LÓGICA E CONJUNTOS

LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

CAPES

UAB UNIVERSIDADE ABERTA DO BRASIL

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA CEARÁ

Ministério da Educação - MEC

Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior

Universidade Aberta do Brasil

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
Universidade Aberta do Brasil
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará
Diretoria de Educação a Distância

Licenciatura em Matemática

Lógica e Conjuntos

Francisco Gêvane Muniz Cunha

Fortaleza, CE
2008

CRÉDITOS

Presidente
Luiz Inácio Lula da Silva

Ministro da Educação
Fernando Haddad

Secretário da SEED
Carlos Eduardo Bielschowsky

Diretor de Educação a Distância
Celso Costa

Reitor do IFCE
Cláudio Ricardo Gomes de Lima

Pró-Reitor de Ensino
Gilmar Lopes Ribeiro

Diretora de EAD/IFCE e Coordenadora UAB/IFCE
Cassandra Ribeiro Joye

Vice-Coordenadora UAB
Régia Talina Silva Araújo

Coordenador do Curso de Tecnologia em Hotelaria
José Solon Sales e Silva

Coordenador do Curso de Licenciatura em Matemática
Zelalber Gondim Guimarães

Elaboração do conteúdo
Francisco Gêvane Muniz Cunha

Colaboradora
Luciana de Lima

Equipe Pedagógica e Design Instrucional
Ana Claúdia Uchôa Araújo
Andréa Maria Rocha Rodrigues
Cristiane Borges Braga
Eliana Moreira de Oliveira
Gina Maria Porto de Aguiar Vieira
Iraci Moraes Schmidlin
Jane Fontes Guedes
Jivago Silva Araújo
Karine Nascimento Portela
Lívia Maria de Lima Santiago
Luciana Andrade Rodrigues
Maria Irene Silva de Moura
Maria Vanda Silvino da Silva
Marília Maia Moreira
Regina Santos Young

Equipe Arte, Criação e Produção Visual
Ábner Di Cavalcanti Medeiros
Benghson da Silveira Dantas
Davi Jucimon Monteiro
Diemano Bruno Lima Nóbrega
Germano José Barros Pinheiro
Gilvandenys Leite Sales Júnior
Hommel Almeida de Barros Lima
José Albério Beserra
José Stelio Sampaio Bastos Neto
Larissa Miranda Cunha
Marco Augusto M. Oliveira Júnior
Navar de Medeiros Mendonça e Nascimento
Roland Gabriel Nogueira Molina

Equipe Web
Aline Mariana Bispo de Lima
Benghson da Silveira Dantas
Fabrice Marc Joye
Igor Flávio Simões de Sousa
Luiz Alfredo Pereira Lima
Luiz Bezerra
Lucas do Amaral Saboya
Ricardo Werlang
Samantha Onofre Lóssio
Tibério Bezerra Soares
Thuan Saraiva Nabuco

Revisão Textual
Aurea Suely Zavam
Nukácia Meyre Araújo de Almeida

Revisão Web
Débora Liberato Arruda Hissa
Saulo Garcia

Logística
Francisco Roberto Dias de Aguiar
Virgínia Ferreira Moreira

Secretários
Breno Giovanni Silva Araújo
Francisca Venâncio da Silva

Auxiliar
Bernardo Matias de Carvalho
Carla Anaíle Moreira de Oliveira
Maria Tatiana Gomes da Silva
Wagner Souto Fernandes
Zuila Sâmea Vieira de Araújo

Catalogação na Fonte: Etelvina Marques (CRB 3 – Nº 615)

C972l Cunha, Francisco Gêvane Muniz

Lógica e conjuntos / Francisco Gêvane Muniz Cunha; Coordenação Cassandra Ribeiro Joye. - Fortaleza: UAB/IFCE, 2008.
109p. : il. ; 27cm.

ISBN 978-85-63953-05-6

1. LÓGICA 2. CÁLCULO PROPOSICIONAL 3. CONJUNTOS 4. SENTENÇAS ABERTAS. 5. QUANTIFICADORES I. Joye, Cassandra Ribeiro. (Coord.) II. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará - IFCE III. Universidade Aberta do Brasil IV. Título

CDD – 511.3

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO

Olá turma,

Nossa disciplina, Lógica e Conjuntos, de 60h/a, servirá de fundamentação para todas as disciplinas do curso. Nela, além de fundamentos da Lógica, apresentaremos noções básicas de Conjuntos. Com estes fundamentos, você, aluno, conhecerá a linguagem matemática básica e poderá perceber que esta linguagem é essencial, o que lhe possibilitará expressar melhor as afirmações e conclusões que compõem o corpo teórico da Matemática. Além disso, apresentaremos a ideia, precisa e indispensável para a sua formação, sobre que é uma demonstração.

A Lógica é útil em qualquer área que exija raciocínios elaborados, bem como em casos práticos do nosso dia-a-dia. Um conhecimento básico de Lógica é indispensável para estudantes de áreas como Matemática, Filosofia, Ciências, Línguas ou Direito. Seu aprendizado auxilia os estudantes no raciocínio, na compreensão de conceitos básicos e na verificação formal de provas, preparando para o entendimento dos conteúdos de tópicos mais avançados. A Lógica Matemática tem hoje aplicações concretas extremamente relevantes em diversos domínios. Ela é utilizada no planejamento dos modernos computadores eletrônicos e é nela que se justifica a “inteligência” dos computadores atuais.

Além da Lógica, a compreensão de noções básicas sobre conjuntos é essencial para a Matemática. Os conceitos da Matemática moderna, desde os mais básicos até os mais complexos podem ser formulados na linguagem de conjuntos. Desse modo, para dar consistência a qualquer afirmação matemática, basta, então, dar rigor às afirmações sobre conjuntos. O caráter fundamentalmente conceitual da Teoria dos Conjuntos dá-lhe lugar de destaque em todas as áreas em que o pensamento racional e, em particular, o pensamento científico é fundamental e, parece natural que ela deva estar na base de todas as ciências.

A sua participação nas atividades e em cada aula será essencial para que você possa tirar o maior proveito da disciplina. Estaremos à disposição para maiores esclarecimentos.

Desejo um bom curso a todos!
Francisco Gêvane Muniz Cunha.

AULA 1

Lógica: importância, história e primeiros fundamentos

Olá! Esta é a nossa primeira aula. Nela, aprenderemos um pouco da história da Lógica, como ela se iniciou, quais as pessoas que contribuíram para o seu desenvolvimento e que ramos da Matemática e de áreas afins se utilizam das teorias da Lógica para desenvolver suas próprias teorias.

Nossa disciplina, Lógica e Conjuntos, servirá de fundamentação para todas as disciplinas do curso. Nela, além de fundamentos da Lógica, apresentaremos noções básicas de Conjuntos. Com esses fundamentos, você, aluno, conhecerá a linguagem Matemática básica, uma linguagem essencial, que lhe possibilitará expressar melhor as afirmações e conclusões que compõem o corpo teórico da Matemática. Além disso, aprenderemos o que é uma demonstração ideia precisa e indispensável para a sua formação.

Objetivos

- Desenvolver a capacidade de usar e entender discursos
- Conhecer a linguagem Matemática básica
- Estabelecer a ideia de demonstração matemática

TÓPICO 1

Introdução à lógica matemática

OBJETIVOS

- Reconhecer a importância da Lógica
- Estabelecer o ensino de Lógica
- Compreender os aspectos conceituais e relevantes sobre a Lógica
- Conhecer o percurso histórico da Lógica e reconhecer a Lógica em uma perspectiva de valor histórico

1.1 INTRODUÇÃO

Neste tópico, faremos um breve passeio histórico, desde a criação da Lógica por Aristóteles até o seu desenvolvimento e perspectiva nos dias atuais, a fim de mostrar a você, caro aluno, a importância dessa disciplina não apenas para a própria Matemática como também para outras áreas que se utilizam de suas bases teóricas.

Tradicionalmente, diz-se que a Lógica é a ciência do *raciocínio* ou que está preocupada com o estudo do raciocínio. Ainda que atualmente esta ideia possa ser considerada insuficiente ou mesmo ultrapassada devido à enorme dimensão e diversidade que tem alcançado este ramo comum da *Filosofia* e da *Matemática*, ela pode servir como uma primeira aproximação para o conteúdo da Lógica.

O sucesso dessa ciência , também conhecida como *Lógica Matemática*, não se deve apenas ao fato de seus princípios fundamentais constituírem a base da Matemática. Sua relevância é evidenciada principalmente por ter seus padrões de análise e crítica aplicáveis a qualquer área de estudo em que a *inferência* e o *argumento* sejam necessários, ou seja, a qualquer campo em que as conclusões devam basear-se em provas.

A Lógica é útil a qualquer área que exija raciocínios elaborados, bem como em casos práticos do nosso dia a dia. O conhecimento

SAIBA MAIS

Inferência é uma palavra que deriva do termo em latim *inferentia* e diz respeito ao ato de inferir ou tirar conclusão. A palavra *argumento* também vem do latim, do termo *argumentu* e corresponde a um raciocínio pelo qual se tira uma conclusão.

básico de Lógica é indispensável, por exemplo, para estudantes de Matemática, Filosofia, Ciências, Línguas ou Direito. Seu aprendizado auxilia os estudantes no raciocínio, na compreensão de conceitos básicos e na verificação formal de provas, preparando para o entendimento dos conteúdos de tópicos mais avançados.

A Lógica Matemática tem hoje aplicações concretas extremamente relevantes em diversos domínios. Uma aplicação notadamente importante da Lógica na vida moderna é seu uso como fundamentação para a *Computação* e, em especial, para a *Inteligência Artificial*. A Lógica é utilizada no planeamento dos modernos computadores eletrônicos e é por meio dela que se justifica a ''inteligência'' dos computadores atuais.

Embora a Lógica seja um tema com amplas conotações interdisciplinares – permeando as conversas informais entre amigos, a leitura de jornais ou revistas – seu ensino, em particular a nível básico, enfrenta sérias dificuldades, como sugere a ilustração a seguir:

Figura 1– Charge sobre a Lógica

A Lógica tem sido tradicionalmente apresentada de forma abstrata, sem exemplos concretos ligados a temas matemáticos específicos. Mais particularmente para o ensino básico, devemos destacar um componente bastante prático e pouco explorado da Lógica Matemática apontado por Druck (1990, p. 10):

> [...] o desenvolvimento da capacidade de usar e entender um discurso correto, identificando construções falaciosas, ou seja, incorretas, mas com a aparência de correção lógica. [...] a capacidade de argumentar e compreender argumentos, bem como a capacidade de criticar argumentações ou textos.

Assim, fica evidenciado que uma das principais funções da Lógica Matemática é servir de fundamento ao raciocínio matemático, evitando ambiguidades e contradições por possibilitar determinar, com absoluta precisão e rigor, quando um raciocínio matemático é válido e quando ele não o é, ou seja, ela fornece técnicas adequadas para a análise de argumentos. Nesse contexto, estão pressupostas tanto a ideia de provas ou demonstrações essencial para a sua formação como professor de Matemática – como a noção que permite compreender e resolver problemas, que de outra forma seriam intratáveis.

GUARDE BEM ISSO!

A Lógica constitui-se como uma ciência autônoma para estudar o pensamento humano e distinguir inferências e argumentos.

Do que expomos até aqui, queremos destacar o papel especial da Lógica como ferramenta para nos apropriar de objetos matemáticos (definições, representações, teoremas e demonstrações) bem como um poderoso recurso na organização do pensamento humano. Após essa introdução, faremos um breve relato da história da Lógica, destacando as contribuições recebidas, os avanços alcançados e as principais ramificações dessa ciência .

1.2 UM POUCO DE HISTÓRIA

As raízes da Lógica encontram-se na antiga Grécia, com as concepções de alguns filósofos, entre eles Sócrates e Platão. Entretanto, no sentido mais geral da palavra, o estudo da Lógica remonta ao século IV a.C. e teve início com Aristóteles (384 – 322 a.C.), filósofo de Estagira (hoje Estavo), na Macedônia. Ele criou a ciência da Lógica baseada na *Teoria do Silogismo* (certa forma de argumento válido) e suas principais contribuições foram reunidas em uma obra denominada *Organun*, que significa *Instrumento da Ciência*. Dentre essas contribuições, destacamos:

i) A separação da validade formal do pensamento e do discurso da sua verdade material;

ii) A criação de termos fundamentais para analisar a lógica do discurso: *Válido*, *Não Válido*, *Contraditório*, *Universal*, *Particular*.

A lógica aristotélica era bastante rígida, mas permaneceu quase inalterada até o século XVI. Esse primeiro período é também conhecido como *Período Aristotélico*, o que mostra a influência das ideias de Aristóteles.

Na Grécia, distinguiram-se duas grandes escolas de Lógica: a *Peripatética* (que teve a influência de Aristóteles), retratada no quadro *A Escola de Atenas* (Figura 2) do pintor renascentista italiano Rafael; e a *Estóica*, fundada por Zenão de Elea (326 – 264 a.C.). Essas duas escolas foram durante muito

Fonte: http://upload.wikimedia.org/wikipedia/

Figura 2 – A Escola de Atenas

tempo escolas rivais, o que de certa forma prejudicou o desenvolvimento da Lógica. Na verdade, as teorias dessas escolas eram complementares.

Nos anos subsequentes, com a contribuição de grandes matemáticos, como Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716), George Boole (1815 – 1864), Augustus de Morgan (1806 – 1871) e, mais recentemente, Bertrand Russel (1872 – 1970), Kurt Gödel (1906 – 1975) e Alfred Tarski (1902 – 1983), a Lógica Matemática ganhou grande destaque e passou a exercer grande influência na Informática, Inteligência Artificial, entre outros campos da ciência. Um pouco mais do desenvolvimento da Lógica pode ser visto no texto abaixo:

A Lógica começou a desenvolver-se com Aristóteles (384-322 a.C.) e os antigos filósofos gregos passaram a usar em suas discussões sentenças enunciadas nas formas afirmativas e negativas, resultando assim grande simplificação e clareza, com efeito de grande valia em toda a Matemática. Por volta de 1666, Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) usou em vários trabalhos o que chamou calculus ratiotinator, ou logica mathematica ou logística. Essas ideias nunca foram teorizadas por Leibniz, porém seus escritos trazem a ideia da Lógica Matemática.

No século XVIII, Leonhard Euler (1707-1783) introduziu a representação gráfica das relações entre sentenças ou proposições, mais tarde ampliada por John Venn (1834-1923), E. W. Veitch em 1952 e M. Karnaugh em 1953. Em 1847, Augustus DeMorgan (1806-1871) publicou um tratado, Formal logic, envolvendo-se em discussão pública com o filósofo escocês William Hamilton (que nada tinha a ver com o matemático William Rowan Hamilton), conhecido por sua aversão à Matemática, o qual, entre outras coisas, escreveu "A Matemática congela e embota a mente; um excessivo estudo da Matemática incapacita a mente para as energias que a filosofia e a vida requerem". George Boole (1815-1864), ligado pela amizade a DeMorgan, interessou-se pelo debate entre o filósofo e o matemático, escrevendo The mathematical analysis of logic (1848) em defesa de seu amigo. Mais tarde, publicou um livro sobre Álgebra de Boole, chamado An investigation of the laws of thought (1854) e, em 1859, escreveu Treatise on differential equations, no qual

VOCÊ SABIA?

O termo peripatético (em grego, peripatetikós) significa ambulante ou itinerante. Peripatéticos (ou "os que passeiam") eram assim chamados os discípulos de Aristóteles, em razão do hábito do filósofo de ensinar ao ar livre, caminhando enquanto lia e dava preleções, nos portais cobertos do Liceu (a primeira escola de Filosofia, aberta por Aristóteles), os perípatoi, ou sob as árvores que o cercavam.

Estóico (em grego stoikós), que significa resignado, inabalável, também está associado a lugar ou, melhor dizendo, ao local onde Zenão gostava de promover seus encontros filosóficos: a parte coberta do Mercado de Atenas, stoá.

discutiu o método simbólico geral. O trabalho de George Boole foi ampliado por Lewis Carrol (1896), Whitehead (1898), Huntington (1904 e 1933), Sheffer (1913) e outros. Este período de desenvolvimento da Lógica culminou com a publicação do Principia mathematica por Alfred North-Whitehead (1861-1947) e Bertrand Russell (1872-1970), e representou grande ajuda para completar o programa sugerido por Leibniz, que visava dar uma base lógica para toda a Matemática.
A Álgebra de Boole, embora existindo há mais de cem anos, não teve qualquer utilização prática até 1937, quando foi feita a primeira aplicação à análise de circuitos de relés por A. Nakashima, que não foi bem-sucedido, pois, em vez de desenvolver a teoria já existente, tentou desenvolver a Álgebra Booleana por conceitos próprios. Em 1938, Claude E. Shannon mostrou, em sua tese de mestrado no Departamento de Engenharia Elétrica do MIT (Massachusetts Institute of Technology), a aplicação da Álgebra de Boole na análise de circuitos de relés, usando-a com rara elegância, o que serviu de base para o desenvolvimento da teoria dos interruptores. (DAGHLIAN, 1995, p. 17-18)

Completaremos nossa contextualização do surgimento e do florescimento da Lógica, apresentando alguma sua classificação. Alguns autores, entre eles Abar (2004), costumam dividir o estudo da Lógica em *Lógica Indutiva*, útil no estudo da teoria da probabilidade; e *Lógica Dedutiva*. Esta pode ser dividida em:

- **LÓGICA CLÁSSICA**: considerada como o núcleo da lógica dedutiva. é regida basicamente pelos princípios da *identidade*, da *contradição* e do *terceiro excluído*.
- **LÓGICAS COMPLEMENTARES DA CLÁSSICA**: complementam de algum modo a Lógica Clássica, estendendo o seu domínio. Como exemplo temos lógicas modais, deônticas, epistêmicas, etc.
- **LÓGICAS NÃO-CLÁSSICAS**: caracterizadas por derrogarem algum ou alguns dos princípios da Lógica Clássica. Exemplos: paracompletas e intuicionistas (derrogam o princípio do terceiro excluído); paraconsistentes (derrogam o princípio da contradição); não-aléticas (derrogam o princípio do terceiro excluído e o da contradição); não-reflexivas (derrogam o princípio da identidade); probabilísticas, polivalentes, fuzzy, etc.

Até aqui, vimos um pouco da perspectiva histórica da Lógica Matemática, seu surgimento, e conhecemos algumas das pessoas que deram contribuições para o seu desenvolvimento. No tópico seguinte, veremos por que a linguagem matemática adota certo formalismo e por que ela necessita desse formalismo.

TÓPICO 2

Elementos da lógica matemática

Objetivos

- Reconhecer a importância de uma linguagem formal para a Matemática
- Definir e identificar proposições e conectivos
- Conhecer os princípios que regem a Lógica Proposicional

2.1 INTRODUÇÃO

Neste tópico, além de perceber a importância de uma linguagem formal para a Matemática, você verá a definição de *proposição*, um conceito fundamental para a Matemática, e conhecerá os *conectivos* para compor novas proposições a partir de outras.

