbf{a * b = b * a}$ para quaisquer **a, b,** $\in$ G.

Grupo: é um conjunto não vazio, digamos G, com uma operação binária * tal que:

(i) $\mathbf{a * b} \in G$ para quaisquer **a, b,** $\in$ G.

(ii) $\mathbf{a * (b * c) = (a * b) * c}$ para quaisquer **a, b, c** $\in$ G.

(iii) Existe um elemento e em G tal que $e * \mathbf{a} = \mathbf{a} = \mathbf{a} * e$ para todo $\mathbf{a} \in G$ onde e é chamado identidade

(iv) Para cada $\mathbf{a} \in G$ existe $\mathbf{a}^{-1} \in G$ tal que $\mathbf{a * a^{-1}} = e = \mathbf{a}^{-1} * \mathbf{a}$

Onde $\mathbf{a}^{-1}$ é chamado inverso de **a.**

Homomorfismo: é uma transformação ϕ de um grupo G para um outro grupo H tal que qualquer par $\mathbf{a, b} \in G$, temos $\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$

Isomorfismo: este é um homomorfismo que também é uma bijecção.

Anel: este é um conjunto não vazio **R** com duas operações binárias **+** e ***** chamadas de adição e multiplicação respectivamente tal que:

(i) $\langle \mathbf{R}, +\rangle$ é um grupo abeliano

(ii) $\langle \mathbf{R}, *\rangle$ é um semi-grupo multiplicativo

Semi-grupo: este é um conjunto não vazio **S** com uma operação binária * tal que:

(i) $\mathbf{a * b} \in \mathbf{S}$ para quaisquer $\mathbf{a, b} \in \mathbf{S}$.

(ii) $\mathbf{a * (b * c) = (a * b) * c}$ para quaisquer $\mathbf{a, b, c} \in \mathbf{S}$.

(iii) Para todos $\mathbf{a, b, c} \in \mathbf{S}$ temos:

$\mathbf{a * (b + c) = a* b + a* c}$ e $\mathbf{(a + b) * c = a * c + b * c}$

Sub-grupo: este é um subconjunto H de um grupo G tal que H é também um grupo com respeito à operação binária em G

Leituras

Todas das leituras para o módulo vêm de livros de textos de Fonte Aberta (Open Source text books). Isto significa que os autores fizeram-nos disponíveis para qualquer leitor usá-los sem cobrança. Fornecemos cópias completas destes textos nos CD que acompanham este curso.

Abstract Algebra: The Basic Graduate Year, by Robert B. Ash (Pasta em CD:

Abstract_Algebra_Ash).

Fontes da Internet

Wolfram MathWorld (visitado a 06.11.2006)

http://mathworld.wolfram.com/Group.html

- Leia esta entrada para a Teoria de Grupos
- Segue os links para explicar os conceitos específicos que queira.

Wikipedia (visitado a 06.11.06)

http://www.wikipedia.org/wiki/Group_ html

- Leia esta entrada para a Teoria de Grupos
- Segue os links para explicar os conceitos específicos que queira.

MacTutor History of Mathematics (visitado a 03.03.07)

http://www-groups.dcs.st-

and.ac.uk/~history/HistTopics/Development_ group_ theory.html

Para o seu interesse leia a história da Teoria de Grupos

Introdução: História de uma Sociedade Cooperativa

Em 1990, cem trabalhadores de uma certa Instituição no Kenya decidiram formar uma sociedade cooperativa chamada CHUNA na qual eles (trabalhadores) contribuiam regularmente com quotas mensais. Eles estabeleceram regras para administrar a sociedade que incluiam termos para dar empréstimos. Foi dicidido depois de eles terem dirigido a sociedade que algumas vezes os funcionários deviam fazer visitas regulares a outras sociedades cooperativas bem estabelecidas no país para ver como os outros as administravam.

Depois dessas visitas aperceberam-se que havia uma necessidade de mudar algumas regras da sua administração por forma a criar consistência.

Questão

1. Por que é que eles estabeleceram regras depois de formar a sociedade cooperativa?
2. Que significância pode atribuir às suas visitas às outras sociedades cooperativas?