Para compreendermos bem as definições, os lemas e os teoremas que constituem as teorias matemáticas, é imprescindível que utilizemos uma linguagem mais precisa e rigorosa do que a que usamos na vida corrente. A aquisição desse hábito pode ser bastante facilitada com algumas noções e símbolos da Lógica Matemática.

Na Matemática, ou em qualquer campo científico, estamos interessados em saber quando uma afirmação (ou proposição) é verdadeira ou não em um determinado contexto. A linguagem usada na Matemática compreende *designações* (também chamados nomes ou termos) e *proposições* (ou frases). As designações servem para definir ou denominar determinados objetos matemáticos, como ponto, reta, plano, funções, figuras geométricas, equações, entre outros. Já as proposições exprimem afirmações que podem ser verdadeiras ou falsas. Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 1

1. Existem sacis ou não existem sacis.
2. O número de alunos da UAB é divisível por 3.
3. Todos os alunos de Matemática são malucos e alguns alunos de Matemática não são malucos.

Não é necessário muito esforço, nem uma teoria especial para afirmarmos que a alternativa 1 é verdadeira, a 2 pode ser verdadeira ou não, e 3 é falsa, pois enseja uma contradição.

Porém, antes de respondermos se uma afirmação é verdadeira ou falsa, devemos verificar se a frase está gramaticalmente correta e se faz sentido. Vejamos agora estes exemplos:

Exemplo 2

1. Uma criança levou sua filha idosa para passear em Marte.
2. Os mortos gritam ruidosamente à sombra das flores.
3. Jantamos pontos, retas e planos.

É óbvio que dentro da linguagem poética são permitidos certos "desvios" ou *nonsense*, a chamada licença poética. Mas, dentro da Matemática, por empregarmos linguagem objetiva (e não a subjetiva, como na Literatura), precisamos adotar um formalismo e uma precisão ao escrevermos. Assim, evitaremos que a teoria incorra em contradições, pois, historicamente, foi isso o que ocorreu. A teoria desenvolvendo-se sem muita preocupação formal, até que surgiram alguns paradoxos, o que trouxe certa crise à Matemática.

A partir da necessidade de se estabelecer o que é verdadeiro ou não, de forma a evitar contradições, surgiu um conjunto de axiomas, isto é, princípios evidentes que dispensam demonstração, bem como um conjunto de regras que nos permitem deduzir verdades (como teoremas, lemas) das nossas hipóteses originais.

Não buscamos a verdade absoluta, isto é, a verdade universal, do ponto de vista platônico, que se aplicaria a todo contexto. Isso não existe em nenhuma ciência, nem na Física, Biologia, Química, Psicologia e, muito menos, na Matemática. O que buscamos são paradigmas, isto é, modelos que expliquem razoavelmente os fatos estudados por nós. Um fato pode ser explicado satisfatoriamente à luz de determinada teoria, que pode ser inconsistente para a explicação de outros fatos. Podemos citar como exemplo as leis de Newton, que servem perfeitamente para explicar um choque entre dois veículos em uma estrada, mas se mostram insuficientes para explicar o choque entre partículas subatômicas.

É lógico que nos interessa que as conclusões de nosso estudo possam ser aplicadas à linguagem natural. Para tanto, a linguagem que adotaremos para fazer a nossa análise deve ser uma versão simplificada da linguagem natural.

ATENÇÃO!

A linguagem da Lógica Matemática é um recurso para estudar e compreender a lógica de nossa linguagem natural.

Escolhemos como elementos básicos da linguagem as sentenças, e definiremos regras para determinar como elas podem ser formadas a partir de sentenças mais simples. A primeira noção que devemos ter na formalização da nossa linguagem é a de proposição.

2.2 DEFINIÇÃO DE PROPOSIÇÃO

DEFINIÇÃO 1

Proposição é toda sentença (conjunto de palavras ou símbolos) declarativa, afirmativa que expresse um pensamento de sentido completo cujo conteúdo (asserção) pode ser tomado como verdadeiro ou falso.

Uma proposição pode ser escrita na linguagem usual ou na forma simbólica. Vejamos alguns exemplos de proposições:

EXEMPLO 3

1. A lua é quadrada.
2. A neve é branca.
3. $\left(e^{\pi}\right)^2 \neq e^{2\pi}$
4. $\text{sen } \pi = 1$

Uma proposição é necessariamente dada por uma sentença afirmativa, pois não poderíamos atestar a verdade diante de sentenças interrogativas ou exclamativas, como por exemplo:

EXEMPLO 4

1. Os réus foram condenados?
2. Venha à nossa festa!

Em nenhum desses casos, faz sentido questionar se é uma sentença verdadeira ou falsa.

Agora que conhecemos o que é uma proposição, caracterizada por suas qualidades e os princípios básicos da Lógica Proposicional, daremos a definição de *valor lógico* de uma proposição.

2.3 DEFINIÇÃO DE VALOR LÓGICO DE UMA PROPOSIÇÃO

DEFINIÇÃO 2

Denomina-se valor lógico de uma proposição a verdade (que representamos por V), se a proposição for verdadeira, ou a falsidade (representada por F), se a proposição for falsa.

Indicaremos o valor lógico de uma proposição p por V(p). Desse modo, exprimimos que a proposição p é verdadeira escrevendo V(p) = V e que p é falsa escrevendo V(p) = F.

Exemplo 5

Considere as afirmações (proposições);

1. Os homens são mortais.
2. As pedras são seres vivos.

É fácil constatar que o valor lógico da proposição (1) é verdadeiro (V) e o da proposição (2) é falso (F).

Para a Matemática, é preciso que as asserções sejam claras, objetivas, e que algumas regras sejam previamente conhecidas. Podemos estabelecer uma analogia com um jogo. Para entrarmos em um jogo (xadrez, futebol, etc.), seja ele qual for, temos que conhecer as regras (ou leis) que regulam esse jogo. Da mesma forma, na Lógica Matemática, temos os seguintes princípios (ou axiomas), que funcionam como regras fundamentais:

→ **Princípio da não-contradição**: uma proposição não pode ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo.

→ **Princípio do terceiro excluído**: toda proposição ou é verdadeira ou é falsa. Verifica-se sempre uma dessas possibilidades e nunca uma terceira.

Os princípios da não-contradição e do terceiro excluído nos permitem afirmar que as proposições podem ser *simples* ou *compostas*. A caracterização de cada uma pode ser vista nas definições abaixo.

2.4 DEFINIÇÃO DE PROPOSIÇÃO SIMPLES

DEFINIÇÃO 3

Proposição simples é aquela que não contém nenhuma outra proposição como parte integrante de si mesma. É também chamada proposição atômica ou átomo.

Indicaremos as proposições simples por letras minúsculas (p, q, r, s ...). Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 6

1. p: a lua é plana.
2. q: $\operatorname{sen} \pi = 0$.
3. r: o homem é mortal.

2.5 DEFINIÇÃO DE PROPOSIÇÃO COMPOSTA

DEFINIÇÃO 4

Proposição composta é aquela formada pela composição de duas ou mais proposições. É também chamada proposição molecular ou molécula.

Indicaremos as proposições compostas por letras maiúsculas (P, Q, R, S ...) . Quando desejarmos destacar ou explicitar que uma dada proposição composta P é formada pela combinação das proposições simples p, q, r, ..., escreveremos: P(p, q, r, ...). Vejamos alguns exemplos:

VOCÊ SABIA?

As proposições componentes de uma proposição composta podem ser, elas mesmas, proposições compostas.

SAIBA MAIS!

As proposições compostas são chamadas também *fórmulas proposicionais* ou simplesmente *fórmulas*.

Exemplo 7

1. P: o sol brilha e a lua reflete a luz.
2. Q: Ceará ganha ou o Ceará perde.
3. R: se $\sqrt{3} < \pi$ e o número 8 é cubo perfeito, então 25 é um número primo.

Note que cada proposição acima contém outras proposições como suas partes integrantes. As proposições componentes da proposição R são t: $\sqrt{3} < \pi$; u: o número 8 é cubo perfeito; e v: 25 é um número primo.

Ao proferimos um discurso na língua natural, necessitamos de conexões apropriadas de ideias. A materialização dessas conexões é realizada por partículas da linguagem comumente chamadas *conectivos*. De modo análogo, na Matemática, precisamos de conectivos que interliguem sentenças para gerar sentenças mais complexas (mais ricas em significados).

Na próxima definição, apresentaremos os principais tipos de conectivos usados na Lógica. Você terá a oportunidade de reconhecê-los nas diversas situações e, posteriormente, conhecerá as regras para determinar os valores lógicos das proposições compostas formuladas com esses conectivos a partir dos valores lógicos das proposições componentes.

2.6 DEFINIÇÃO DE CONECTIVOS

DEFINIÇÃO 5

Conectivos são as palavras que usamos para formar novas proposições a partir de outras. Os principais conectivos são as palavras (ou termos): "e", "ou", "não", "se ... então", e "... se e somente se ...".

Na maioria dos casos, os conectivos ligam duas ou mais proposições (ou afirmações). Vejamos alguns exemplos, em que estão destacados os conectivos usados para compor a proposição.

EXEMPLO 8

a. O número 2 é par **e** 5 é ímpar.
b. Um triângulo ABC é escaleno **ou** isósceles.
c. Neste ano, **não** houve inverno (esta proposição deriva da proposição "Neste ano, houve inverno").
d. **Se** sabe Matemática, **então** faça Medicina.
e. Um triângulo é retângulo **se, e somente se**, satisfaz o Teorema de Pitágoras.

Como podemos observar neste tópico, as proposições serão o objeto principal de estudo da Lógica Matemática.

Nesta aula, fizemos uma breve introdução ao estudo da Lógica, conhecendo um pouco de sua história e percebendo sua importância não apenas para a própria Matemática como também para outras áreas. Vimos ainda a necessidade de uma linguagem formal para a Matemática e apresentamos os elementos básicos para essa linguagem. Na próxima aula, faremos uma introdução ao cálculo proposicional.

VOCÊ SABIA?

Você pode aprofundar seus conhecimentos consultando as referências que citamos e/ou visitando páginas da *internet*. Abaixo listamos algumas páginas interessantes que podem ajudá-lo nessa pesquisa. Bons estudos!

1. http://www.pucsp.br/~logica/
2. http://wwmat.mat.fc.ul.pt/~jnsilva/logica97/logica97.html
3. http://turnbull.mcs.st-and.ac.uk/~history/

AULA 2 — Operações do cálculo proposicional

Olá, na aula anterior, vimos a necessidade da Matemática em dispor de uma linguagem formal e tivemos o primeiro contato com os elementos básicos dessa linguagem: as proposições e os conectivos.

Nesta aula, iniciaremos nosso estudo sobre cálculo proposicional. Introduziremos as principais operações deste cálculo e estabeleceremos algumas relações dessas operações com a álgebra dos conjuntos. Conheceremos tabelas-verdade e diagramas de árvore e aprenderemos a construir as tabelas-verdade das proposições compostas obtidas do cálculo com proposições.

Objetivos

- Conhecer as principais operações do cálculo proposicional
- Determinar o valor lógico de proposições compostas
- Estabelecer propriedades das operações
- Relacionar a álgebra das proposições com a álgebra dos conjuntos

TÓPICO 1

Tabelas-verdade das proposições

Objetivos

- Aplicar os princípios fundamentais da Lógica Proposicional
- Conhecer e formular diagramas de árvore e tabelas-verdade
- Determinar o número de linhas de uma tabela-verdade

1.1 INTRODUÇÃO

Neste tópico, veremos como construir as tabelas-verdade das proposições. Essas tabelas nos possibilitarão determinar os valores lógicos das proposições para cada atribuição de valores lógicos às suas proposições componentes.

1.2 CONSTRUÇÃO DE TABELAS-VERDADES DAS PROPOSIÇÕES

Para a construção de tais tabelas, necessitaremos de dois princípios básicos. O primeiro é o princípio do terceiro excluído, que já conhecemos, e diz que toda proposição ou é verdadeira (V) ou é falsa (F). O segundo enunciaremos a seguir.

Indicaremos todas as possibilidades de valores lógicos para uma dada proposição, correspondentes a cada atribuição de valores lógicos às suas proposições simples componentes, por meio de tabelas denominadas "tabelas-verdade" ou, alternativamente, usando o que chamamos de "diagrama de árvore". Vejamos alguns casos:

GUARDE BEM ISSO!

O valor lógico de uma proposição composta qualquer depende unicamente dos valores lógicos das proposições simples que a compõem, ficando por eles univocamente determinado.

I) Para uma proposição simples a

Neste caso, pelo princípio do terceiro excluído, temos 2 possibilidades para o valor lógico de **a**. Cada uma dessas possibilidades está representada na tabela-verdade de **a** (Figura 3) que terá duas linhas.

Proposição simples a

Tabela Verdade

	a
1	V
2	F

Diagrama de Árvores

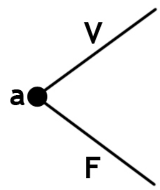

Figura 3 – Tabela-verdade e Diagrama de Árvore de uma proposição simples a

Vejamos agora como ficam essas representações para proposições compostas.

ii) Para uma proposição A composta por duas proposições simples a e b, representada por A(a,b)

Neste caso, devemos examinar cada par possível de valores lógicos para as proposições simples **a** e **b**, para determinar o valor lógico da proposição composta **A**. Temos um total de $2 \times 2 = 2^2 = 4$ possibilidades. Cada uma dessas possibilidades está representada na tabela-verdade de **A** (Figura 4) que terá 4 linhas. Nela, os valores V e F se alternam de dois em dois para a proposição **a** e de um em um para a proposição **b**.

Proposição composta A(a,b)

Tabela Verdade

	a	b
1	V	V
2	V	F
3	F	V
4	F	F

Diagrama de Árvore

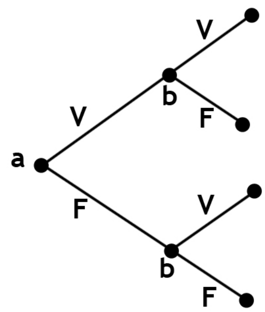

Figura 4 – Entradas da Tabela-verdade e do Diagrama de Árvore de uma proposição composta A (a,b)

iii) Para uma proposição A composta por três proposições simples a, b e c, representada por A (a,b,c)

Neste caso, devemos examinar cada terna possível de valores lógicos para as proposições simples **a**, **b** e **c**, para determinar o valor lógico da proposição composta **A**. Temos um total de $2 \times 2 \times 2 = 2^3 = 8$ possibilidades. Cada uma dessas possibilidades está representada na tabela-verdade de **A** (Figura 5) que terá 8 linhas. Nela, os valores V e F se alternam de quatro em quatro para a proposição **a**, de dois em dois para a proposição **b** e de um em um para a proposição **c**.

Proposição composta A(a,b,c)

Tabela Verdade

	a	b	c
1	V	V	V
2	V	V	F
3	V	F	V
4	V	F	F
5	F	V	V
6	F	V	F
7	F	F	V
8	F	F	F

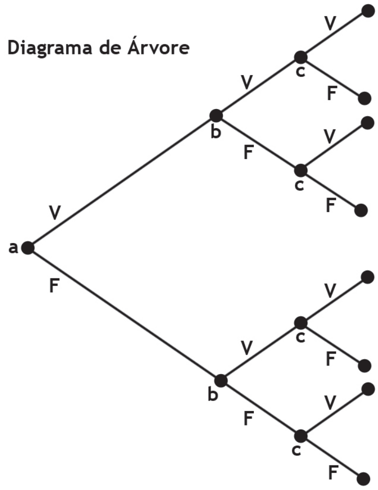

Figura 5 – Entradas da Tabela-verdade e do Diagrama de Árvore de uma proposição composta A(a,b,c)

Agora que você está mais familiarizado com tais representações, usando um raciocínio análogo, não será difícil perceber a possibilidade seguinte.

iv) No caso geral de uma proposição A composta por n proposições simples $a_1, a_2, \ldots, a_n$, representada por $\mathbf{A}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$

Neste caso, devemos examinar cada *n*–upla possível de valores lógicos para as proposições simples $a_1, a_2, \ldots, a_n$, para determinar o valor lógico da proposição composta **A**. Temos um total de 2^n possibilidades, ou seja, a tabela-verdade de **A** terá 2^n linhas. Nela, os valores V e

VOCÊ SABIA?

Tabelas-verdade derivam do trabalho de Gottlob Frege, Charles Peirce e outros da década de 1880, e tomaram a forma atual em 1922 através dos trabalhos de Emil Post e Ludwig Wittgenstein. O *Tractatus Logico-Philosophicus*, de Wittgenstein, utilizava-as para classificar funções verdades em uma série. A vasta influência desse trabalho levou, então, à difusão do uso de tabelas-verdade.

F se alternam de 2^{n-1} em 2^{n-1} para a proposição a_1, de 2^{n-2} em 2^{n-2} para a proposição a_2 e, sucessivamente, até de um em um para a proposição a_n.

Para que você não fique confuso quando estiver complementando seus estudos com a consulta a outros livros, devemos fazer um pequeno esclarecimento quanto à notação.

Por uma questão didática, daremos preferência ao trabalho com as tabelas-verdade em vez dos diagramas de árvore.

No próximo tópico, estudaremos, de modo preciso e criterioso, as principais regras do cálculo proposicional.

ATENÇÃO!

Alguns livros utilizam para os valores lógicos **V** e **F**, respectivamente, os valores **1** e **0**. Assim, para uma proposição **p** qualquer, temos:

$$V(p) = V = 1 \text{ ou } V(p) = F = 0.$$

TÓPICO 2

Operações lógicas sobre proposições

Objetivos

- Conhecer as principais operações com proposições
- Construir proposições compostas por meio dos conectivos da Lógica
- Construir tabelas-verdade de proposições compostas

2.1 INTRODUÇÃO

Neste tópico, definiremos as principais operações lógicas com proposições e construiremos as tabelas-verdade dessas operações. Estas tabelas nos possibilitarão determinar os valores lógicos das proposições compostas resultantes de cada operação para cada atribuição de valores lógicos às suas proposições componentes.

Você já deve ter percebido (reveja na Aula 1) que as proposições se ligam através de expressões chamadas *conectivos* para formar novas proposições. Os conectivos são muito importantes nas operações lógicas sobre proposições. Nessas operações, os *operadores*, também chamados *operadores lógicos*, são os conectivos, enquanto os *operandos* são as proposições. No quadro 1, listamos as principais ideias veiculadas por conectivos, bem como os símbolos usados para representá-las.