Actividade

Na história acima verificamos que uma sociedade cooperativa requer regras para criar uma estrutura de funcionamento. Isto é equivalente a ter axiomas que são satisfeitos por elementos de um conjunto não vazio como é o caso do grupo G.

Questão

Pense noutras situações onde um grupo de pessoas ou objectos podem ter um conjunto de regras entre eles que se assemelham aos axiomas de um grupo.

Exemplo 1

Considere o conjunto Z de números inteiros e uma operação de adição (+). Temos que

(i) $a + b$ em Z para quaisquer $a, b \in Z$.

(ii) $a + (b + c) = (a + b) + c$ para quaisquer $a, b, c \in Z$.

(iii) existe $0 \in Z$ tal que

$a + 0 = a = 0 + a$ para todo $a \in Z$

(iv) para cada $a \in Z$ existe $-a \in Z$ tal que

$a + (-a) = 0 = - a + a$ para todo $a \in Z$

Assim, $\{Z, +\}$ é um grupo.

Observações

Verifique que o conjunto R de números reais é também um grupo perante a operação de adição.

Repare que se para qualquer grupo $\langle G, *\rangle$ temos que para qualquer par de pontos $x, y \in G$,

$x * y = y * x$

Então G é chamado de grupo abeliano

Neste caso o grupo $\{R^+, +\}$ é abeliano.

A segunda questão, que surge a propósito da história acima, sobre a sociedade cooperativa é principalmente de interesse comparativo, pois serve para determinar se a estrutura criada pela CHUNA permite é comparável àquelas criadas pelas outras sociedades.

De igual modo as estruturas de grupos são facilmente comparadas usando transformações. Assim para quaisquer dois grupos dados, digamos G e H uma transformação pode ser definida entre eles por forma a comparar as suas estruturas. Em particular um homomorfismo $\phi: G \to H$ é uma transformação que preserva as estrtuturas. Em outras palavras G e a sua imagem sub ϕ (denotado por $\phi(G)$ em H) são estruturalmente o mesmo grupo. Repare que se um homomorfismo é uma transformação sobrejectiva então ele é chamado de um isomorfismo.

Exemplo 2

Sejam G e H quaisquer dois grupos e seja e^I a identidade de H. Então a transformação $\phi: G \to H$, dada por

$\phi(xy) = e^I$

é um homomorfismo.

Na verdade para qualquer par $x, y \in G$,

$\phi(xy) = e^I = e^I\ e^{I\ =}\ \phi(x)\phi(y)$

Exercício 1

Seja G um grupo {$\mathbf{R}^+$, x} de números reais positivos sob multiplicação e seja H o grupo aditivo {$\mathbf{R}^+$**,** +} de números reais. Mostre que a transformação:

ϕ: G $\rightarrow$ H dada por

$\phi(xy) = \log_{10}x$

é um homomorfismo.

Observações

1. Veja que um subgrupo H de G é um sujeito de G escrito H $\subset$ G que é também um grupo com respeito a operação binária em G.
2. Veja também que o elemento identidade de um dado sub-grupo, digamos H, de um grupo G é o mesmo elemento identidade do grupo G
3. Repare que todas as considerações a respeito de grupos podem também ser arrastadas aos sub-grupos para encontrar os resultados seguintes.
4. Note ainda que o teorema formulado abaixo é útil na determinação de sub-grupos.

Seja G um grupo. Um sub-conjunto não vazio H de G é um sub-grupo de G se e somenete se a, b $\in$ H implica que $ab^{-1} \in$ H.

Exercício 2

a. Sejam H e K sub-grupos de G, então mostre que H$\cap$K é também um subgrupo de G

b. Seja H um sub-grupo de um grupo G. Mostre que Ha = H se e somente se a $\in$ H.

c. Sejam G e H grupos e ϕ: G $\rightarrow$ H um homomorfismo. Mostre que Ker(Φ) é um sub-grupo de H

Onde Ker(Φ) = {x em G: $\Phi(e) = e^I$}

Im(Φ) = {Φ(x) em H: x $\in$ G}

Exercício 3

Leia o capítulo 1 de Basic Algebra por Ash (pp 1 – 18) e complete o exercício na p. 19. Marque o seu próprio trabalho a partir do capítulo de respostas.