Conectivo	Símbolo
Negação	$\sim$
Conjunção	$\wedge$
Disjunção	$\vee$
Condicional	$\rightarrow$
Bicondicional	$\leftrightarrow$

Quadro 1 – símbolo dos conectivos

As operações obedecem a algumas regras de um tipo de cálculo, chamado de cálculo proposicional, que são semelhantes às regras sobre conjuntos (como interseção, união, etc.). Vamos, agora, conhecer cada uma das operações definidas por meio dos símbolos acima e construir as tabelas-verdade das proposições compostas resultantes.

2.2 NEGAÇÃO DE UMA PROPOSIÇÃO

DEFINIÇÃO 1

A negação de uma proposição p é a proposição "não p", que representaremos por "~ p", cujo valor lógico é o oposto ao da proposição p.

A tabela-verdade de ~ p é bastante simples. Vejamos:

p	~ p
V	F
F	V

Note que o valor lógico de ~ p é F quando o valor lógico de p é **V;** e é **V** quando o valor lógico de p é **F**. Considerando as igualdades:

~V = F , ~F = V,

temos V(~ p) = ~ V(p). Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 1

a. p: Fortaleza é a capital do Ceará.

~ p: Fortaleza não é a capital do Ceará.

Note que V(p) = V e V(~ p) = F e a relação V(~ p) = ~ V(p) é verificada, pois V(~ p) = F = ~V = ~ V(p).

b. q: $sen\left(\pi/2\right) = 0$

~ q: $sen\left(\pi/2\right) \neq 0$

Então, V(q) = F e V(~ q) = V.

Na linguagem do dia a dia, a negação de uma afirmação (pelo menos nos casos mais simples) costuma ser feita "antepondo" o advérbio não ao verbo da proposição, como em (a) do Exemplo 1. Mas há outras formas de construir a negação: antepondo expressões como "não é verdade que" ou "é falso que" à proposição que se deseja negar. Veja estas formas no exemplo seguinte.

Exemplo 2

r: Pedro é eletricista.

~ r: Não é verdade que Pedro é eletricista.

ou

~ r: É falso que Pedro é eletricista.

Porém atenção: devemos tomar cuidado ao formar a negação de proposições *quantificadas* como aquelas que iniciam com os *quantificadores* "todo" ou "existe".

Você não precisa se preocupar, entretanto, com a negação de proposições quantificadas agora. Elas serão tratadas posteriormente em um momento conveniente.

Esperamos que tenha ficado claro para você o que é a negação de uma proposição, como formar uma negação e, principalmente, como construir a tabela-verdade correspondente. A seguir, definiremos a conjunção de duas proposições.

ATENÇÃO!

A negação de "todo homem é mortal" não é "todo homem é imortal" e nem "todo homem não é mortal". E sim, "existe homem imortal" ou "nem todo homem é mortal".

SAIBA MAIS

A negação é uma operação *unária*, ou seja, é realizada sobre um único operando. As demais operações que definiremos serão todas *binárias*, definidas sobre dois operandos.

2.3 CONJUNÇÃO DE PROPOSIÇÕES

DEFINIÇÃO 2

A conjunção de duas proposições p e q é a proposição "p e q", que representaremos por "p ∧ q", cujo valor lógico será a verdade (V) se ambas as proposições p e q forem verdadeiras e será a falsidade (F) nos outros casos.

A tabela-verdade de p ∧ q é:

p	q	p ∧ q
V	**V**	V
V	**F**	F
F	**V**	F
F	**F**	F

Considerando as igualdades:

$$V \wedge V = V,\ \ V \wedge F = F,\ F \wedge V = F,\ F \wedge F = F,$$

temos $V(p \wedge q) = V(p) \wedge V(q)$. Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 3

a. p: 2 é par

q: $2 < 3$

$p \wedge q$: 2 é par e $2 < 3$

Temos: $V(p) = V$ e $V(q) = V$. Logo, $V(p \wedge q) = V(p) \wedge V(q) = V \wedge V = V$.

b. p: Um quadrado é equilátero

q: 7 é par

$p \wedge q$: Um quadrado é equilátero e 7 é par

Temos: $V(p) = V$ e $V(q) = F$. Logo, $V(p \wedge q) = V(p) \wedge V(q) = V \wedge F = F$.

c. p: ϖ é racional

q: $\sqrt{2}$ é irracional

$p \wedge q$: ϖ é racional e $\sqrt{2}$ é irracional

Temos: $V(p) = F$ e $V(q) = V$. Logo, $V(p \wedge q) = V(p) \wedge V(q) = F \wedge V = F$.

d. p: $\operatorname{sen} 0 > 2$

q: $\varpi > 5$

$p \wedge q$: $\operatorname{sen} 0 > 2$ e $\varpi > 5$

Temos: $V(p) = F$ e $V(q) = F$. Logo, $V(p \wedge q) = V(p) \wedge V(q) = F \wedge F = F$.

Agora, você já conhece a conjunção de duas proposições, sabe obtê-la e construir a tabela-verdade correspondente. Nosso próximo passo será definir a disjunção.

2.4 DISJUNÇÃO DE PROPOSIÇÕES

DEFINIÇÃO 3

A disjunção de duas proposições p e q é a proposição "p ou q", que representaremos por "$p \vee q$", cujo valor lógico será a verdade (V) se pelo menos uma das proposições p e q for verdadeira e será a falsidade (F) se ambas p e q forem falsas.

A tabela-verdade de $p \vee q$ é:

p	q	$p \vee q$
V	**V**	V
V	**F**	V
F	**V**	V
F	**F**	F

Considerando as igualdades:

$$V \vee V = V,\ \ V \vee F = V,\ \ F \vee V = V,\ \ F \vee F = F,$$

temos $V(p \vee q) = V(p) \vee V(q)$. Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 4

a. p: A lua é o nosso satélite natural

q: A Terra é um planeta

$p \vee q$: A lua é o nosso satélite natural ou a Terra é um planeta

Temos: $V(p) = V$ e $V(q) = V$. Logo, $V(p \quad q) = V(p) \quad V(q) = V \quad V = V$.

b. p: 1 é um número natural

q: - 2 é um número natural

$p \vee q$: 1 é um número natural ou - 2 é um número natural

Temos: $V(p) = V$ e $V(q) = F$. Logo, $V(p \vee q) = V(p) \vee V(q) = V \vee F = V$.

c. p: 11 é divisível por 3

q: $5 < 10$

$p \vee q$: 11 é divisível por 3 ou $5 < 10$

Temos: $V(p) = F$ e $V(q) = V$. Logo, $V(p \vee q) = V(p) \vee V(q) = F \vee V = V$.

d. p: Um triângulo é um quadrilátero

q: Todo triângulo é isósceles

$p \vee q$: Um triângulo é um quadrilátero ou todo triângulo é isósceles

Temos: $V(p) = F$ e $V(q) = F$. Logo, $V(p \vee q) = V(p) \vee V(q) = F \vee F = F$.

Você deve ter percebido que não difícil obter a disjunção de duas proposições e que a sua tabela-verdade é fácil de ser construída. Passaremos agora às definições das proposições condicional e bicondicional. Continue atento, pois será necessária bastante atenção para compreendê-las e para a construção das respectivas tabelas-verdade.

2.5 PROPOSIÇÃO CONDICIONAL

DEFINIÇÃO 4

A condicional de duas proposições p e q é a proposição "se p, então q", que representaremos por "$p \to q$", cujo valor lógico é a falsidade (F) quando p for verdadeira e q for falsa e será a verdade (V) nos demais casos.

A tabela-verdade de $p \to q$ é:

p	q	$p \to q$
V	**V**	V
V	**F**	F
F	**V**	V
F	**F**	V

Considerando as igualdades:

$V \to V = V$, $V \to F = F$, $F \to V = V$, $F \to F = V$,

temos $V(p \to q) = V(p) \to V(q)$. Vejamos alguns exemplos.

Você deverá ficar bem atento ao caso em que a proposição condicional é falsa. Guarde bem esse caso, pois será de grande importância quando formos deduzir o valor lógico de proposições condicionais a partir dos valores lógicos das suas proposições componentes.

ATENÇÃO!

A condicional "$p \to q$" é verdadeira sempre que o valor lógico de p é falso, isto é, sempre que temos $V(p) = F$.

Além de "se p, então q", há outras maneiras de se ler a condicional "$p \to q$", a saber:

1. "p é condição suficiente para q"
2. "q é condição necessária para p"

EXEMPLO 5

a. p: Euler morreu cego

q: Pitágoras era filósofo

$p \to q$: Se Euler morreu cego, então Pitágoras era filósofo

Temos: $V(p) = V$ e $V(q) = V$. Logo, $V(p \to q) = V(p) \to V(q) = V \to V = V$.

b. p: A Matemática é uma ciência

q: Geometria não é Matemática

$p \to q$: Se a Matemática é uma ciência, então a Geometria não é Matemática

Temos: V(p) = V e V(q) = F. Logo, V(p → q) = V(p) → V(q) = V → F = F.

c. p: 2 > 5

q: 3 é real

p → q: Se 2 > 5, então 3 é real

Temos: V(p) = F e V(q) = V. Logo, V(p → q) = V(p) → V(q) = F → V = V.

d. p: -1 é um número natural.

q: 3 é um número par.

p → q: se -1 é um número natural, então 3 é um número par.

Temos: V(p) = F e V(q) = F. Logo, V(p → q) = V(p) → V(q) = F → F = V.

Com atenção e alguns exercícios, você aprenderá a reconhecer quando uma proposição condicional é falsa. Se necessário, reveja a definição e a construção da tabela-verdade correspondente. É necessário que você esteja bem seguro e tenha domínio desse conhecimento.

ATENÇÃO!

Uma proposição condicional "p → q" não afirma que a proposição consequente q é deduzida da proposição antecedente p. Portanto, quando se diz, por exemplo:

2 é um número par → os patos nadam

Não se quer dizer, de modo algum, que o fato de patos nadarem é uma consequência do número 2 ser par. Ela afirma unicamente uma relação entre os valores lógicos de p e de q, conforme a tabela-verdade vista anteriormente.

2.6 PROPOSIÇÃO BICONDICIONAL

DEFINIÇÃO 5

A bicondicional de duas proposições p e q é a proposição "p se, e somente se, q", que representaremos por "p ↔ q", cujo valor lógico é a verdadeiro (V) quando p e q têm o mesmo valor lógico, ou seja, se p e q são ambas verdadeiras, ou ambas falsas, e a falsidade (F) nos demais casos, ou seja, quando os valores lógicos de p e q são opostos.

A tabela-verdade de p ↔ q é:

p	q	p ↔ q
V	**V**	V
V	**F**	F
F	**V**	F
F	**F**	V

SAIBA MAIS!

A bicondicional "$p \leftrightarrow q$" é verdadeira somente quando também são verdadeiras as duas condicionais "$p \rightarrow q$" e "$q \rightarrow p$".

GUARDE BEM ISSO!

A bicondicional "$p \leftrightarrow q$" é verdadeira sempre que $V(p) = V(q)$ e é falsa sempre $V(p) \neq V(q)$.

Considerando as igualdades:

$V \leftrightarrow V = V$, $V \leftrightarrow F = F$, $F \leftrightarrow V = F$, $F \leftrightarrow F = V$,

temos $V(p \leftrightarrow q) = V(p) \leftrightarrow V(q)$. Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 6

a) p: O futebol é uma paixão brasileira

q: A bola de futebol é redonda

$p \leftrightarrow q$: O futebol é uma paixão brasileira se, somente se, a bola de futebol for redonda

Temos: $V(p) = V$ e $V(q) = V$. Logo, $V(p \leftrightarrow q) = V(p) \leftrightarrow V(q) = V \leftrightarrow V = V$.

b) p: $\varpi > 3$

q: $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

$p \leftrightarrow q$: $\pi > 3$ se, somente se, $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

Temos: $V(p) = V$ e $V(q) = F$. Logo, $V(p \leftrightarrow q) = V(p) \leftrightarrow V(q) = V \leftrightarrow F = F$.

c) p: Um triângulo é um quadrilátero.

q: Um quadrado é um quadrilátero.

$p \leftrightarrow q$: Um triângulo é um quadrilátero se, somente se, um quadrado for um quadrilátero.

Temos: $V(p) = F$ e $V(q) = V$. Logo, $V(p \leftrightarrow q) = V(p) \leftrightarrow V(q) = F \leftrightarrow V = F$.

d) p: 2 é ímpar.

q: 3 é par.

$p \leftrightarrow q$: 2 é ímpar se, somente se, 3 for par.

Temos: $V(p) = F$ e $V(q) = F$. Logo, $V(p \leftrightarrow q) = V(p) \leftrightarrow V(q) = F \leftrightarrow F = V$.

Além de "p, se e somente se, q", há outras maneiras de se ler a bicondicional "$p \leftrightarrow q$", a saber:

1. "p é condição necessária e suficiente para q"
2. "q é condição necessária e suficiente para p"

Neste tópico, você conheceu as proposições compostas obtidas com as principais operações do cálculo proposicional e aprendeu a construir as suas tabelas-verdade. Agora você deve estar preparado para a construção de tabelas-verdade de proposições compostas mais complexas obtidas a partir da combinação de várias operações. Essa será uma tarefa para nossas próximas aulas.

SAIBA MAIS

Você pode continuar aprendendo um pouco mais sobre o conteúdo desta aula. Para isso, consulte as referências que citamos e/ou acesse páginas relacionadas da *internet*. Algumas páginas interessantes que poderão ajudá-lo estão listadas abaixo. Bons estudos!

http://www.pucsp.br/~logica/

http://wwmat.mat.fc.ul.pt/~jnsilva/logica97/logica97.html

http://rogesantana.vilabol.uol.com.br/modulo_1/Logos1.htm#roge05

AULA 3 | Construções de tabelas-verdade

Caro(a) aluno(a),

Na Aula 2, aprendemos a construir as tabelas-verdade das proposições compostas obtidas das principais operações do cálculo com proposições. Mais precisamente, construímos a tabela-verdade da negação, proposição formada de uma proposição simples pelo conectivo “não”, e as tabelas-verdade das proposições compostas formadas por duas proposições simples ligadas pelos conectivos “e”, “ou”, “se então”, “se e somente se”.

Agora, você já está apto a partir para construções de tabelas-verdade de proposições mais complexas. Tais proposições são obtidas pela combinação de mais de um conectivo e, como sabemos, suas tabelas-verdade nos possibilitarão determinar seus valores lógicos para cada atribuição de valores lógicos às suas proposições componentes. Bom trabalho a todos!

Objetivos

- Construir proposições compostas de várias proposições
- Determinar o valor lógico de proposições compostas
- Construir tabelas-verdade
- Conhecer tautologias, contradições e contingências

TÓPICO 1

Construindo proposições compostas

Objetivos

- Combinar conectivos para compor proposições
- Relacionar número de proposições simples componentes de uma proposição composta e número de linhas de sua tabela-verdade

1.1 INTRODUÇÃO

Recorde as principais operações do cálculo proposicional (negação, conjunção, disjunção, condicional e bicondicional) estudadas na Aula 2. Com elas, obtemos novas proposições (ditas compostas das proposições dadas) pela combinação de proposições por meio de um único conectivo lógico, em geral, mais complexas que as proposições originais.

É natural, agora, que pensemos em construir mais proposições compostas a partir de outras por combinações dos conectivos. Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 1:

Sejam p, q, r e s proposições simples. São proposições compostas obtidas pela combinação de dois ou mais conectivos:

$$P(p,q) = \sim(p \vee q)$$

$$Q(p,q) = \sim p \wedge (p \leftrightarrow q)$$

$$R(p,q,r) = (p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)$$

$$S(p,q,r,s) = (p \wedge q) \leftrightarrow (r \vee s)$$

Evidentemente, nada impede que as componentes de uma proposição composta sejam, elas mesmas, proposições compostas, como veremos no exemplo a seguir.

Guarde bem isso!

O valor lógico de sentenças compostas é fortemente determinado pelos valores lógicos de suas componentes, pelo modo como estas se combinam (ou seja, depende também do conectivo que as liga).

Exemplo 2:

Dada a proposição P composta das

proposições simples p_1 e q_1, e Q composta das proposições simples p_2, q_2 e r_2, ou seja, dadas $P(p_1, q_1)$ e $Q(p_2, q_2, r_2)$, podemos construir um proposição α pela combinação das proposições P e Q. Temos, então, $\alpha(P,Q)$ ou, mais especificamente,

$$\alpha(P(p_1, q_1), Q(p_2, q_2, r_2)).$$

1.2 TEOREMA

Para não perder de vista nossa principal meta, a determinação dos valores lógicos de proposições, devemos ficar atentos ao modo como chegamos a essa determinação.

Do que vimos, podemos sempre pensar numa proposição composta *P* qualquer como obtida pela combinação de uma quantidade finita *n* de proposições simples p_1, p_2, ..., p_n, ou seja, $P(p_1, p_2, ..., p_n)$. Considerando ainda que o número de modos de combinar as proposições p_1, p_2, ..., p_n, por meio dos conectivos, para obter *P* seja finito e lembrando que, pelo Princípio do Terceiro Excluído, só há duas possibilidades para os valores lógicos de cada proposição p_i, deduzimos que são também finitas as possibilidades de se combinarem os valores lógicos das proposições simples para determinar o valor lógico correspondente da proposição composta. Tais possibilidades podem ser organizadas em tabelas especiais que recebem a denominação de *tabelas-verdade*.

Podemos construir a tabela-verdade de qualquer proposição. O número de linhas da tabela é determinado pelo número de proposições simples componentes da proposição dada. Chegamos assim ao seguinte teorema:

TEOREMA 1

A tabela-verdade de uma proposição composta de n proposições simples componentes é constituída de 2^n linhas.

Não há uma regra geral para a construção de tabelas-verdade de proposições compostas. Apresentaremos aqui a forma descrita em Alencar Filho (2002, p.30) para construir as colunas da tabela correspondentes às proposições simples componentes:

> Para a construção prática da tabela-verdade de uma proposição composta, começa-se por contar o número de proposições simples que a integram. Se há n proposições simples componentes: p_1, p_2, ..., p_n, então a tabela-verdade contém 2^n linhas. Posto isto, à 1ª proposição simples p_1 atribuem-se $2^n / 2 = 2^{n-1}$ valores V seguidos

de 2^{n-1} valores F; à 2ª proposição simples p_2 atribuem-se $2^n/4 = 2^{n-2}$ valores V, seguidos de 2^{n-2} valores F, seguidos de 2^{n-2} valores V, seguidos, finalmente, de 2^{n-2} valores F; e assim por diante. De modo genérico, a k-ésima proposição simples p_k $(k \leq n)$ atribuem-se alternadamente $2^n/2^k = 2^{n-k}$ valores V seguidos de igual número de valores F.