XV. Síntese do Módulo

Síntese do Módulo de Matemática Básica

Tendo estudado este módulo até este ponto, espera-se que conheça e domine os conceitos envolvidos nos conteúdos subsequentes.

Na unidade 1 os conceitos básicos são os conceitos de conjunto e função, usados em lógica a qual fornece uma introdução à ciência de raciocínio. Um bom domínio do sistema de números reais é também necessário para definir com facilidade as funções elementares.

Permutações e combinações juntamente com as funções trigonométricas completam os mais significativos tópicos nesta unidade. Estes conceitos são apresentados numa grande exposição patente nesta unidade.

Na Unidade 2 ocorre a introdução às estruturas algébricas nas quais o conceito de operações binárias desempenham um papel fundamental. O conceito de relação de equivalência é essencial. Este conceito conduz à repartição de conjuntos em classes de equivalências que facilitam o estudo mais aprofundado de conjuntos ou colecções de espaços.

Finalmente a Unidade 3 destaca o estudo, em dois exemplos particulares, de estruturas algébricas nomeadamente grupos e anéis. É importante destacar aqui suas similaridades bem como as suas principais diferenças. Na verdade uma semelhança que o estudante deve encontrar é o facto de na estrutura de grupo podermos encontrar um sub-grupo, como é o caso de anel e sub-anel. Todavia, a diferença principal entre as duas estruturas algébricas reside no facto de um grupo poder se definir com apenas uma operação binária enquanto que um anel se define com duas operações binárias. Estes factos são bem expostos nas duas actividades de aprendizagem nesta unidade. Como consideração final sobre esta unidade, recomenda-se o olhar atento à definição de transformações de um grupo para outro ou de um anel para outro e em particular para o homomorfismo, conhecido pela preservação da estrutura de um grupo, um aspecto essencial neste estudo.

XVI. Avaliação Sumativa

Módulo 1: Matemática Básica

Unidade 1: Questões de Avaliação Sumativa

Questão 1

a. Escreve a negação da seguinte afirmação

Se recebo um aumento salarial, vou comprar uma parcela de terra.

b. Use a tabela de verdade para mostrar que

$A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee)$

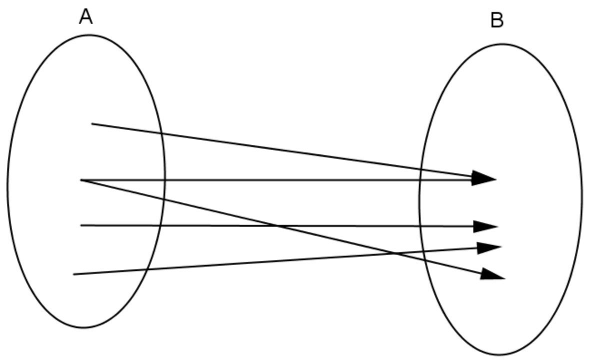
c. Determine as tabelas de verdade para as seguintes proposições.

i. $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \vee B)$

ii. $\sim(A \Rightarrow B) \vee (\sim A \wedge \sim B)$

Questão 2

a. Dada a definição de uma função, diz com razões e a partir do diagrama abaixo se a transformação representa uma função ou não.



b. Seja $A = \{x: -2 \leq x \leq 2\}$. Seja $f : A \to \Re$ e $g : A \to \Re$ definidas por

$f(x) = 3x + 4$

$g(x) = (x - 1)^2$

Determine a amplitude (a imagem) das funções f e g.

c. Formule a inversa de cada uma das seguintes funções

i. $f(x) = 1 +$ **Error!**

ii. $g(x) = \sqrt{3 + x^2}$

Questão 3

a. Sejam duas funções f e g definidas em todo o conjunto de números reais por

$f(x) = x - 1$

$g(x) = 2x^2$

Determine as funções compostas (i) *fog* e (ii) *gof*

b. Dadas as funções $h(x) = x + 1$ e $g(x) = x^2 + 4$ onde cada uma destas funções é definida em *R*, encontre

I. $(hog)^{-1}$

II. As amplitudes de *hog* e *goh*

c. Na parte (b) acima encontre os valores de *a* tal que $(\boldsymbol{hog})(\boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{goh})(\boldsymbol{a})$

Questão 4

a. De quantas formas 6 rapazes podem ser escolhidos numa turma de 30 rapazes se o chefe de turma tem de estar incluído?

b. Um comité de seis pessoas está para ser escolhido num grupo de 8 mulheres e cinco homens.

i. De quantas formas esta escolha pode ser feita?

ii. Se um homem particular não deve estar no comité quantos destes comités terão mais mulheres do que os homens?

c. Uma caixa contém 15 bolas, das quais 5 são vermelhas, 4 são verdes e 6 são azuis. De quantas formas três bolas podem ser escolhidas se

i. Não há restricção?

ii. As bolas devem ser da mesma cor

iii. Somente duas são da mesma cor

Questão 5

a) Simplifique $\text{sen}(4\theta) - \text{sen}(3\theta) + \text{sen}(2\theta)$

b) Resolve para x, $0 \leq x^o \leq 360^o$

i. $\sec^2(x) - 5(\tan(x) - 1) = 0$

ii. $2\cos(2x) + \text{sen}^2(x) = 2\cos(x)$

d. Expresse $\sqrt{3}$ na forma $r\cos(\theta + \alpha)$.

Depois resolve para θ no intervalo $0 \leq x^o \leq 180^o$ a equação

$\sqrt{3}\cos(\theta) - \text{sen}(\theta) = 0$

Unidade 1: Soluções da Avaliação Sumativa

Q1. (a) Se não recebo o aumento salarial não vou pagar o talhão

(b)

1	2	3	4	5	6	7	8
A	B	C	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \vee C$	$(A \vee B) \wedge (A \vee C)$	$A \vee (B \wedge C)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	V	V	V	V
V	F	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V	V	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	F	V	F	F	F
F	F	V	F	F	V	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

(c), (i)

A	B	$A \vee B$	$A \rightarrow B$	$(A \rightarrow B) \rightarrow (A \vee B)$
V	V	V	V	V
V	F	V	F	F
F		V	V	V
F	F	F	V	F

(ii)

A	~A	B	~B	$A \rightarrow B$	$\sim(A \rightarrow B)$	$\sim A \wedge \sim B$	$\sim(A \rightarrow B) \vee (\sim A \wedge \sim B)$
V	F	V	F	F	V	F	F
V	F	F	V	V	F	F	V
F	F	V	F	F	V	F	F
F	F	F	V	V	F	V	V

Q2

(a) Uma função é uma transformação onde cada objecto é transformado numa única imagem.

O diagrama não representa uma função porque há um objecto que se transforma em duas imagens diferentes.

(b) Dado A = $\{x: -2 \le x \le 2\}$

$f(x) = 3x + 4$

$g(x) = (x - 1)^2$

Amplitude de $f = \{y: -2 \le y \le 10\}$

Amplitude de $g = \{y: 0 \le y \le 9\}$

(c)

i. Se $f(x) = 1 +$ **Error!** então $f^{-1}(x) =$ **Error!**

ii. Se $g(x) = \sqrt{3 + x^2}$ então $g^{-1}(x) = \sqrt{x^2 - 3}$

Q3

(a) Dadas as funções $f(x) = x - 1$ e $g(x) = 2x^2$

i. $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x^2) = 2x^2 - 1$

ii. $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x - 1) = 2(x - 1)^2$

(b) Dadas as funções $h(x) = x + 1$ e $g(x) = x^2 + 4$

i. $(h \circ g)(x) = h(g(x)) = h(x^2 + 4) = x^2 + 4 + 1 = x^2 + 5$

$(h \circ g)^{-1}(x) = \sqrt{x - 5}$

Amplitude de $hog = \{y: y \ge 5\}$

Também $(g \circ h)(x) = g(h(x)) = g(x + 1) = (x + 1)^2 + 4$

Amplitude de $goh = \{y: y \ge 4\}$

(a) $(h \circ g)(a) = a^2 + 5$

$(g \circ h)(a) = (a + 1)^2 + 4$

Portanto $(a + 1)^2 + 4 = a^2 + 5$

$2a + 5 = 5$

$2a = 0$

$a = 0$

Q4

(a) Se o chefe de turma tem de ser incluído estamos a escolher 5 rapazes numa turma de 25. Portanto temos: ${}^{25}C_5$ = **Error!**