Para fixar melhor, vejamos como seriam os agrupamentos de V e F nas colunas da tabela correspondentes às proposições simples para o caso, por exemplo, de uma proposição composta por 4 proposições simples componentes p_1, p_2, p_3 e p_4:

A tabela-verdade contém $2^4 = 16$ linhas, e os grupos de valores V e F se alternam de 8 em 8 para a 1ª proposição simples p_1, de 4 em 4 para a 2ª. proposição simples p_2, de 2 em 2 para a 3ª proposição simples p_3, e, finalmente, de 1 em 1 para a 4ª proposição simples p_4.

1.3 PASSOS PARA CONSTRUÇÃO DE TABELAS-VERDADE DAS PROPOSIÇÕES COMPOSTAS

Para a construção da tabela-verdade de uma proposição composta dada, devemos ainda segundo Daghlian (1995):

→ Observar a precedência entre os conectivos, ou seja, determinar a forma das proposições que ocorrem na proposição original.

→ Aplicar as definições das operações lógicas necessárias.

Até agora, sabemos construir as colunas correspondentes às proposições simples componentes de uma proposição composta *P*, as quais chamaremos *entradas* da tabela. Precisamos de um procedimento para construir uma coluna com os valores lógicos correspondentes da proposição *P*, ou seja, para construir a *saída* da tabela. Para tanto, construiremos, a partir das tabelas-verdade das operações, colunas intermediárias (tantas quanto forem necessárias) para proposições compostas que são "pedaços" de *P* até conseguirmos obter a coluna de *P*. Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 3:

Construa a tabela-verdade da proposição composta $R(p,q) = \sim(\sim p \vee q)$.

p	q	$\sim p$	$\sim p \vee q$	$R(p,q) = \sim(\sim p \vee q)$
V	V	F	V	**F**
V	F	F	F	**V**
F	V	V	V	**F**
F	F	V	V	**F**

Considerando que R é composta de 2 proposições simples componentes p e q, nossa tabela terá $2^2 = 4$ linhas. Note que, em primeiro lugar, formamos o par de colunas correspondentes às duas proposições simples componentes, ou seja, escrevemos as "entradas" da tabela. Os grupos de valores V e F se alternam nessas colunas de 2 em 2 para a 1ª proposição simples p e de 1 em 1 para a 2ª proposição simples q. Em seguida, recorrendo às definições das operações de negação e disjunção, formamos a coluna para $\sim p$. Depois, formamos a coluna para $\sim p \vee q$. Finalmente, formamos a coluna relativa aos valores lógicos da proposição composta dada R, ou seja, determinamos a "saída" da tabela (destacada em negrito).

Exemplo 4:

Construa a tabela-verdade da proposição composta $S(p,q,r) = (p \vee q) \rightarrow (q \wedge r)$.

p	q	r	$p \vee q$	$q \wedge r$	$(p \vee q) \rightarrow (q \wedge r)$
V	V	V	V	V	**V**
V	V	F	V	F	**F**
V	F	V	V	F	**F**
V	F	F	V	F	**F**
F	V	V	V	V	**V**
F	V	F	V	F	**F**
F	F	V	F	F	**V**
F	F	F	F	F	**V**

Considerando que S é composta de 3 proposições simples componentes p, q e r, nossa tabela terá $2^3 = 8$ linhas. Note que, em primeiro lugar, construímos as "entradas" da tabela, ou seja, formamos as colunas correspondentes às três proposições simples componentes. Os grupos de valores V e F se alternam nessas colunas de 4 em 4 para a 1ª proposição simples p, e de 2 em 2 para a 2ª proposição simples q, e de 1 em 1 para a 3ª proposição r. Em seguida, recorremos às tabelas-verdade das operações de conjunção e disjunção para formar a quarta e a quinta colunas. Finalmente, usando a tabela-verdade da operação de condicional, determinamos a "saída" da tabela (destacada em negrito), ou seja, formamos a coluna relativa aos valores lógicos da proposição composta dada S.

Neste tópico, revimos a determinação do número de linhas de uma tabela-verdade e descrevemos um procedimento para a construção das tabelas-verdade de proposições qualquer. No tópico seguinte, teremos a oportunidade de ampliar esses conhecimentos construindo as tabelas-verdade de várias proposições e poderemos observar algumas relações entre certas proposições compostas. Então, prossigamos ...

TÓPICO 2

Construindo tabelas-verdade: exemplos

OBJETIVOS

- Construir as tabelas-verdade de várias proposições compostas
- Normatizar o uso de parênteses
- Deduzir os valores lógicos de proposições compostas
- Relacionar certar proposições compostas

2.1 INTRODUÇÃO

Neste tópico, construiremos as tabelas-verdade de vários exemplos de proposições compostas. Este será um importante passo para que, posteriormente, possamos verificar a validade de *argumentos*. Será também um exercício interessante para que possamos observar certas relações entre algumas proposições compostas.

Você já deve ter percebido a utilidade das tabelas-verdade na determinação do valor lógico das proposições. Devemos enfatizar que uma tabela-verdade é uma forma muito útil e prática de representar uma função na *álgebra booleana*. Ela relaciona todas as combinações possíveis para os valores das variáveis de entrada da função, com o valor correspondente da saída da *função booleana*. Em um texto extraído de Daghlian (1995), vimos um pouco sobre a álgebra booleana e sua aplicação em circuitos elétricos. Releia este texto e enriqueça seus conhecimentos.

SAIBA MAIS

A *álgebra booleana* foi criada pelo matemático inglês George Boole (1815-1864). Ela consiste no uso de técnicas algébricas para lidar com expressões cujas variáveis trabalham somente com dois valores: falso (0) ou verdadeiro (1). Atualmente, todos os sistemas digitais são baseados nela, relacionando os níveis lógicos 0 (falso) e 1 (verdadeiro) com a passagem ou ausência de corrente elétrica. O fato de as constantes e variáveis poderem ter apenas dois valores possíveis, 0 ou 1, caracteriza-se como a principal diferença entre a álgebra booleana e a álgebra convencional. Em circuitos elétricos, as variáveis booleanas (variáveis da álgebra booleana) podem representar o nível de tensão presente em um determinado ponto do circuito.

2.2 USO DE PARÊNTESES E A ORDEM DE PRECEDÊNCIA DAS OPERAÇÕES

Antes de prosseguirmos com os exemplos, vamos fazer algumas considerações importantes sobre o uso de parênteses e sobre a ordem de precedência das operações.

→ A colocação de parênteses na simbolização das proposições deve ser feita para evitar ambiguidades. A proposição $p \vee q \wedge r$, por exemplo, sem a presença de parênteses fica ambígua. Ela dá origem, pela colocação de parênteses, a duas proposições:

$$\text{i) } (p \vee q) \wedge r \text{ e ii) } p \vee (q \wedge r)$$

A proposição em (i) é uma *conjunção*, pois seu conectivo principal é $\wedge$". Já a proposição em (ii), que tem como conectivo principal "$\vee$", é uma *disjunção*. Essas duas proposições são distintas, tanto que pode ser verificado, ao comparar suas tabelas-verdade, que elas apresentam saídas diferentes. Faça esta verificação como exercício.

→ Por questões de simplificação da escrita, desde que não venham a ocorrer ambiguidades, a supressão de parênteses pode ser admitida. Para tanto, algumas convenções devem ser observadas:

1. A *ordem de precedência* para os conectivos, do mais "fraco" para o mais "forte" é:

(1) $\sim$	(2) $\wedge$ e $\vee$	(3) $\to$	(4) $\leftrightarrow$
conectivo mais fraco			conectivo mais forte

Desse modo, a proposição

$$p \vee q \leftrightarrow r \to s$$

é uma bicondicional e não uma disjunção ou uma condicional. Com o uso de parênteses, poderíamos transformá-la nas disjunções

$$p \vee (q \leftrightarrow r \to s) \text{ ou } p \vee ((q \leftrightarrow r) \to s)$$

ou nas condicionais

$$(p \vee q \leftrightarrow r) \to s \text{ ou } (p \vee (q \leftrightarrow r)) \to s .$$

2. Se um mesmo conectivo aparece repetidamente, a supressão de parênteses é feita fazendo-se associações a partir da esquerda. Desse modo, as proposições

$$(p \wedge q) \wedge r \text{ e } \sim (\sim p) ,$$

podem ser escritas de maneira mais simples, respectivamente, por:

$$p \wedge q \wedge r \text{ e } \sim\sim p .$$

Vamos agora usar o procedimento descrito no tópico anterior para construir as tabelas-verdade de alguns exemplos.

Exemplo 5:

Construa a tabela-verdade da proposição composta $P(p,q) = \sim((\sim p)\wedge(\sim q))$.

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$(\sim p)\wedge(\sim q)$	$\sim((\sim p)\wedge(\sim q))$
V	V	F	F	F	**V**
V	F	F	V	F	**V**
F	V	V	F	F	**V**
F	F	V	V	V	**F**

Observe que os valores lógicos da proposição composta *P* dada encontram-se na última coluna (coluna 6) da tabela. Portanto, os valores lógicos da proposição *P* correspondentes a todas as possíveis atribuições de valores lógicos V e F às proposições simples componentes *p* e *q*, ou seja, aos pares de valores lógicos VV, VF, FV e FF são, respectivamente, V, V, V e F. Simbolicamente, podemos escrever:

P(VV) = V, P (VF) = V, P (FV) = V e P (FF) = F

ou abreviadamente:

P(VV, VF, FV, FF) = VVVF.

ATENÇÃO!

A proposição $\sim((\sim p)\wedge(\sim q))$ é uma negação e pode ser escrita, por supressão de parênteses, por $\sim(\sim p \wedge \sim q)$. Por outro lado, ela não pode ser escrita por $\sim\sim p \wedge \sim q$. Essa é, na verdade, a conjunção $\sim(\sim p) \wedge \sim q$ ou, escrita de forma mais estendida, $(\sim(\sim p))\wedge(\sim q)$.

Dizemos ainda que a proposição *P* (*p*, *q*) associa a cada um dos elementos do conjunto U = {VV, VF, FV, FF} um único elemento do conjunto {V, F}, ou seja, *P* (*p*, *q*) é uma função de U em {V, F}:

$$P: U \rightarrow \{V, F\}$$

A representação gráfica por um diagrama de flechas (diagrama sagital) pode ser vista na figura 1.

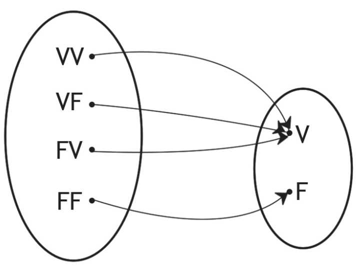

Figura 6 – Representação sagital de $P(p,q) = \sim((\sim p)\wedge(\sim q))$.

Exemplo 6:

Construa a tabela-verdade da proposição composta $P(p,q) = p \wedge (p \rightarrow q) \rightarrow q$.

p	**q**	$p \rightarrow q$	$p \wedge (p \rightarrow q)$	$p \wedge (p \rightarrow q) \rightarrow q$
V	V	V	V	**V**
V	F	F	F	**V**
F	V	V	F	**V**
F	F	V	F	**V**

Veremos mais adiante que essa proposição, chamada de regra "Modus Ponens", está relacionada à implicação lógica ($\Rightarrow$). Note que esta proposição tem uma característica especial: a última coluna de sua tabela-verdade que encerra o valor lógico da proposição só contém o valor lógico verdade (V). Daremos mais adiante uma definição para esse tipo de proposição.

Temos:

$$P(\text{VV}) = \text{V},\ P\ (\text{VF}) = \text{V},\ P\ (\text{FV}) = \text{V e } P\ (\text{FF}) = \text{V}$$

ou abreviadamente:

$$\text{P(VV, VF, FV, FF) = VVVV.}$$

Potanto, $P\ (p,\ q)$ é uma função de U em {V, F}, P: U $\rightarrow$ {V, F} cuja representação gráfica por um diagrama sagital é vista a seguir:

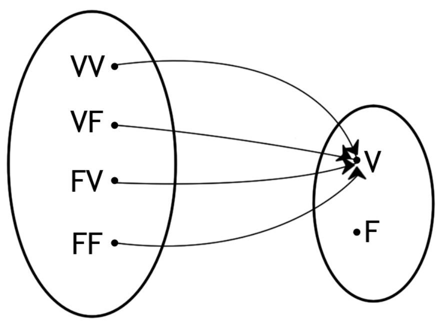

Figura 7 – Representação sagital de $P(p,q) = p \wedge (p \rightarrow q) \rightarrow q$.

Concluiremos este tópico apresentando formas de determinar o valor lógico de proposições compostas sem necessitar construir suas tabelas-verdade. Esse conhecimento será de grande utilidade nas demonstrações de validade ou não de argumentos e será explorado em exercícios posteriores.

Já sabemos que o valor lógico de uma proposição composta fica determinado pelos valores lógicos das proposições simples que a compõem. Para ilustrar esse fato, façamos alguns exercícios.

Exemplo resolvido 1:

Determine o valor lógico da proposição composta $P(p,q) = \sim p \leftrightarrow q$ para o caso de o valor lógico de p ser V (verdade) e o de q ser F (falsidade).

Solução:

Temos:

$$V(P) = V(\sim p \leftrightarrow q) = V(\sim p) \leftrightarrow V(q) = \sim V(p) \leftrightarrow V(q) = \sim V \leftrightarrow F = F \leftrightarrow F = V.$$

Assim, o valor lógico de $P(p,q)$ é V.

Exercício resolvido 2:

Considere as proposições:

$p: |sen(x)| > 1$, $q: \pi$ é racional e r: 2 é primo.

Determine o valor lógico da proposição composta $Q(p,q,r) = p \vee r \rightarrow q \wedge r$.

ATENÇÃO!

Vale destacar que a proposição $Q(p,q,r)$ é uma condicional com antecedente $p \vee r$ e consequente $q \wedge r$.

Solução:

Inicialmente, precisamos usar conhecimentos de Matemática do Ensino Médio para determinar os valores lógicos das proposições p, q e r. Do fato que a função *sen* é limitada com $-1 \leq sen(x) \leq 1$ para todo x, $V(p) = F$. Da constituição dos conjuntos numéricos, sabemos que $V(q) = F$ e $V(r) = V$. Desse modo, temos:

$$\begin{aligned} V(Q) &= V(p \vee r \rightarrow q \wedge r) = V(p \vee r) \rightarrow V(q \wedge r) = V(p) \vee V(r) \rightarrow V(q) \wedge V(r) \\ &= F \vee V \rightarrow F \wedge V = V \rightarrow F = F \end{aligned}.$$

Assim, o valor lógico de $Q(p,q,r)$ é F.

Exercício resolvido 3:

Dados $V(p) = V$ e $V(q) = V$, determine o valor lógico da proposição composta:

$$R(p,q) = (p \rightarrow q) \leftrightarrow ((\sim q) \rightarrow (\sim p)).$$

ATENÇÃO!

1. Vale destacar que a proposição $R(p,q)$ é uma bicondicional e, considerando que, pela ordem de precedência, o conectivo "↔" é mais forte que o conectivo "→", podemos suprimir parênteses e escrever simplesmente $R(p,q) = p \to q \leftrightarrow \sim q \to \sim p$.

2. Se variarmos os valores lógicos das proposições simples p e q que compõem a proposição composta $R(p,q)$, o seu valor lógico não se altera, ou seja, o valor lógico de R independe dos valores lógicos de suas componentes. Como exercício, verifique essa interessante observação. Proposições com essa característica serão estudadas no próximo tópico.

Solução:

Temos:

$$
\begin{aligned}
V(R) &= V((p \to q) \leftrightarrow ((\sim q) \to (\sim p))) \\
&= V(p \to q) \leftrightarrow V((\sim q) \to (\sim p)) \\
&= (V(p) \to V(q)) \leftrightarrow (V(\sim q) \to V(\sim p)) \\
&= (V(p) \to V(q)) \leftrightarrow ((\sim V(q)) \to (\sim V(p))) \\
&= (V \to V) \leftrightarrow ((\sim V) \to (\sim V)) = \\
&= (V \to V) \leftrightarrow (F \to F) = V \leftrightarrow V = V
\end{aligned}
$$

Assim, o valor lógico de $R(p,q)$ é V.

Neste tópico, construímos as tabelas-verdade de algumas proposições e apresentamos algumas regras para o uso/supressão de parênteses. Vimos ainda outros meios de determinar o valor lógico de uma proposição composta. No próximo tópico, apresentaremos proposições com características especiais.

TÓPICO 3

Tautologias, contradições e contingências

Objetivos

- Identificar o que é uma tautologia e conhecer o seu valor lógico
- Identificar o que é uma contradição e conhecer o seu valor lógico
- Reconhecer contingências e determinar seus valores lógicos

3.1 INTRODUÇÃO

Neste tópico, apresentaremos as *tautologias* e *contradições*, proposições compostas especiais cujos valores lógicos não se alteram mesmo quando alteramos os valores lógicos das proposições simples que as compõem. Aprenderemos também o que são *contingências*. Construiremos tabelas-verdade desses tipos de proposições e determinaremos os seus valores lógicos.

GUARDE BEM ISSO!

O valor lógico de uma tautologia $P(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ é V independente dos valores lógicos das proposições simples $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

3.2 DEFINIÇÃO DE TAUTOLOGIA

DEFINIÇÃO 1

Uma tautologia é uma proposição composta cujo valor lógico é sempre a verdade (V), independente dos valores lógicos das proposições simples que a compõem.

Da definição acima, na última coluna da tabela-verdade de uma tautologia, ocorre sempre o valor lógico **V** (verdade).

Como exemplo, considere a seguinte afirmação: “José diz: - hoje é sábado ou hoje não é sábado". Observe que José está sempre dizendo a verdade, não importa que dia seja hoje.

Uma tautologia é também chamada **proposição tautológica** ou **proposição logicamente verdadeira**. Para fixar a definição, vejamos alguns exemplos:

Exemplo 7:

A proposição $\sim(p\wedge\sim p)$ é uma tautologia, como pode ser visto em sua tabela-verdade.

p	$\sim p$	$p\wedge\sim p$	$\sim(p\wedge\sim p)$
V	F	F	**V**
F	V	F	**V**

Observe que, na última coluna da tabela-verdade de $\sim(p\wedge\sim p)$, só há o valor lógico **V** (verdade). Esse exemplo ilustra o princípio da não-contradição, apresentado na primeira aula, e significa que a afirmação de que "uma proposição não pode ser simultaneamente verdadeira e falsa" é verdadeira.

Exemplo 8:

A última coluna da tabela-verdade de $p\vee\sim p$ só apresenta o valor lógico **V** (verdade), como pode ser visto abaixo.

p	$\sim p$	$p\vee\sim p$
V	F	**V**
F	V	**V**

Logo, $p\vee\sim p$ é uma tautologia. Esse exemplo ilustra o princípio do terceiro excluído e significa que dizer que "uma proposição ou é verdadeira ou é falsa" é uma afirmação verdadeira.