${}^{13}C_6$ = **Error!**

(b) (i) Isto pode ser feito em $= 13 \times 12 \times 11$

$= 1716$ formas diferentes

(ii) Excluímos o homem que não deve estar no comité deixando-nos com quatro homens e oito mulheres a serem escolhidos. Dado que as mulheres devem estar a mais em relação aos homens temos as três opções seguintes:

Escolhendo 4 mulheres e 2 homens dá-nos ${}^{8}C_4 \times {}^{4}C_2$ formas diferentes

Ou escolher 5 mulheres e 1 homem dando-nos ${}^{8}C_5 \times {}^{4}C_1$

Ou ainda escolher 6 mulheres e nenhum homem ${}^{8}C_6$

Em total temos

${}^{8}C_4 \times {}^{4}C_2 + {}^{8}C_5 \times {}^{4}C_1 + {}^{8}C_6$

$= 420 + 224 + 28 = 672$ formas diferentes

(c)

i. ${}^{15}C_5$ formas

ii. ${}^{5}C_1 \times {}^{6}C_1 \times {}^{8}C_5 = 120$ formas

iii. Temos ou 2G e 1R ou 2G e 1B ou 2B e 1R ou 2R e 1G ou 2R e 1B

Q5

(a) Primeiro verificamos que sen(4θ) + sen(2θ) = 2sen(θ)cos(θ)

Portanto sen(4θ) - sen(3θ) + sen(2θ) = 2 sen(3θ)cos(θ) - sen(3θ)

= sen(3θ)(2cos(θ) – 1)

(b) (i) $\sec^2(x) - 5(\tan(x) - 1) = 0$

$1 + \tan^2(x) - 5(\tan(x) - 1) = 0$

$\tan^2(x) - 5\tan(x) + 6 = 0$

Seja $y = \tan(x)$

$y^2 - 5y + 6 = 0$

$(y - 3)(y - 2) = 0$

Portanto $y = 3$

$y = 2$

$\tan(x) = 3$ ou $\tan(x) = 2$

$x = \tan^{-1}(3)$ ou $x = \tan^{-1}(2)$

(ii)

(c) $2\left(\cos^2(x) - 1\right) + 1 - \cos^2(x) = 2\cos(x)$

$\sqrt{3}\cos(\theta) - \text{sen}(\theta) = r\cos(\theta + \alpha)$

$= rr\cos(\theta)\text{sen}(\alpha) - r\text{sen}(\theta)\cos(\alpha)$

$r\text{sen}(\alpha) = \sqrt{3}$ e $r\cos(\alpha) = 1$

$r = \pm 2$ e $\tan(\alpha) =$ **Error!** $\therefore \alpha = 30^\circ$

$\pm 2\cos(\theta + 30^\circ) = 0$

$\Rightarrow \cos(\theta + 30^\circ) = 0$

$\therefore\ \theta + 30^\circ = 180^\circ$

$\therefore\ \theta = 150^\circ$ para $0 \le \theta \le 180^\circ$

Unidade 2: Questões de Avaliação Sumativa

1. Determine se a operação binária * no comjunto **R** de números reais é comutativa ou associativa em cada um dos seguintes casos

(a) $x * y = x^2y$

(b) $x * y = xy + y$

2. (a) Seja S um conjunto não vazio com uma operação binária * associativa definida nele. Para x, y e z ∈ S supõe que x comuta com y e z. Mostre que x também comuta com y * z.

(b) Prove que se *a, b* ∈ **Z** tal que *a/b* e *a/c* então *a/mb* + *nc* para todos *m, n* ∈ **Z.** Onde *a/b* significa *a* divide *b*.

3. Dá a definição de uma relação de equivalência. Define a relação ~ em **Z** de inteiros como segue:

a ~ *b* se somente se *a* + *b* é par. Mostre que ~ é uma relação de quivalência em **Z**.

4. (a) A relação de congruência modulo n no conjunto **Z** de inteiros é definida como se segue:

Para qualquer par x, y ∈ **Z** x é dito congruente a y modulo n escrito xy = $(\mathbf{modn})$ se *n* divide x – y.

Mostre que esta relação é uma relação de congruência

(b) Mostre que a relação ~ definida em ℵ × ℵ por $\begin{pmatrix}\mathbf{a}\\\mathbf{b}\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}\mathbf{c}\\\mathbf{d}\end{pmatrix}$ se *a* + *d* = *b* + *c* é uma relação de equivalência. Onde ℵ é o conjunto dos números naturais.

Unidade 2: Respostas às questões da Avaliação Sumativa

1. (a) Sejam $x, y, z \in \Re$. Então $x * (y * z) = x^2(y * z) = (x^2)^2y^2z = x^4y^2z$.

Também $(x * y) * z = x^2y * z = (x^2y)^2z = x^4y^2z$

Assim $x * (y * z) = (x * y) * z$

Portanto * é asociativa

Também temos que

$x * y = x^2y$ e $y * x = y^2x$

Assim $x * y \neq y * x$

Portanto * não é comutativa

(b) Sejam $x, y, z \in \Re$. Então

$x * (y * z) = x * (yz + z) = x(yz + z) + yz + z$

$= xyz + zx + yz + z$

Também

$x * (y * z) = (xy + y) * z$

$= (xy + y)z + z$

$= xyz + yz + z$

$\therefore\ x * (y * z) \neq (x * y) * z$

Portanto * não é associativa

Também temos que

$x * y = xy + y$ e $y * x = yx + x$

$\therefore\ x * y \neq y * x$

Portanto * não é comutativa.

2. (a) Dado que:

$x * y = y * x$ e $x * z = z * x$

Temos pela associatividade de * que

$x * (y * z) = (x * y) * z$

$= (y * x) * z$

$= y * (x * z)$

$= y * (z * x)$

$= (y * z) * x$

Portanto x comuta também com $y * z$

(b) Agora $a/b \Rightarrow b = ka$ e $a/c \Rightarrow b = ha$ para alguns $k, h \in \mathbf{Z}$.

$mb + nc = mka + nha = a(mk + nh)$

$\Rightarrow a/mb + nc$

3. Um relação de equivalência é uma relação que é reflexiva, simétrica e transitiva.

Dada a relação

$a \sim b$ se e só se $a + b$ é par.

Temos

(i) $a + a = 2a \Rightarrow a \sim a$ reflexiva

(ii) $a \sim b \Rightarrow a + b = 2k \Rightarrow b + a = 2k$

$\Rightarrow b \sim a$ simétrica

(iii) $a \sim b$ e $b \sim c \Rightarrow a + b = 2m$ e $b + c = 2n$

$\Rightarrow a + c = 2m - b + 2n - b$

$= 2m + 2n - 2b$

$= 2(m + n - p) \Rightarrow a \sim c.$

transitiva

Portanto ~ é uma relação de equivalência.

4. (a) Para qualquer par x, y $\in$ **Z,** temos:

(i) n divide $x - x = 0$ é reflexiva $\Rightarrow x \equiv x(\mathrm{mod} n)$

(ii) n divide $x - y$. Então também n divide $y - x$ que é uma propriedade simétrica.

(iii) n divide $x - y$ e n divide $y - z$. Então n divide também $(x - y) + (y - z) = x - z$

que é uma propriedade transitiva. Portanto congruência de módulo é uma relação de equivalência.