Vejamos agora alguns casos com mais proposições simples. Inicialmente, vamos voltar à proposição $R(p,q)$ Exercício Resolvido 3 (Tópico 2 - Aula 3). Verifiquemos que o valor lógico de R é **V** independente dos valores lógicos de suas componentes p e q.

Exemplo 9:

A proposição $p\to q\leftrightarrow\sim q\to\sim p$ é uma tautologia. A última coluna de sua tabela-verdade só apresenta o valor lógico **V** (verdade), como pode ser visto a seguir.

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \rightarrow q$	$\sim q \rightarrow \sim p$	$p \rightarrow q \leftrightarrow \sim q \rightarrow \sim p$
V	V	F	F	V	V	**V**
V	F	F	V	F	F	**V**
F	V	V	F	V	V	**V**
F	F	V	V	V	V	**V**

Exemplo 10 (Alencar Filho, 2002, p. 45):

A proposição $p \wedge r \rightarrow \sim q \vee r$ é tautológica, conforme se vê pela sua tabela-verdade a seguir:

p	q	r	$\sim q$	$p \wedge r$	$\sim q \vee r$	$p \wedge r \rightarrow \sim q \vee r$
V	V	V	F	V	V	**V**
V	V	F	F	F	F	**V**
V	F	V	V	V	V	**V**
V	F	F	V	F	V	**V**
F	V	V	F	F	V	**V**
F	V	F	F	F	F	**V**
F	F	V	V	F	V	**V**
F	F	F	V	F	V	**V**

Agora que você sabe o que é uma tautologia, vamos dar a definição de *contradição*, outro tipo de proposição composta, cujo valor lógico não depende dos valores lógicos das proposições componentes.

3.3 DEFINIÇÃO DE CONTRADIÇÃO

DEFINIÇÃO 2

Uma contradição é uma proposição composta cujo valor lógico é sempre a falsidade (F), independente dos valores lógicos das proposições simples que a compõem.

Da definição acima, na última coluna da tabela-verdade de uma contradição, ocorre sempre o valor lógico **F** (falsidade).

Como exemplo, considere a seguinte afirmação: "Hoje é sábado e hoje não é sábado". Veja que seu valor lógico é sempre falso não importando qual dia seja hoje.

GUARDE BEM ISSO!

O valor lógico de uma contradição $P(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ é F independente dos valores lógicos das proposições simples $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

Uma contradição é também chamada **proposição contraválida** ou **proposição logicamente falsa**. Para que você fixe a definição de contradição, vejamos alguns exemplos.

Exemplo 11 (Alencar Filho, 2002, p.46):

A proposição $p \wedge \sim p$ é uma contradição, conforme se vê pela sua tabela-verdade:

p	$\sim p$	$p \wedge \sim p$
V	F	**F**
F	V	**F**

Como se pode notar, a última coluna da tabela-verdade de $p \wedge \sim p$ só encerra o valor lógico **F** (falsidade). Esse exemplo mostra que a afirmação de que "uma proposição pode ser simultaneamente verdadeira e falsa" é falsa.

Exemplo 12:

A proposição $p \leftrightarrow \sim p$ é contraválida. Com efeito, sua tabela-verdade é:

p	$\sim p$	$p \leftrightarrow \sim p$
V	F	**F**
F	V	**F**

Note que a última coluna da tabela-verdade de $p \leftrightarrow \sim p$ só apresenta o valor lógico **F** (falsidade).

GUARDE BEM ISSO!

Uma contingência é um tipo de proposição que não é tautologia nem contradição. Na última coluna da tabela-verdade de uma contingência, devem ocorrer os valores lógicos V e F cada um pelo menos uma vez.

Exemplo 13:

A última coluna da tabela-verdade de $\sim p \wedge (p \wedge \sim q)$ só apresenta o valor lógico **F** (falsidade), como pode ser visto abaixo.

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \wedge \sim q$	$\sim p \wedge (p \wedge \sim q)$
V	V	F	F	F	**F**
V	F	F	V	V	**F**
F	V	V	F	F	**F**
F	F	V	V	F	**F**

Portanto, de acordo com a Definição 2 acima, a proposição $\sim p \wedge (p \wedge \sim q)$ é uma contradição.

Antes da próxima definição, vamos apresentar um princípio bem útil à determinação de tautologias e contradições.

3.4 TEOREMA

TEOREMA 2 (PRINCÍPIO DA SUBSTITUIÇÃO)

$P(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ *é uma tautologia (contradição) qualquer. Se substituirmos as proposições simples* $p_1, p_2, \ldots, p_n$ *por outras proposições quaisquer (simples ou compostas)* $q_1, q_2, \ldots, q_n$, *então a nova proposição* $P(q_1, q_2, \ldots, q_n)$ *que se obtém é também uma tautologia (contradição)*

Vamos dar agora a definição de *contingência*, um tipo de proposição que não é tautologia nem contradição.

3.5 DEFINIÇÃO DE CONTINGÊNCIA

DEFINIÇÃO 3

Uma contingência é uma proposição composta em cuja tabela-verdade ocorrem, na última coluna, os valores lógicos V (verdade) e F (falsidade).

Uma contingência é também chamada **proposição contingente** ou **proposição indeterminada**. Vejamos os exemplos abaixo para termos uma ideia clara da definição de contingência.

Exemplo 14:

A proposição $p \vee q \to p \wedge q$ é uma contingência, conforme pode ser visto por sua tabela-verdade:

p	**q**	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \vee q \to p \wedge q$
V	V	V	V	**V**
V	F	V	F	**F**
F	V	V	F	**F**
F	F	F	F	**V**

Perceba que a última coluna da tabela-verdade de $p \vee q \to p \wedge q$ apresenta ambos os valores lógicos **V** (verdade) e **F** (falsidade).

SAIBA MAIS!

Continue estudando e complemente seus conhecimentos consultando as referências que citamos e/ou acessando páginas relacionadas da internet. Abaixo, listamos algumas páginas que poderão ajudá-lo. Bons estudos!

http://www.pucsp.br/~logica/

http://wwmat.mat.fc.ul.pt/~jnsilva/logica97/logica97.html

http://rogesantana.vilabol.uol.com.br/modulo_1/Logos1.htm#roge05

Chegamos à metade de nosso curso! Nesta aula, construímos tabelas-verdade de várias proposições compostas, com destaque para as tautologias, contradições e contingências e aprendemos a determinar os valores lógicos de uma proposição composta para cada atribuição de valores lógicos às suas proposições componentes. Na próxima aula, trataremos das implicações e equivalências.

AULA 4

Conjuntos

Olá! Estamos iniciando a segunda metade de nosso curso. Já fizemos uma boa introdução ao cálculo proposicional e deve estar claro para você a importância de uma linguagem própria para a Matemática. Ainda temos muito a conhecer sobre Lógica: as relações de implicação e de equivalência, os tipos de demonstração, um pouco mais sobre a álgebra das proposições, as sentenças abertas e os quantificadores. Entretanto, nesta aula, faremos uma pausa na abordagem dos tópicos próprios da lógica, para revisarmos um pouco o que aprendemos sobre os conjuntos – uma noção complementar a de Lógica.

Aprofundaremos algumas noções básicas sobre conjuntos, realizaremos as principais operações com conjuntos e examinaremos algumas das propriedades dessas operações. Apresentaremos os conjuntos numéricos fundamentais e examinaremos propriedades importantes que ocorrem nestes conjuntos. Adicionalmente, procuraremos também estabelecer relações da lógica com conjuntos.

Objetivos

- Conhecer a linguagem matemática básica
- Compreender a importância dos conjuntos para a Matemática
- Realizar operações com conjuntos
- Aprofundar o conhecimento sobre conjuntos numéricos fundamentais

TÓPICO 1

Noções sobre conjuntos

OBJETIVOS

- Compreender intuitivamente noções básicas relacionadas a conjuntos
- Conhecer alguns fatos da história da Teoria dos Conjuntos
- Revisar notações usadas no estudo dos conjuntos

1.1 INTRODUÇÃO

A compreensão de noções básicas sobre conjuntos é essencial para a Matemática. Para sermos mais enfáticos, hoje sabemos que todos os conceitos da Matemática moderna, desde os mais básicos, como o de *números naturais*, até os mais complexos, como o de *variedades diferenciais*, podem ser formulados na linguagem de conjuntos. Dizer que os conceitos da Matemática atual podem reduzir-se aos conceitos de conjuntos é dizer que eles podem definir-se formalmente a partir destes. Desse modo, para dar consistência a qualquer afirmação matemática, basta, então, dar rigor às afirmações sobre conjuntos.

O caráter fundamentalmente conceitual da *Teoria dos Conjuntos* lhe dá lugar de destaque em todas as áreas em que o pensamento racional e, em particular, o pensamento científico é fundamental. A abordagem *conjuntista* é extremamente útil na sistematização de redes conceituais. Desse modo, parece natural que a Teoria dos Conjuntos deva estar na base de todas as ciências. Ainda que não nos demos conta, as diversas ciências naturais e humanas se desenvolvem graças a seu caráter *conjuntista*. Assim sendo, torna-se evidente o caráter universal da linguagem conjuntista e de suas teorias correspondentes.

A abordagem que daremos em nossa disciplina não é a de uma teoria dos conjuntos. Ela será, na verdade, apenas *intuitiva* e um tanto "*ingênua*". Nosso interesse será de introduzir a linguagem dos conjuntos e mostrar que, em certo sentido, essa é uma linguagem universal. Iniciaremos fazendo um breve relato histórico da criação da Teoria dos Conjuntos por Georg Cantor, mostrando sua importância para as ciências matemáticas e para as ciências empíricas. De acordo com Ferreira (2001, p. 17):

> As idéias essenciais da teoria dos conjuntos foram introduzidas por G. Cantor, na parte final do século XIX. Desde então, a teoria dos conjuntos não deixou de desenvolver-se intensamente, de tal forma que hoje pode dizer-se que todos os ramos da Matemática foram profundamente influenciados e enriquecidos por essa teoria.

Saiba um pouco mais sobre Georg Cantor e suas contribuições para a Teoria dos Conjuntos lendo o texto seguinte:

Cantor e a Teoria dos Conjuntos

Hygino H. Domingues

> A natureza do infinito é uma questão antiga e controversa. Arquimedes (287-212 a.C.) fazia distinção entre infinito potencial e infinito atual. Este último, que vem a ser o infinito como algo completo, era descartado por não haver nenhuma evidência de que alguma coleção de objetos pudesse corresponder a tal idéia. O conjunto N, por outro lado, é um exemplo de conjunto potencialmente infinito, pois sempre se pode somar uma unidade a cada um de seus elementos obtendo-se outro número natural.
>
> No século XVII, Galileu comparou os conjuntos N^* = {1, 2, 3, ... } e P = {2, 4, 6, ...}. E assinalou que, se a idéia de infinito atual fosse válida, haveria tantos números pares e ímpares reunidos quanto pares apenas, posto que a correspondência 1 → 2, 2 → 4, 3 → 6, ..., n → 2n, ... de N^* em P é, como se diz hoje, biunívoca. Este aparente paradoxo deve tê-lo levado a deixar de lado tais cogitações.
>
> Aliás, a idéia de infinito atual, por ter conotações de ordem religiosa, não era aceita também por certos teólogos (São Tomás de Aquino, por exemplo) que viam em Deus a única natureza absolutamente infinita. E isso deve ter contribuído para que sua adoção fosse retardada em Matemática.
>
> Curiosamente, quem tirou a Matemática dessa camisa-de-força foi um homem de profunda fé religiosa, Georg Cantor (1845-1918). Cantor nasceu na Rússia, na cidade de São Petersburgo, mas aos 2 anos mudou-se com sua família para a Alemanha, onde se fixou. Em 1862 iniciou o curso de Engenharia em Zurique, mas, depois de um semestre, deixou-o para fazer Matemática em Berlim, em cuja universidade obteve o grau de doutor no ano de 1867 com uma tese sobre teoria dos números. Dois anos depois foi admitido na Universidade de Halle, onde transcorreria sua carreira acadêmica.

VOCÊ SABIA?

Em 1872, o matemático alemão Dedekind dera o primeiro passo nesse sentido com a seguinte definição (aqui em terminologia moderna): "um conjunto se diz infinito se pode ser colocado em correspondência biunívoca com uma parte própria de si mesmo". Ou seja, aquilo que a Galileu parecera um paradoxo tornava-se a propriedade fundamental dos conjuntos infinitos, com todas as suas implicações.

http://upload.wikimedia.org/wikipedia/

Georg Cantor (1845 - 1918)

Dedicando-se entre 1870 e 1872 a pesquisas na área de análise matemática, Cantor acabou tendo sua atenção atraída para um assunto com o qual seu espírito tinha especial afinidade: a natureza dos conjuntos infinitos. E de sua opção por este caminho nasceria a teoria dos conjuntos como capítulo autônomo da Matemática.

O grande mérito de Cantor foi perceber, a partir daí, a existência de conjuntos infinitos de espécies diferentes, numa escala de grandeza. Se dois conjuntos, como N^* e P, podem ser colocados em correspondência biunívoca, diz-se que ambos têm mesma potência. E foi através dessas potências que Cantor hierarquizou o infinito. Na primeira categoria da escala do infinito, estão todos os conjuntos com a mesma potência de N^*, entre os quais estão P, Z e, surpreendentemente, o próprio Q. Estes são os conjuntos enumeráveis. A seqüência a seguir, em que os números são ordenados pela sua altura (= numerador + denominador), dá uma ideia do porquê de Q_+^* ser também enumerável:

1/1, 1/2, 2/1, 1/3, 2/2, 3/1, 1/4, 2/3, 3/2, 4/1, ...

Cantor mostrou que R e C têm a mesma potência e que esta é superior à dos enumeráveis. E mostrou ainda que a escala do infinito não tem limites: sempre há potências maiores e maiores.

Certos resultados obtidos por Cantor surpreenderam a ele mesmo. Sob esse ponto de vista é possível entender o porquê das duras críticas que recebeu de importantes matemáticos de seu tempo. Mas, para o progresso da Matemática, prevaleceram opiniões como a de Hilbert: "Do paraíso criado por Cantor ninguém nos tirará".

(IEZZI; MURAKAMI, 2004, p. 38-39)

1.2 IDEIA INTUITIVA DE CONJUNTO

Já deve estar claro que a noção de "conjunto" é uma noção fundamental da Matemática. Ela é a estrutura matemática sobre a qual todas as outras podem ser construídas (número, relação, função, ...). O conceito de conjunto aparece em todos os ramos da Matemática e, a partir dele, podemos definir muitos outros conceitos matemáticos.

Não definimos o que é um conjunto. Esse é um conceito primitivo. A ideia intuitiva que temos é a de que

Um **conjunto** *é qualquer coleção, lista ou classe de objetos bem definida. Os objetos de um conjunto podem ser qualquer coisa: números, pessoas, letras, rios, etc., e são chamados* **elementos** *ou* **membros** *do conjunto.*

Portanto, um conjunto é constituído por *elementos*, porém esse é também um conceito primitivo, por isso não o definimos.

A noção de conjunto pode ser explicada intuitivamente. Vejamos alguns exemplos.

VOCÊ SABIA?

Uma teoria matemática é constituída por certo número de conceitos primitivos e por um número de axiomas (proposições arbitrariamente verdadeiras). A partir deles, são introduzidos novos conceitos (os conceitos derivados) e novas proposições verdadeiras (os teoremas).

Exemplo 1:

1. O conjunto dos municípios do Ceará.
2. O conjunto dos alunos da Universidade Aberta do Brasil.
3. O conjunto dos times de futebol Fortaleza, Ceará, Ferroviário e Maranguape.
4. O conjunto de todos os rios da Terra.
5. O conjunto dos números ímpares.
6. O conjunto dos números reais entre 0 e 1.
7. O conjunto de todos os números racionais cujo quadrado é 2.
8. O conjunto dos números naturais que são múltiplos de 4.
9. O conjunto dos números reais que são solução da equação $x^4+x=0$.
10. O conjunto de todas as retas de um determinado plano.

Desde que a Matemática lida principalmente com números e com o espaço, os conjuntos mais frequentemente encontrados nesta ciência são os conjuntos numéricos e as figuras geométricas (conjuntos de pontos). Destes se derivam outros conjuntos importantes para a Matemática, como os conjuntos de funções, de matrizes, etc.

1.3 CARACTERÍSTICAS DE UM CONJUNTO

Os conjuntos costumam ser, em geral, designados por letras maiúsculas do nosso alfabeto e os elementos dos conjuntos representados por letras minúsculas. Entretanto, esta não é uma regra rígida. Em Geometria, por exemplo, é comum representarmos as retas (conjuntos de pontos) por letras minúsculas e os planos por letras do alfabeto grego.

Além dos conceitos de conjunto e elemento, precisamos de um terceiro conceito primitivo para desenvolver a chamada teoria intuitiva dos conjuntos: o conceito de *pertinência*. De acordo com Lima (2003, p. 1) "Dados um conjunto A e um objeto qualquer *a* (que pode até mesmo ser outro conjunto), a única pergunta cabível em relação a eles é: *a* é ou não um elemento do conjunto A?"

ATENÇÃO!

Em Matemática, "|" ou "/" indica o sentido oposto ou negativo que está sendo atribuído a um símbolo.

GUARDE BEM ISSO!

Conhecer um conjunto é conhecer cada um dos objetos que pertencem a esse conjunto, ou seja, um conjunto fica definido pelos objetos que contém.

ATENÇÃO!

Na descrição por extensão, os conjuntos são definidos, isto é, apresentados por uma listagem real de seus membros, enquanto na descrição por compreensão os conjuntos são definidos por propriedades declaradas, isto é, regras que decidem se um objeto particular é, ou não, membro do conjunto.

Quando usamos abreviaturas na descrição extensiva de um determinado conjunto, é imprescindível que não restem dúvidas sobre o significado dessas abreviaturas.

No caso de "*a* ser um elemento do conjunto A", dizemos que "*a pertence* ao conjunto A" e escrevemos $a \in A$. Caso contrário, ou seja, quando "*a* não é um elemento do conjunto A", dizemos que "*a não pertence* ao conjunto A" e escrevemos $a \notin A$.

Existem duas formas comuns de expressar um conjunto e a escolha de uma forma particular de expressão depende da conveniência e de certas circunstâncias, a saber:

Descrição por extensão, por citação dos elementos ou por enumeração dos elementos: quando definimos um determinado conjunto relacionando, citando ou enumerando seus membros. Por exemplo, ao considerarmos o conjunto A constituído dos números 1, 3, 5, 7 e 9, escrevemos:

$$A = \{1, 3, 5, 7, 9\},$$

ou seja, com os elementos separados por vírgulas e compreendidos entre chaves. Dizemos ainda que esta é a *forma tabular de um conjunto*.