(b) Notamos que:

(i) $(a \sim b) \sim (c, d)$ dado que $a + b = b + a$ que é uma propriedade reflexiva

(ii) $(a, b) \sim (a, d) \Rightarrow a + d = b + c$

$\Rightarrow d + a = c + b$

$\Rightarrow (c, d) \sim (a, b)$

que é uma propriedade simétrica.

(iii) Agora supõe que $(a, b) \sim (c, d)$ e $(c, d) \sim (e, f)$

Então temos que:

$a + d = b + c$ e $c + f = d + e$

$\Rightarrow a + d + c + f = b + c + d + e$

$\Rightarrow a + f = b + e \Rightarrow (a, b) \sim (e, f)$

Portanto ~ é uma relação de equivalência.

Unidade 3: Questões de Avaliação Sumativa

1. (a) Seja G um grupo tal que $a^2 = e$ para todo $a \in$ G. Mostre que G é abeliano

(b) Seja G um grupo tal que $(ab)^2 = a^2b^2$ para todos a, b $\in$ G. Mostre que G é abeliano.

2. Dadas as matrizes

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Verifique que eles formam um grupo multiplicativo

2. (a) Mostre que se G é um grupo de ordem par, então existe exactamente um número ímpar de elementos de ordem 2.

(c) Se *a* e *b* são quaisquer dois elementos de um grupo G, mostre que a ordem de *ab* é a mesma de *ba*.

3. (a) Se ϕ é um isomorfismo de um grupo G num grupo H, prove que

$(\phi(a))^n = e$ sse $a^n = e$

(b) Prove que o grupo multiplicativo da n-ésima raíz de uma unidade é um grupo cíclico de ordem *n*.

4. (a) Seja **C** o campo de números complexos.

Defina A = $\{a + ib: a, b \in \mathbf{C}\}$

onde $\mathbf{i} = \sqrt{-1}$

Mostre que A é um sub-anel de **C**.

(b) Se *a* e *b* são elementos nilpotentes de um anel comutativo, mostre que *a* + *b* é também nilpotente

Dá um exemplo para mostrar que a situação anterior não ocorre se o anel não é comutativo.

Unidade 3: Respostas às questões da Avaliação Sumativa

1 (a) Notemos que para todos a, $b \in$ G, temos:

a, $b \in$ G $\Rightarrow b^2 = e$ uma vez que $a^2 = e$ para todo $a \in$ G

$\therefore (ab)^2 = e$

Assim

$$\begin{aligned} ab &= aeb \\ &= a(ab)^2b \\ &= a(ab\ ab)b \\ &= a^2bab^2 \\ &= ebae \\ &= ba \end{aligned}$$

Portanto G é abeliano

(b) Dado que:

$(ab)^2 = a^2b^2$

$ab\ ab = aa\ bb$

Aplicando a lei de cancelamento temos $ba = ab$

Portanto G é abeliano

2. Seja $e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$c = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Temos

$a^2 = b^2 = c^2 = e$

$ab = c = ba$

$bc = a = cb$

$ca = b = ac$

Assim G = $\{e, a, b, c\}$ é fechado perante a multiplicação e é a identidde em G e cada elemento de G é inverso de si próprio.

Também notamos que a multiplicação de matrizes é associativa e portanto G é um grupo comutativo.

3. (a) Supõe que $x \in G$ não é elemento de ordem 2. Então $x^2 \neq e \Rightarrow x \neq x^{-1}$

Agora segue que existe um número par de elementos x tais que $x^2 \neq e$.

Assim existe um número par de elementos x em G tais que $x^2 = e$

Agora, uma vez que e satisfaz $e^2 = e$ temos que há um número ímpar de elementos x em G que são de ordem 2.

(b) Supõe para o elemento *ab* em G de ordem ***ab* = m,** isto é ***O*(*ab*) = m**

$$(ba)^m = a^{-1}a(ab)m$$

$$= a^{-1}\underbrace{a\ ba\ ba \ldots\ldots .\ ba}_{\text{m vezes}}$$

$$= a^{-1}(\underbrace{ab\ ab \ldots\ldots\ldots ab)a}_{\text{m vezes}}$$

$$= a^{-1}(ab)^m a = e$$

Isto implica que **O(*ba*)** divide **m = O(*ab*).**

De igual modo **O(*ab*)** divide **O(*ba*)** $\Rightarrow$ **O(*ab*) = O(*ba*)**

4. (a) Supõe que $\psi(a)^n = e$. Então

$$\underbrace{\psi(a)\psi(a)\psi(a) \ldots\ldots\ldots \psi(a)}_{\text{n vezes}} = \psi(a^n) = \psi(e)$$

Assim $a^n = e$ dado que ψ é um isomorfismo. Reciprocamente supõe que $a^n = e$.

Então temos que:

$e = \psi(e) = \psi(a^n)$

$= \psi(a)\psi(a^{n-1})$

$= \psi(a)\psi(a)\psi(a)\ (a^{n-2}) \ldots\ldots . = \psi(a)^n$

Portanto, está concluída a prova.

(b) Primeiro notamos que as raízes da equação $z^n = 1$ onde z é uma variável complexa são encontradas por usar o teorema de DeMoivre que é

cos**Error!** + **i** sen**Error!**

para k = 0, 1, 2, 3, n – 1

estas raízes forma um grupo cíclico de ordem *n* gerado por

w = cos**Error!** + **i** sen**Error!**

5. (a) Seja $a + \boldsymbol{i}b \in$ A e $c + \boldsymbol{id} \in$ A. Então

$(a + \boldsymbol{i}b) - (c + \boldsymbol{i}d) = (a - c) + (b - b)\boldsymbol{i} \in$ A. Também

$(a + \boldsymbol{i}b) \times (c + \boldsymbol{i}d) = (ac - bd) + (ad + cb) \in$ A. Portanto A é um sub-grupo do anel **C** dos números complexos.

(b) Seja $a^{\mathrm{m}} = 0$ e $b^{\mathrm{n}} = 0$. Também $\boldsymbol{k} = \mathbf{max\{m, n\}}$. Então

$$\boldsymbol{(a + b)^{2k}} = \sum_{r=1}^{2k} \binom{2k}{r} a^{2k-r} b^{r} = \mathbf{0}$$

Daqui $a + b$ é também nilpotente.

Exemplo

Considere o anel da matriz 2×2 sobre um campo F se

$$a = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Claramente este anel não é comutativo. Tamos também que $a^2 = b^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Mas $a + b$ não é nilpotente.

XVII. Referências

Free High School Science Texts authors, A Textbook for High School Students Studying Maths, 2005, pg 38-47 (File name on CD: Secondary_School_Maths).

E. H. Connel, Elements of Abstract and Linear Algebra, 1999, University of Miami, pg 1-13 (File name on CD: Abstract_and_linear_algebra_Cornnell)

Ivo Duntsch and Gunther Gediga, Sets relations and functions, methodos publishers (UK) 2000. (File name on CD: Sets_Relations_Functions_Duntsch)

Robert B. Ash, Abstract Algebra: The Basic Graduate Year, (Folder on CD: Abstract_Algebra_Ash).

XVIII. Principal Autor do Módulo

O Autor

O autor deste módulo, Matemática Básica, nasceu em 1963 e teve Educação Formal completa em Kenya. Ele estudou na Universidade de Nairobi de 1974 onde obteve o grau de Licenciatura em Ciências (Bachelor of Science (B. Sc)) em 1977, fez o Mestrado em Ciências (Master of Science) em Matemática Pura em 1979 e o Doutoramento em Filosofia (P.HD) em 1983. Especializou-se na área de Análise e lecciona na Universidade de Nairobi desde 1980 onde subiu diversas categorias até a de Professor Associado de Matemática Pura, na qual se encontra agora.

Tem participado durante anos em workshorps sobre o desenvolvimento de materiais de estudos para o Programa de Ensino Aberto e à Distância para os estudantes das áreas de ciência e artes nas quais escreveu livros de Análise Real, Topologia e Teoria de Medidas.

Endereço

Prof. Jairus M. Khalagai
School of Mathematics
University of Nairobi
P. O. Box 30197 – 00100
Nairobi – KENYA
Email: khalagai@uonbi.ac.ke