Descrição por compreensão ou por uma propriedade: quando definimos um conjunto particular A por meio de uma propriedade P característica de seus elementos. Neste caso, usamos então uma letra, geralmente x, para representar um elemento arbitrário e escrevemos:

$$A = \{x \mid x \text{ goza da propriedade } P\},$$

que se lê "A é o conjunto dos elementos x tal que x goza da propriedade P'. Por exemplo, ao considerarmos B como o conjunto de todos os números pares, escrevemos: B = {x | x é par}. Dizemos ainda que esta é a *forma de construção de um conjunto*. Intuitivamente, a cada conjunto corresponde uma propriedade, ou seja, algo que caracteriza seus elementos.

Vejamos agora a descrição de alguns conjuntos por cada uma dessas formas.

VOCÊ SABIA?

Por questões de ordem prática, a expressão de um conjunto extensivamente (por extensão) é mais adequada se ele for finito e tiver uma pequena quantidade de elementos. Para conjuntos finitos com uma grande quantidade de elementos ou para conjuntos infinitos enumeráveis, a expressão por extensão também pode ser usada. Porém, nesses casos, precisamos convencionar o uso de abreviaturas, normalmente reticências. Escrevemos, então, os elementos iniciais e colocamos reticências. No caso específico dos conjuntos finitos com uma grande quantidade de elementos, é necessário também indicar o último elemento. Veja os exemplos a seguir.

EXEMPLO 2:

1. A = Conjunto das vogais

Descrição por extensão: A = {a, e, i, o, u}

Descrição por compreensão: A = {x | x é vogal}

2. B = Conjunto dos números divisores positivos de 36

Descrição por extensão: B = {1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36}

Descrição por compreensão: B = {x | x é divisor positivo de 36}

3. C = Conjunto das soluções da equação $x^2 - x - 6 = 0$

Descrição por extensão: C = {-2,3}

Descrição por compreensão: C = {x | x é solução da equação $x^2 - x - 6 = 0$ }

EXEMPLO 3:

1. E = Conjunto dos números inteiros não negativos que são menores que 200

Descrição por extensão: E = {0, 1, 2, ..., 200}

Descrição por compreensão: E = {x | x é inteiro e $0 \leq x \leq 200$ }

2. F = Conjunto dos números pares positivos

Descrição por extensão: F = {2, 4, 6, ...}

Descrição por compreensão: F = {x | x é número par positivo}

Neste tópico, revisitamos algumas noções básicas e notações usadas no trabalho com conjuntos. No próximo tópico, veremos mais alguns conceitos importantes e interessantes no trabalho com conjuntos.

TÓPICO 2

Mais conceitos básicos

Objetivos

- Identificar e diferenciar conjuntos finitos e conjuntos infinitos
- Caracterizar conjuntos como vazio, unitário e universal
- Revisar as relações de igualdade e de inclusão
- Rever representações de conjuntos por meio de diagramas
- Conhecer alguns conjuntos numéricos

SAIBA MAIS!

Quando a quantidade de elementos de um conjunto finito X é n, dizemos que X tem n elementos.

2.1 INTRODUÇÃO

Neste tópico, retomaremos alguns conceitos básicos interessantes no estudo de conjuntos.

2.2 CONJUNTOS FINITOS E INFINITOS

Grosso modo, um conjunto é *finito* se consiste de um número específico de elementos diferentes, isto é, se, ao contarmos os seus diferentes membros, o processo de contagem chega a um final. De outro modo, o conjunto é *infinito*.

Exemplo 4:

No Exemplo 1, são infinitos os conjuntos dos itens 5, 6 e 8 e os demais são finitos. Os conjuntos do Exemplo 2 são todos finitos. Já no Exemplo 3 temos o conjunto E, que é finito e o F que é infinito.

2.3 CONJUNTOS VAZIO, UNITÁRIO E UNIVERSAL

- Conjunto *vazio* ou *nulo* é aquele que não contém elementos. Representamos um conjunto vazio por { } ou pelo símbolo ∅. São exemplos de conjuntos vazios:

Exemplo 5:

$A = \{x \mid x \text{ é ímpar e múltiplo de } 2\}$

$B = \{x \mid x \neq x\}$

- Conjunto *unitário* é aquele que só possui um elemento.

Exemplo 6:

$C = \{x \mid 3x+1=7\} = \{2\}$

- Conjunto *universal* ou *universo* é conjunto de todos os elementos existentes em um determinado assunto em estudo. Dependendo do conjunto universo com que estamos trabalhando, um determinado problema pode ter uma ou outra solução, ou até não ter solução. Designaremos o conjunto universo por *U*.

Exemplo 7:

Se procurarmos as soluções inteiras de certa equação, então o nosso conjunto universo é $\mathbb{Z}$, conjunto de todos os números inteiros.

2.4 IGUALDADE DE CONJUNTOS

DEFINIÇÃO 1 (IGUALDADE DE CONJUNTOS)

Um conjunto A é igual a um conjunto B, A = B, se ambos têm os mesmos elementos, isto é, se cada elemento pertencente a A pertencer também a B, e se cada elemento pertencente a B pertencer também a A. Simbolicamente:

$$A = B \Leftrightarrow (\forall x)\ (x \in A \Leftrightarrow x \in B).$$

Exemplo 8:

$\{a, b, c\} = \{b, a, c\} = \{a, b, b, c, c, c\}$

Esse exemplo ilustra, em se tratando de conjuntos, que a) uma mudança na ordem em que os elementos são descritos não altera o conjunto, ou seja, a ordem não importa; e b) a repetição de elementos é desnecessária.

Se A não é igual a B, dizemos que A é diferente de B e escrevemos $A \neq B$. Isso ocorre se existe algum elemento de A que não é elemento de B ou se existe algum elemento de B que não é elemento de A. Ou, simbolicamente:

$$\exists x,\ x \in A \mid x \notin B \text{ ou } \exists x,\ x \in B \mid x \notin A.$$

Exemplo 9:

$\{a, b, d\} \neq \{a, b, c, d\}$

Note que todos os elementos do primeiro conjunto são também elementos do segundo conjunto, mas existe um elemento do segundo conjunto que não é elemento do primeiro conjunto: o elemento c.

2.5 SUBCONJUNTOS - DEFINIÇÕES DE TEOREMAS

DEFINIÇÃO 2 (RELAÇÃO DE INCLUSÃO)

Se cada elemento do conjunto A é também um elemento do conjunto B, dizemos que A é um subconjunto de B, ou que A está contido em B, ou que A é parte de B e indicamos por $A \subset B$. O símbolo $\subset$ é denominado sinal de inclusão e a relação $A \subset B$ chama-se relação de inclusão. Simbolicamente:

$$A \subset B \Leftrightarrow (\forall x)\ (x \in A \Rightarrow x \in B).$$

Quando $A \subset B$, escrevemos também $B \supset A$, que pode ser lido como *B é superconjunto de A* ou *B contém A*. Escrevemos ainda $A \not\subset B$ ou $B \not\supset A$ se A não for subconjunto B. Simbolicamente:

$$A \not\subset B \Leftrightarrow (\exists x)\ (x \in A \text{ e } x \notin B).$$

EXEMPLO 10:

1. $\{x \mid x \text{ é inteiro e par}\} \subset \{x \mid x \text{ é inteiro}\}$
2. $\{a, b, c\} \not\subset \{b, c, d, e\}$

SAIBA MAIS!

Da definição de igualdade de conjuntos, perceba que $A = B \Leftrightarrow A \subset B \text{ e } B \subset A$

Uma inclusão bem curiosa, cuja demonstração é feita por vacuidade e pode ser vista em Lima (2003, p. 4), é:

TEOREMA 1

$\varnothing \subset A$, qualquer que seja o conjunto A.

A relação de inclusão goza de três propriedades fundamentais que podem ser vistas no teorema seguinte, em que A, B e C são conjuntos quaisquer.

TEOREMA 2 (PROPRIEDADES DA INCLUSÃO)

$\varnothing \subset A$, qualquer que seja o conjunto A.

1. $A \subset A$ (reflexividade);
2. Se $A \subset B$ e $B \subset A$, então $A = B$ (antissimetria);
3. Se $A \subset B$ e $B \subset C$, então $A \subset C$ (transitividade).

Quando $B \subset A$ e $B \neq A$, dizemos que B é um *subconjunto próprio* de A e podemos escrever $\subsetneq$. Alguns autores representam "B é um subconjunto de A" por $B \subseteq A$ e "B é um subconjunto próprio de A" por $B \subset A$.

DEFINIÇÃO 3 (COMPARAÇÃO DE CONJUNTOS)

Dizemos que dois conjuntos A e B são comparáveis se $A \subset B$ ou $B \subset A$ e que A e B não são comparáveis se $A \not\subset B$ e $B \not\subset A$.

Exemplo 11:

{a, b, c, d} e {a, b, c} são comparáveis

{1, 2, 3} e {2, 3, 4} não são comparáveis

2.6 CONJUNTOS DE CONJUNTOS - DEFINIÇÃO E TEOREMA

Já sabemos que os objetos de um conjunto podem ser de qualquer natureza, podendo ser inclusive conjuntos. Nos casos em que os elementos de um conjunto são, eles próprios, conjuntos, definimos:

DEFINIÇÃO 4

Uma família de conjuntos ou classe de conjuntos é um conjunto cujos elementos são conjuntos.

Evitamos falar em *conjunto de conjuntos* e, para não causar confusão, costumamos representar famílias de conjuntos por letras manuscritas.

Exemplo 12:

1. Em geometria, as linhas e as curvas são conjuntos de pontos. Desse modo, podemos falar em uma "família de linhas" ou em uma "família de curvas" para designar os conjuntos cujos elementos são, respectivamente, linhas ou curvas.
2. O conjunto $\mathfrak{I} = \{\{2,3\}, \{4\}, \{5,6\}\}$ é uma família de conjuntos.

Teoricamente, um conjunto pode ter alguns elementos que sejam conjuntos e outros que não sejam conjuntos.

Exemplo 13:

$\aleph = \{1, \{2,3\}, 4, \{5,6\}\}$. Neste caso, $\aleph$ não é uma família de conjuntos.

Dado um conjunto A qualquer, uma interessante família de conjuntos associada a A é a família de todos os subconjuntos do conjunto A, chamada *conjunto de potência* de A ou *conjunto das partes* de A e designada por 2^A ou $\wp(A)$. Simbolicamente:

$$\wp(A) = \{X \mid X \subset A\}.$$

O teorema seguinte é bastante conhecido e dá a relação entre o número de elementos de um conjunto finito e o número de elementos de seu conjunto das partes.

TEOREMA 3

Se um conjunto A tem n elementos, então 2^A tem 2^n elementos.

Exemplo 14:

Se $A = \{a, b, c, d\}$, então as partes de A são os conjuntos:

- 1 conjunto que não contém elementos: $\varnothing$ (lembre que $\varnothing$ é subconjunto de qualquer conjunto)
- 4 conjuntos contendo 1 elemento: $\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}$
- 6 conjuntos contendo 2 elementos: $\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}$
- 4 conjuntos contendo 3 elementos: $\{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}$
- 1 conjunto contendo 4 elementos: o próprio conjunto A

Portanto, $2^A = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, A\}$. Note que 2^A é constituído de $2^4 = 16$ conjuntos.

REPRESENTAÇÕES POR MEIO DE DIAGRAMAS

É usual representar um conjunto por meio de diagramas. Eles constituem um meio simples, prático e instrutivo de ilustrar as relações existentes entre conjuntos. Destacamos:

Diagramas de Venn-Euler ou, simplesmente, *diagramas de Venn*: representamos um conjunto por uma área plana simples, limitada por uma curva fechada, sem auto-interseção (geralmente, por um círculo ou por uma elipse). Nessa representação, os elementos do conjunto são pontos interiores a área. Elementos que não pertencem ao conjunto são representados por pontos no exterior da área.

Exemplo 15:

Na figura ao lado, representamos o conjunto $A = \{a, b, c\}$. A figura indica que a $a \in A$, $b \in A$, $c \in A$ e $d \notin A$.

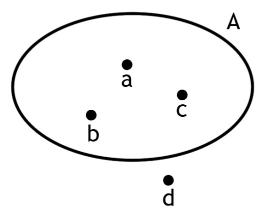

Figura 8 – Diagrama de Venn-Euler

Exemplo 16

Abaixo estão representados, em diagrama de Venn-Euler, alguns conjuntos e relações entre eles.

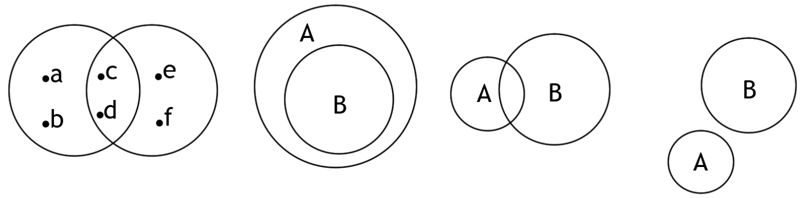

Figura 9 – Diagramas de Venn-Euler

Diagramas de linha: Se A ⊂ B, escrevemos B em nível mais alto que A, ligando-os por uma linha. Veja ilustração ao lado (Figura 3).

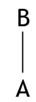

Figura 10 – Diagrama de Linha

Exemplo 17:

Sejam X = {x}, Y = {x, y}, Z = {x, y, z} e W = {x, y, w}. A representação em linha das relações entre esses conjuntos pode ser vista na Figura 11:

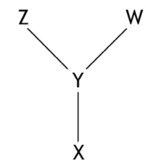

Figura 11 – Diagrama de Linha

2.8 CONJUNTOS NUMÉRICOS

Já vimos que um dos principais objetos de estudo da Matemática são os números. Os conjuntos numéricos são conjuntos cujos elementos são números. À medida que se civilizava, a humanidade foi se apoderando desses modelos abstratos que são os números. Tais modelos foram introduzidos, principalmente, diante das necessidades do homem de *contar* e *medir*. De acordo com Lima (2003, p. 25), "números são entes abstratos, desenvolvidos pelo homem como modelos que permitem contar e medir, portanto avaliar as diferentes quantidades de uma grandeza".

Finalizamos este tópico apresentando, apenas informalmente, alguns conjuntos numéricos e sua notação. Para um estudo mais detalhado desses conjuntos: origens, construção etc., você poderá consultar algumas das referências que citamos ou outras da literatura específica.

Destacamos:

1. Conjunto dos números naturais

$$\mathbb{N} = \{1,\ 2,\ 3,\ \ldots\}.$$

Muitos autores consideram o número 0 um número natural. Mas esta é uma questão não relevante. Na verdade, a essência da caracterização de $\mathbb{N}$ está na palavra *sucessor* (LIMA, 2003).

2. Conjunto dos números inteiros

$$\mathbb{Z} = \{\ldots,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\}.$$

Devemos destacar que $\mathbb{N}$ é o conjunto dos números inteiros positivos e que a passagem de $\mathbb{N}$ para $\mathbb{Z}$ se dá pela introdução dos números negativos. Portanto $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

3. Conjunto dos números racionais

$$\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{Z} \text{ e } b \neq 0\}.$$

Um fato interessante a respeito de números racionais é que todo número racional pode ser escrito como um número decimal, ou seja, pode ser escrito na forma

$$\alpha = a_0, a_1 a_2 \cdots a_n \cdots,$$

em que a_0 é um número inteiro e $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ são números inteiros tais que $0 \leq a_n \leq 9$, ou seja, são algarismos do sistema de numeração decimal, de modo que ocorre um dos dois casos seguintes:

- o número decimal tem uma quantidade finita de algarismos, isto é, é uma *decimal exata*;
- o número decimal tem uma quantidade infinita de algarismos que se repetem, a partir de um determinado, periodicamente, isto é, é uma *dízima periódica*.

EXEMPLO 18:

O número $\frac{3}{2}$ é um número racional cuja representação decimal é a decimal exata 1,5, e o número $\frac{1}{3}$ é um número racional que tem como representação decimal a dízima periódica 0,333...

Outro fato que pode ser notado facilmente é que todo número inteiro *a* é um número racional, pois $a = \frac{a}{1}$. Logo, $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

4. Conjunto dos números irracionais

É fácil constatar que existem números que não são racionais. O número $\sqrt{2}$, por exemplo, não pode ser escrito como quociente de dois números inteiros e, portanto, não é racional.

O conjunto dos números cuja representação decimal não é uma decimal exata e nem uma dízima periódica, ou seja, o conjunto dos números cuja representação decimal tem infinitas casas decimais que não se repetem periodicamente, é chamado conjunto dos números *irracionais* $\mathbb{I}$. Vejamos alguns exemplos de números do conjunto $\mathbb{I}$.

EXEMPLO 19:

$\sqrt{2} = 1,4142135623...$

$\pi = 3,1415592653\ldots$

$0,1010010001\ldots$

5. Conjunto dos números reais

É o conjunto de todos os números que são racionais ou que são irracionais, ou seja,

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$$

Temos as seguintes inclusões: $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ e $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$.

Neste tópico, ampliamos nossos conhecimentos vendo alguns conceitos básicos relacionados ao estudo de conjuntos. Agora, estamos em condições de realizar as principais operações com conjuntos.

TÓPICO 3

Operações com conjuntos

Objetivos

- Realizar operações com conjuntos
- Entender propriedades algébricas das operações com conjuntos
- Relacionar a linguagem dos conjuntos com a linguagem da lógica

3.1 INTRODUÇÃO

Na aritmética, podemos somar, multiplicar ou subtrair dois números quaisquer. Na Teoria dos Conjuntos, há três operações análogas: união, interseção, e complementação. Neste tópico, apresentaremos estas operações básicas com conjuntos.

3.2 REUNIÃO - DEFINIÇÃO E TEOREMA

DEFINIÇÃO 5

Dados os conjuntos A e B, a reunião (ou união) de A e B é o conjunto, denotado por $A \cup B$ (que se lê "A união B"), constituído de todos os elementos que pertencem a A ou a B ou a ambos. Simbolicamente:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$

Exemplo 20:

$\{a, b, c\} \cup \{c, d, e\} = \{a, b, c, d, e\}$

Abaixo, listamos propriedades da união de conjuntos e sua representação em diagrama de Venn-Euler:

Propriedades da União:

1. $A \cup A = A$ (idempotente)
2. $A \cup \varnothing = A$ (elemento neutro)

3. $A \cup B = B \cup A$ (comutativa)
4. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (associativa)

A demonstração do teorema seguinte pode ser encontrada na literatura básica de Teoria dos Conjuntos. Faça-a como exercício.

GUARDE BEM ISSO!

$A \cup B$ é o conjunto dos elementos que pertencem a pelo menos um dos conjuntos A ou B (podendo evidentemente pertencer aos dois).

TEOREMA 4

Quaisquer que sejam os conjuntos A e B valem:

1. $A \subset (A \cup B)$ e $B \subset (A \cup B)$
2. Se $A \subset B$, então $A \cup B = B$.

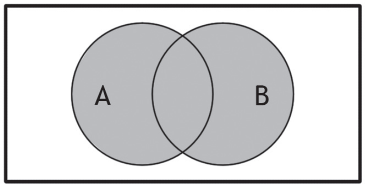

Figura 12 – União de conjuntos

3.3 INTERSEÇÃO - DEFINIÇÃO E TEOREMA

DEFINIÇÃO 6

Dados os conjuntos A e B, a interseção de A e B é o conjunto, denotado por $A \cap B$ (que se lê "A interseção B"), constituído de todos os elementos que pertencem ao mesmo tempo a A e a B. Simbolicamente:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}.$$

Exemplo 21:

$\{a, b, c\} \cap \{b, c, d, e\} = \{b, c\}$

Abaixo listamos propriedades da interseção de conjuntos e sua representação em diagrama de Venn-Euler.

GUARDE BEM ISSO!

$A \cap B$ é o conjunto dos elementos que pertencem simultaneamente aos conjuntos A e B.

Propriedades da Interseção:

1. $A \cap A = A$ (idempotente)
2. $A \cap U = U$ (elemento neutro)
3. $A \cap B = B \cap A$ (comutativa)
4. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (associativa)

A demonstração do teorema seguinte também pode ser encontrada na literatura básica de Teoria dos Conjuntos. Faça-a como exercício.

TEOREMA 5

Quaisquer que sejam os conjuntos A e B valem:

1. $(A \cap B) \subset A$ e $(A \cap B) \subset B$
2. Se $A \subset B$, então $A \cap B = A$.

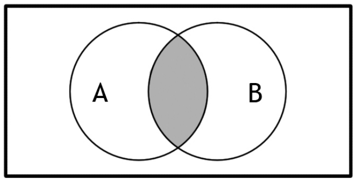

Figura 13 – Interseção de conjuntos

Quando A e B não têm elementos em comum, ou seja, quando $A \cap B = \varnothing$, dizemos que A e B são *disjuntos*.

Existem algumas propriedades que relacionam as operações de união e interseção, a saber:

Propriedades que relacionam a união e a interseção:

1. $A \cup (A \cap B) = A$
2. $A \cap (A \cup B) = A$
3. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (distributiva da união em relação à interseção)
4. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (distributiva da interseção em relação à união)

A relação entre a linguagem dos conjuntos e a linguagem da lógica é natural. De acordo com Lima (2003, p. 15):

> [...] as operações $A \cup B$ e $A \cap B$ entre conjuntos constituem a contrapartida matemática dos conectivos lógicos "ou" e "e". Assim, quando o conjunto A é formado pelos elementos que gozam da propriedade P e B pelos que gozam da propriedade Q então a propriedade que define o conjunto $A \cup B$ é "P ou Q" e o conjunto $A \cap B$ é definido pela propriedade "P e Q".

3.4 DIFERENÇA E COMPLEMENTAÇÃO - DEFINIÇÃO E TEOREMA

DEFINIÇÃO 7

Dados os conjuntos A e B, a diferença dos conjuntos A e B (ou, complemento de B em A) é o conjunto, denotado por $A - B$ (que se lê "A diferença B" ou "A menos B"), constituído de todos os elementos que pertencem a A, mas não pertencem a B. Simbolicamente:

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}.$$

Exemplo 22:

$\{a, b, c, d\} - \{c, d, e, f\} = \{a, b\}$

GUARDE BEM ISSO!

A – B é o conjunto dos elementos que são elementos do conjunto A, mas não são elementos do conjunto B.

Quando $B \subset A$, a diferença $A - B$ é chamada também o **complementar de** B **em relação a** A e é denotada por $C_A B$. O complementar de um dado conjunto A em relação a um conjunto universo U fixo é definido abaixo:

DEFINIÇÃO 8

Fixado um conjunto universo U e dado um conjunto A (subconjunto de U), complementar de A é o conjunto, denotado por A^c (que se lê "complementar de A"), constituído de todos os elementos de U que não pertencem a A. Simbolicamente:

$$A^c = \{x \mid x \in U \text{ e } x \notin A\}.$$

Exemplo 23:

Sejam $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ e $A = \{1, 3, 5, 7\}$. Então $A^c = \{2, 4, 6\}$

Seja $P = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ é par}\}$. Então, $C_{\mathbb{N}} P = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ é ímpar}\}$

O conjunto A^c costuma ser representado também por $\overline{A}$ ou por A'.

Abaixo, listamos propriedades da diferença e da complementação de conjuntos e suas representações em diagrama de Venn-Euler.

Propriedades da Diferença e da Complementação:

1. $C_A B \cap B = \varnothing$ e $C_A B \cup B = A$
2. $C_A A = \varnothing$ e $C_A \varnothing = A$
3. $C_A(C_A B) = B$
4. $C_A(B \cap C) = C_A B \cup C_A C$
5. $C_A(B \cup C) = C_A B \cap C_A C$
6. $A \cup A^c = U$ e $A \cap A^c = \varnothing$
7. $U^c = \varnothing$ e $\varnothing^c = U$
8. $(A^c)^c = A$
9. $A - B = A \cap B^c$
10. Se $A \subset B$, então $B^c \subset A^c$

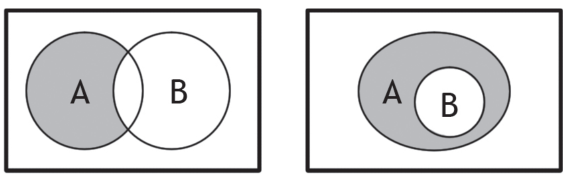

Figura 14 – Diferença de conjuntos

A demonstração do teorema seguinte, como as anteriores, pode ser encontrada na literatura básica de Teoria dos Conjuntos. Faça-a como exercício.

TEOREMA 6

Quaisquer que sejam os conjuntos A e B valem:

1. $(A - B) \subset A$
2. Os conjuntos $A - B$, $A \cap B$ e $B - A$ são mutuamente disjuntos.

3.5 PRODUTO CARTESIANO - DEFINIÇÃO

Para definir o *produto cartesiano* de conjuntos, precisamos antes saber o que é um *par ordenado*. De acordo com Lima (2003, p. 78), "um par ordenado $p = (x, y)$ é formado por um objeto x, chamado a *primeira coordenada* de p e um objeto y, chamado a *segunda coordenada* de p".

É fácil perceber que dois pares ordenados $p = (x, y)$ e $q = (u, v)$ são iguais se, e somente se, eles tiverem a mesma primeira coordenada e a mesma segunda coordenada, isto é, quando $x = u$ e $y = v$.

SAIBA MAIS!

O par ordenado $p = (x, y)$ é diferente do conjunto $\{x, y\}$, pois $\{x, y\} = \{y, x\}$ sempre, enquanto $(x, y) = (y, x)$ só é verdadeira quando $x = y$.

DEFINIÇÃO 9

Chama-se *produto cartesiano de dois conjuntos A e B, o conjunto, denotado por A × B (que se lê "A cartesiano B" ou "produto cartesiano de A por B"), formado por todos os pares ordenados (x, y), cuja primeira coordenada x pertence a A e cuja segunda coordenada y pertence a B. Simbolicamente:*

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ e } x \in B\}.$$

Exemplo 24:

Sejam $A = \{a, b, c\}$ e $B = \{1, 2\}$. Então:

$A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}$

$B \times A = \{(1, a), (2, a), (1, b), (2, b), (1, c), (2, c)\}$

$A \times A = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (c, c)\}$

$B \times B = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$

ATENÇÃO!

Quando A ou B for o conjunto vazio, temos $A \times \varnothing$, $\varnothing \times B$ e $\varnothing \times \varnothing$.

Nesta aula, vimos noções básicas sobre conjuntos. Essas noções são essenciais, pois constituem uma importante ferramenta que você poderá aplicar em todo o seu curso. Na próxima aula, retomaremos os tópicos próprios da lógica.

SAIBA MAIS

Você pode aprofundar seus conhecimentos consultando as referências que citamos e/ou visitando páginas da *internet*. Abaixo listamos alguns *links* interessantes que podem ajudá-lo nessa pesquisa:

http://www.math.ist.utl.pt/~jmatos/ltc/ltc.pdf

www2.dm.ufscar.br/~sampaio/itc2004cap2.pdf

AULA 5 | Implicações, equivalências, afirmações e demonstrações

Olá! Chegamos à nossa quinta aula. Você já conhece um pouco da linguagem da Lógica e dos Conjuntos e sabe, inclusive, realizar certas operações. Sabe, ainda que é possível, natural e útil, relacionar essas linguagens.

Nesta aula, você terá a oportunidade de conhecer duas importantes relações entre proposições: a implicação lógica e a equivalência lógica. Veremos que esses dois conceitos desempenham um papel fundamental nas afirmações matemáticas. Apresentaremos ainda os significados dos principais termos utilizados em uma teoria axiomática e os principais tipos de demonstração usados para validar logicamente certas afirmações da Matemática. Então, mãos à obra e bons estudos!

Objetivos

- Conhecer as relações de implicação lógica e de equivalência lógica
- Diferenciar os principais tipos de afirmações na Matemática
- Analisar e saber usar os diferentes tipos de demonstrações
- Construir algumas demonstrações

TÓPICO 1

Implicações lógicas

Objetivos

- Entender quando uma proposição implica outra
- Conhecer as propriedades das implicações

1.1 INTRODUÇÃO - DEFINIÇÕES

Neste tópico, apresentaremos a relação de implicação. A compreensão desse conceito será fundamental para estudarmos, em tópicos futuros, certos tipos de afirmações e demonstrações que se apresentam na Matemática. Antes, porém, vejamos alguns conceitos introdutórios.

DEFINIÇÃO 1

Duas proposições são ditas independentes quando, em suas tabelas-verdade, ocorrem todas as quatro alternativas VV, VF, FV e FF. Do contrário, ou seja, quando nas tabelas-verdade de duas proposições não ocorre pelo menos uma das quatro alternativas VV, VF, FV e FF, dizemos que elas são dependentes. Quando duas proposições são dependentes, dizemos ainda que existe uma relação entre elas.

Exemplo 1:

As proposições $\sim p$ e $p \leftrightarrow q$ são independentes, como pode ser observado em suas tabelas verdades.

p	q	$\sim p$	$p \leftrightarrow q$
V	V	F	**V**
V	F	F	**F**
F	V	V	**F**
F	F	V	**V**

Note que ocorrem as quatro alternativas: VV ocorre na linha 4, VF ocorre na linha 3, FV ocorre na linha 1 e FF ocorre na linha 2.

Exemplo 2:

As proposições p e $q \rightarrow p$ são dependentes, como pode ser observado em suas tabelas verdades.

p	q	$q \rightarrow p$
V	V	V
V	F	V
F	V	F
F	F	V

SAIBA MAIS!

Uma relação entre proposições em que não ocorre exatamente uma das alternativas VV, VF, FV, FF é dita uma relação simples, enquanto uma relação em que não ocorrem exatamente duas das alternativas é dita uma relação composta.

Note que ocorre a alternativa VV nas linhas 1 e 2, FV na linha 4 e FF na linha 3, mas não ocorre a alternativa VF. Portanto, existe uma relação entre as proposições p e $q \rightarrow p$.

Note que a relação do Exemplo 2 é uma relação simples. Estamos agora em condições de introduzir os conceitos de implicação e de equivalência.

DEFINIÇÃO 2

Dizemos que uma proposição P implica (ou implica logicamente) uma proposição Q, e representaremos por $P \Rightarrow Q$, quando, em suas tabelas-verdade, <u>não ocorre</u> VF (nessa ordem) numa mesma linha. Equivalentemente, $P \Rightarrow Q$ quando Q é verdadeira (V) todas as vezes que P for verdadeira (V).

GUARDE BEM ISSO!

$P \Rightarrow Q$ quando não ocorre P e Q com valores lógicos simultâneos respectivamente V e F.

Exemplo 3:

Observe as tabelas-verdade das proposições $p \wedge q$ e $p \leftrightarrow q$. Note que, sempre que $p \wedge q$ é verdadeira (V), $p \leftrightarrow q$ é também verdadeira (V).

p	q	p ∧ q	p ↔ q
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	F	F
F	F	F	V

Portanto, não ocorre a alternativa **VF** (nessa ordem) nas tabelas-verdade de p ∧ q e p ↔ q. Logo, p ∧ q implica p ↔ q ou, simbolicamente, p ∧ q ⇒ p ↔ q.

1.2 TEOREMA E COROLÁRIO

O teorema seguinte estabelece uma relação entre a implicação lógica e certa proposição condicional. Sua demonstração pode ser vista em Alencar Filho (2002, p. 52):

TEOREMA 1

A proposição P implica a proposição Q, isto é, $P \Rightarrow Q$ se, e somente se, a condicional $P \rightarrow Q$ é uma tautologia.

VOCÊ SABIA?

Toda proposição implica uma tautologia, e somente uma contradição implica uma contradição.

Portanto, toda implicação corresponde a uma condicional tautológica, e vice-versa. Mediante o *Princípio da Substituição* visto no Teorema 2 da Aula 3, uma consequência deste teorema é o seguinte corolário:

COLÁRIO 1

Sejam $p_1, p_2, \ldots, p_n$ proposições simples dadas. Se $P(p_1, p_2, \ldots, p_n) \Rightarrow Q(p_1, p_2, \ldots, p_n)$, então temos também $P(p_1', p_2', \ldots, p_n') \Rightarrow Q(p_1', p_2', \ldots, p_n')$ quaisquer que sejam as proposições simples ou compostas $p_1', p_2', \ldots, p_n'$.

GUARDE BEM ISSO!

Podemos substituir as proposições simples componentes em uma implicação por outras proposições quaisquer que ainda teremos uma implicação.

Vejamos mais alguns exemplos nos exercícios seguintes.

Exercício resolvido 1:

Usando tabela-verdade, prove que $p \wedge q \Rightarrow p \vee q$.

Solução:

Vamos construir a tabela-verdade da condicional $p \wedge q \rightarrow p \vee q$:

p	**q**	**$p \wedge q$**	**$p \vee q$**	**$p \wedge q \rightarrow p \vee q$**
V	V	V	V	**V**
V	F	F	V	**V**
F	V	F	V	**V**
F	F	F	F	**V**

Portanto, a condicional $p \wedge q \rightarrow p \vee q$ é tautológica, pois, na última coluna de sua tabela-verdade, ocorre somente o valor lógico **V**. Logo, pelo Teorema 1, a proposição $p \wedge q$ implica $p \vee q$ ou, simbolicamente, $p \wedge q \Rightarrow p \vee q$.

Exercício resolvido 2:

Verifique, usando tabela-verdade, se a proposição $p \leftrightarrow \sim q$ implica, ou não, a proposição $\sim p \rightarrow \sim q$.

Solução:

Vamos construir a tabela-verdade da condicional $(p \leftrightarrow \sim q) \rightarrow (\sim p \rightarrow \sim q)$:

p	**q**	**$\sim p$**	**$\sim q$**	**$p \leftrightarrow \sim q$**	**$\sim p \rightarrow \sim q$**	**$(p \leftrightarrow \sim q) \rightarrow (\sim p \rightarrow \sim q)$**
V	V	F	F	F	V	V
V	F	F	V	V	V	V
F	V	V	F	V	F	F
F	F	V	V	F	V	V

Portanto, a condicional $(p \leftrightarrow \sim q) \rightarrow (\sim p \rightarrow \sim q)$ não é tautológica, pois, na última coluna de sua tabela-verdade, ocorre o valor lógico **F**. Logo, pelo Teorema 1, a proposição $p \leftrightarrow \sim q$ não implica $\sim p \rightarrow \sim q$ ou, simbolicamente, $p \leftrightarrow \sim q \nRightarrow \sim p \rightarrow \sim q$.

Os símbolos lógicos "$\rightarrow$" e "$\Rightarrow$" não possuem o mesmo significado lógico. De acordo com Daghlian (1995, p. 47), é importante:

> Não confundir os símbolos $\rightarrow$ e $\Rightarrow$, pois, enquanto o primeiro representa uma operação entre proposições dando origem a uma nova proposição, o segundo indica apenas uma relação entre duas proposições dadas.

É fácil notar que a relação de implicação goza das propriedades:

Reflexiva: $P \Rightarrow P$;

Transitiva: Se $P \Rightarrow Q$ e $Q \Rightarrow R$, então $P \Rightarrow R$.

Associada à implicação $P \Rightarrow Q$ (P implica Q) está a implicação $\sim Q \Rightarrow \sim P$ (a negação de Q implica a negação de P).

Vale ressaltar que muitas afirmações (resultados) na Matemática são apresentadas na forma:

$H\ (Hipótese) \Rightarrow T\ (Tese)$.

A demonstração de tais afirmações consiste em: supondo-se que a *hipótese* seja verdadeira, deve-se provar que a *tese* é verdadeira.

Nesses casos, e em muitas outras situações, é muito comum substituir a implicação $P \Rightarrow Q$ por $\sim Q \Rightarrow \sim P$, a fim de tornar seu significado mais claro ou manejável.

Agora que você já sabe o que é uma implicação lógica, passemos à definição de equivalência lógica.

SAIBA MAIS

A implicação $\sim Q \Rightarrow \sim P$ diz a mesma coisa que a implicação $P \Rightarrow Q$, ou seja, a implicação $\sim Q \Rightarrow \sim P$ nada mais é do que a implicação $P \Rightarrow Q$ dita com outras palavras, ou vista de um ângulo diferente. Portanto, $P \Rightarrow Q$ se, e somente se, $\sim Q \Rightarrow \sim P$.

GUARDE BEM ISSO!

É muito importante compreender que $P \Rightarrow Q$ e $\sim Q \Rightarrow \sim P$ são afirmações equivalentes e que essa equivalência é a base das demonstrações por absurdo.

TÓPICO 2

Equivalências lógicas

Objetivos

- Entender quando duas proposições são equivalentes
- Conhecer as propriedades das equivalências

2.1 INTRODUÇÃO - DEFINIÇÃO

Neste tópico, apresentaremos a relação de *equivalência*. Assim como o conceito de implicação, esse é um conceito fundamental para compreendermos certos tipos de afirmações e demonstrações que se apresentam na Matemática.

DEFINIÇÃO 3

Dizemos que uma proposição P é equivalente (ou logicamente equivalente) a uma proposição Q, e representaremos por $P \Leftrightarrow Q$, quando, em suas tabelas-verdade, não ocorrem VF nem FV em uma mesma linha. Equivalentemente, $P \Leftrightarrow Q$ quando as tabelas-verdade de P e Q são idênticas.

Exemplo 4:

As proposições $\sim\sim P$ e P são equivalentes, ou seja, toda afirmação é equivalente à sua dupla negação. De fato, basta verificar que as tabelas-verdade de $\sim\sim P$ e de P são idênticas:

P	$\sim P$	$\sim\sim P$
V	F	V
F	V	F

Portanto, simbolicamente, temos $\sim\sim P \Leftrightarrow P$, chamada *Regra da Dupla Negação*.

Exemplo 5:

As proposições $p \rightarrow q$ e $\sim p \vee q$ são equivalentes, ou seja, uma bicondicional é equivalente à disjunção da negação do antecedente com o seu consequente. Simbolicamente, representamos $(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \vee q)$. Das tabelas-verdade de $p \rightarrow q$ e $\sim p \vee q$, temos:

p	q	~ p	p → q	~ p ∨ q
V	V	F	V	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

Note que as tabelas-verdade de $p \rightarrow q$ e $\sim p \vee q$ são idênticas.

2.2 TEOREMA E COROLÁRIO

O teorema seguinte estabelece uma relação entre a equivalência lógica e certa proposição bicondicional. Sua demonstração pode ser vista em Alencar Filho (2002, p. 52)

TEOREMA 2

A proposição P implica a proposição Q, isto é, $P \Leftrightarrow Q$ se, e somente se, a condicional $P \leftrightarrow Q$ é uma tautologia.

Portanto, toda equivalência corresponde a uma bicondicional tautológica, e vice-versa. Mediante o *Princípio da Substituição* visto no Teorema 2 da Aula 3, uma consequência deste teorema é o seguinte corolário:

COLÁRIO 2

Sejam $p_1, p_2, \ldots, p_n$ proposições simples dadas. Se $P(p_1, p_2, \ldots, p_n) \Leftrightarrow Q(p_1, p_2, \ldots, p_n)$, então temos também $P(p_1', p_2', \ldots, p_n') \Leftrightarrow Q(p_1', p_2', \ldots, p_n')$ quaisquer que sejam as proposições simples ou compostas $p_1', p_2', \ldots, p_n'$.

GUARDE BEM ISSO!

Podemos substituir as proposições simples componentes em uma equivalência por outras proposições quaisquer que ainda teremos uma equivalência.

Vejamos mais alguns exemplos nos exercícios seguintes.

Exercício resolvido 3:

Usando a tabela-verdade, mostre a chamada *Regra de Absorção*: $p \to p \wedge q \Leftrightarrow p \to q$.

Solução:

Vamos construir a tabela-verdade da bicondicional $(p \to p \wedge q) \leftrightarrow (p \to q)$:

P	q	$p \wedge q$	$p \to p \wedge q$	$p \to q$	$(p \to p \wedge q) \leftrightarrow (p \to q)$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	F	V
F	V	F	V	V	V
F	F	F	V	V	V

Portanto, a bicondicional $(p \to p \wedge q) \leftrightarrow (p \to q)$ é tautológica, pois, na última coluna de sua tabela-verdade, ocorre somente o valor lógico **V**. Logo, pelo Teorema 2, as proposições $p \to p \wedge q$ e $p \to q$ são equivalentes, ou seja, ocorre $p \to p \wedge q \Leftrightarrow p \to q$.

Exercício resolvido 4:

Verifique, usando a tabela-verdade, que a proposição $p \leftrightarrow q$ é equivalente à conjunção das duas condicionais $p \to q$ e $q \to p$, ou seja, mostre que $p \leftrightarrow q$ e $(p \to q) \wedge (q \to p)$ são equivalentes.

Solução:

Vamos construir as tabelas-verdade das proposições $p \leftrightarrow q$ e $(p \to q) \wedge (q \to p)$:

p	q	$p \to q$	$q \to p$	$p \leftrightarrow q$	$(p \to q) \wedge (q \to p)$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	F	F
F	F	V	V	V	V

ATENÇÃO!

Os símbolos lógicos "$\leftrightarrow$" e "$\Leftrightarrow$" não possuem o mesmo significado lógico. Portanto, cuidado para não confundi-los. Enquanto o primeiro representa uma operação entre proposições dando origem a uma nova proposição, a bicondicional, o segundo indica apenas uma relação entre duas proposições dadas, a equivalência.

Portanto, as tabelas-verdade de $p \leftrightarrow q$ e $(p \to q) \wedge (q \to p)$ são idênticas. Logo, as proposições $p \leftrightarrow q$ e $(p \to q) \wedge (q \to p)$ são equivalentes. Simbolicamente, temos:

$p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \to q) \wedge (q \to p)$.

É fácil notar que a relação de equivalência goza das propriedades:

Reflexiva: $P \Leftrightarrow P$;

Simétrica: Se $P \Leftrightarrow Q$, então $Q \Leftrightarrow P$;

Transitiva: Se $P \Leftrightarrow Q$ e $Q \Leftrightarrow R$, então $P \Leftrightarrow R$.

A exemplo do que vimos para implicação, destacamos também que existe um grande número de afirmações (resultados) na Matemática que são apresentadas na forma:

$$A \Leftrightarrow B\,.$$

A demonstração de tais afirmações consiste em demonstrar as duas implicações:

$$A \Rightarrow B \text{ e } B \Rightarrow A\,.$$

Voltemos agora à condicional $P \to Q$. Associadas a ela existem algumas outras proposições condicionais correlacionadas que têm papel fundamental na comunicação em Matemática. Vejamos na próxima definição quais são essas condicionais e, no teorema seguinte, como elas estão relacionadas.

2.3 DEFINIÇÃO

DEFINIÇÃO 4

São proposições associadas à condicional $P \to Q$ as seguintes proposições condicionais contendo P e Q:

1. $Q \to P$: proposição recíproca de $P \to Q$;
2. $\sim P \to \sim Q$: proposição contrária de $P \to Q$;
3. $\sim Q \to \sim P$: proposição contrapositiva de $P \to Q$.

Exemplo 6:

Dadas as proposições:

P: A e B são ângulos opostos pelo vértice.

Q: A e B são ângulos de medidas iguais.

Considere a condicional $P \to Q$, que em linguagem corrente é:

"Se A e B são ângulos opostos pelo vértice, então A e B são ângulos de medidas iguais".

Logo, as proposições recíproca, contrária e contrapositiva associadas a $P \to Q$ são

→ Recíproca: $Q \to P$, que é "se A e B são ângulos de medidas iguais, então A e B são ângulos opostos pelo vértice".

→ Contrária: $\sim P \to \sim Q$, que é "se A e B não são ângulos opostos pelo vértice, então A e B são ângulos de medidas diferentes".

→ Contrapositiva: $\sim Q \to \sim P$, que é "se A e B são ângulos de medidas diferentes, então A e B não são ângulos opostos pelo vértice".

Analisando a construção dessas proposições, é fácil concluir que a proposição $P \to Q$ e sua contrapositiva $\sim Q \to \sim P$ são ambas verdadeiras (V) e que a recíproca $Q \to P$ e a contrária $\sim P \to \sim Q$ de $P \to Q$ são ambas falsas (F).

As conclusões feitas no Exemplo 6 são verdades válidas de modo geral. Mais precisamente, analisando as tabelas-verdade de uma condicional $P \to Q$ e de suas três proposições associadas:

P	Q	$\sim P$	$\sim Q$	$P \to Q$	$Q \to P$	$\sim P \to \sim Q$	$\sim Q \to \sim P$
V	V	F	F	V	V	V	V
V	F	F	V	F	V	V	F
F	V	V	F	V	F	F	V
F	F	V	V	V	V	V	V

é possível concluir que (cf. ALENCAR FILHO, 2002)

→ A condicional $P \to Q$ e a sua contrapositiva $\sim Q \to \sim P$ são equivalentes ou, simbolicamente:

$$P \to Q \Leftrightarrow \sim Q \to \sim P$$

→ A recíproca $Q \to P$ e a contrária $\sim P \to \sim Q$ da condicional $P \to Q$ são equivalentes ou, simbolicamente:

$$Q \to P \Leftrightarrow \sim P \to \sim Q .$$

Essas tabelas mostram também que a condicional e a sua recíproca ou a sua contrária não são equivalentes.

Neste tópico, vimos o que é uma equivalência lógica e sua importância para a Matemática. No próximo tópico, teremos a oportunidade de aplicar os conhecimentos adquiridos, neste tópico e no anterior, no estudo dos tipos de demonstrações.

VOCÊ SABIA?

1. A contrária $\sim P \to \sim Q$ de $P \to Q$ é também chamada inversa de $P \to Q$.
2. A contrapositiva de $P \to Q$ é a contrária da recíproca de $P \to Q$, sendo também chamada de contra-recíproca.
3. $P \to Q$ é dita direta em relação às suas proposições associadas.

TÓPICO 3

Tipos de afirmações na matemática

OBJETIVOS

- Conhecer os significados dos principais tipos de afirmações na Matemática
- Diferenciar os principais tipos de afirmações na Matemática

3.1 INTRODUÇÃO

Toda a Matemática está baseada em afirmações, algumas das quais necessitam de uma comprovação lógica de seu resultado. Essas afirmações recebem denominações específicas que são *conceitos primitivos*, *definições*, *axiomas*, *postulados*, *teoremas*, *proposições*, *corolários* e *lemas*.

Neste tópico, estudaremos os significados desses tipos de afirmações da Matemática. Esse conhecimento é fundamental, pois as proposições e as afirmações dentro da Matemática exercem um papel central, sendo muito comum introduzirmos novas proposições e afirmações (e, portanto, tratar de novos temas e/ou teorias) a partir de proposições e afirmações já existentes.

3.2 O MÉTODO AXIOMÁTICO

Os princípios básicos da Matemática (fundamentos da Matemática), ou seja, os modos como a ela se estrutura, é objeto de estudo da *filosofia da Matemática*, que busca ainda caracterizar e explicar o estado presente da evolução da Matemática, justificando-o criticamente (COSTA, 2008). São três as correntes principais: *logicismo*, *intuicionismo* e *formalismo*.

Todas essas teorias contribuíram para a evolução da Matemática, sendo marcadas por uma renovação de ideias que são utilizadas até hoje. O logicismo foi fundado por Bertrand Russell (1872-1970) e por Gottlob Frege (1848-1925) e estabelece que "a Matemática reduz-se à lógica". O intuicionismo é a teoria estabelecida por Brouwer (1881-1966) e procura demonstrar que "o saber matemático escapa a toda e qualquer caracterização simbólica e se forma em etapas sucessivas que não podem ser conhecidas de antemão''. O criador e principal representante do formalismo foi o alemão David Hilbert (1862-1943), um dos maiores matemáticos contemporâneos. O formalismo nasceu das conquistas alcançadas pelo chamado ''método axiomático''.

O método axiomático encontra aplicação praticamente em toda a Matemática, constituindo-se, hoje, na técnica básica desta ciência. De acordo com Costa (2008, p. 33):

> Para se estudar uma teoria pelo método axiomático, procede-se assim: escolhe-se certo número de noções e de proposições primitivas, suficientes para sobre elas edificar a teoria, aceitando-se outras idéias ou outras proposições só mediante, respectivamente, definições e demonstrações; obtém-se, dessa maneira, uma axiomática material da teoria dada; deixam-se de lado os significados intuitivos dos conceitos primitivos, considerando-os como termos caracterizados implicitamente pelas proposições primitivas. Procuram-se, então, as conseqüências do sistema obtido, sem preocupação com a natureza ou com o significado inicial desses termos ou das relações entre eles existentes. Estrutura-se, assim, o que se denomina uma axiomática abstrata.

O método axiomático é de grande importância e, há muito tempo, vem sendo praticado na Matemática. Euclides (325 a.C-265 a.C.), por exemplo, em seu livro *Os Elementos*, aplica o método no desenvolvimento da geometria.Em sua exposição sistemática da geometria, Euclides parte de determinadas noções tidas como claras (ponto, reta, etc.) e de certas proposições admitidas sem demonstração (por exemplo: ''dois pontos distintos definem uma reta''). Na teoria de Euclides, as proposições são de dois tipos: os *axiomas*, que são enunciados evidentes comuns a todas as ciências, como ''o todo é igual à soma de suas partes''; e os *postulados*, que exprimem propriedades estritamente geométricas (algumas vezes, não tão evidentes quanto os axiomas), como ''por um ponto dado fora de uma reta, passa no máximo uma paralela a essa reta''.

Atualmente, não se faz distinção entre axiomas e postulados. Costa (2008, p. 44) afirma que

> As proposições que não se demonstram se chamam proposições primitivas, não sendo necessário nem conveniente classificá-las em axiomas e em postulados. Na realidade, hoje, as palavras ''axioma'' e ''postulado'' são sinônimas e significam proposições primitivas.

Com a evolução da Matemática, o método axiomático tornou-se cada vez mais rigoroso, chegando a um alto grau de perfeição lógica nas últimas décadas do século passado, com as contribuições de Pasch, Peano, Pieri, entre outros.

Nas teorias axiomáticas, existem apenas duas categorias de enunciados: as *proposições primitivas*, que são proposições aceitas sem demonstração (não havendo preocupação se são evidentes ou não); e as *proposições demonstradas* (teoremas, proposições, corolários e lemas) por meio de raciocínios logicamente corretos, a partir dos postulados. O esquema seguinte (Figura 15) dá uma ideia da estruturação de uma teoria axiomática.

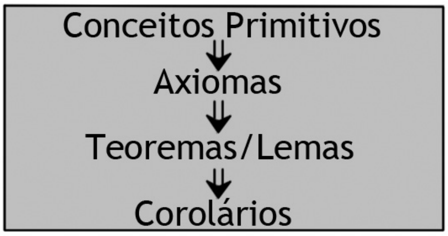

Figura 15 – Esquema da estrutura do método axiomático

O método axiomático constitui um ótimo instrumento de trabalho e de pesquisa para a Matemática e, por meio dele, foram alcançados grandes avanços em álgebra, em topologia e em outros ramos da Matemática. A seguir, procuramos relacionar e explicitar o significado dos principais termos utilizados no método axiomático.

Conceitos Primitivos ou **Entes Primitivos**: palavras (ou conjuntos de palavras) reservadas aceitas sem a necessidade de definição. Em geral, são termos bem intuitivos e de fácil aceitação, cujos significados ficarão formalmente mais evidentes com o seu uso. O exemplo clássico é o "ponto". Não definimos o que é um ponto, apenas o aceitamos.

Definições: conceitos dados em função de termos considerados previamente conhecidos. Consiste numa reserva de palavras. Por exemplo: "um segmento de reta é uma parte ou porção de uma reta limitada por dois pontos". Aqui são considerados conhecidos os termos ponto, reta, parte, dentre outros.

Axiomas e/ou **Postulados**: proposições evidentes por si mesmas e aceitas sem demonstração (ou seja, tidas como verdadeiras). Em geral, tratam das relações entre os termos reservados, determinando como devem se comportar ou estabelecendo propriedades. São exemplos: "o todo é igual à soma de suas partes" e "dois pontos distintos definem uma reta".

Teoremas: proposições que podem ser demonstradas. Atualmente, costumamos deixar o termo "teorema" apenas para certas afirmações que podem ser provadas e que são de grande importância. Esse termo foi introduzido por Euclides, em sua obra *Os Elementos*, e, no grego, significava originalmente "espetáculo" ou "festa". Para ser aceito como logicamente verdadeiro, um teorema precisa de uma demonstração ou prova. Em geral, o enunciado de um teorema é composto de duas partes distintas: *hipóteses* (conjunto de condições aceitas como verdadeiras), e *tese* (verdade lógica que deve ser provada). Vejamos um exemplo: "se dois ângulos são opostos pelo vértice, então são congruentes".

Corolários: proposições que são consequências diretas ou imediatas dos teoremas. São também demonstráveis, mas, em geral, suas demonstrações são bem mais simples que a dos teoremas, sendo muitas vezes omitidas.

Lemas: proposições auxiliares para as demonstrações dos teoremas. Podemos dizer que um lema é uma espécie de "pré-teorema".

Para fixar melhor, vamos apresentar o teorema seguinte com propriedades básicas da negação, da conjunção e da disjunção.

TEOREMA 3

Se p, q e r são proposições quaisquer, t é uma tautologia e c é uma contradição, então:

1. $\sim(\sim p) \Leftrightarrow p$	(dupla negação)
2. $p \wedge p \Leftrightarrow p$	(idempotente da conjunção)
3. $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$	(comutativa da conjunção)
4. $(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$	(associativa da conjunção)
5. $p \wedge t \Leftrightarrow p$ e $p \wedge c \Leftrightarrow c$	(identidades da conjunção)
6. $p \vee p \Leftrightarrow p$	(idempotente da disjunção)
7. $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$	(comutativa da disjunção)
8. $(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$	(associativa da disjunção)
9. $p \vee t \Leftrightarrow t$ e $p \vee c \Leftrightarrow p$	(identidades da disjunção)
10. $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	(distributiva da conjunção em relação à disjunção)
11. $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	(distributiva da disjunção em relação à conjunção)
12. $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$	(regra de absorção)
13. $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$	(regra de absorção)
14. $\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$	(regra de De Morgan)
15. $\sim(p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$	(regra de De Morgan)

Demonstração: as demonstrações destas propriedades podem ser feitas com o auxílio de tabelas-verdade e serão deixadas como exercícios para você.

TÓPICO 4

Tipos de demonstrações na matemática

OBJETIVO

- Conhecer e usar diferentes tipos de demonstrações

4.1 INTRODUÇÃO

Neste tópico, faremos uma abordagem sobre como se fazem as demonstrações na Matemática. Como vimos no tópico anterior, há vários tipos de afirmações na Matemática. Essas afirmações, tais como teoremas, corolários e lemas, necessitam ser demonstradas, ou seja, precisam ser confirmadas à luz do raciocínio lógico da área em que estão inseridas. É dessa forma que, desde os tempos de Euclides, a Matemática formula as suas teorias.

Sabemos que um teorema é uma afirmação declarativa sobre Matemática, para a qual existe uma *prova* ou *demonstração*. Mas, afinal, o que é uma demonstração?

A piada a seguir ilustra bem essa busca da verdade pelos matemáticos: "um engenheiro, um físico e um matemático estão fazendo um passeio de trem pela Escócia e observam umas ovelhas negras em uma colina.

- Olhe, diz o engenheiro, as ovelhas nesta parte da Escócia são negras!

- Na verdade, responde o físico, você não deve tirar conclusões precipitadas.

VOCÊ SABIA?

Nas ciências, a verdade surge da experimentação. Na lei, a verdade é avaliada por um julgamento e decidida por um juiz e/ou júri. Em Matemática, temos a demonstração ou prova, espécie de dissertação que comprova de maneira irrefutável a veracidade de uma dada afirmação. Na Matemática, dizer que uma afirmação é verdadeira significa dizer que ela é absolutamente verdadeira, sem exceção. Uma afirmação que não é absolutamente verdadeira nesse sentido é chamada falsa.

Tudo o que podemos dizer é que, nesta parte da Escócia, há algumas ovelhas negras.

- Bem, ao menos de um lado, diz o matemático.

É com esse espírito que um matemático costuma desempenhar uma de suas atividades prediletas: *demonstrar afirmações*.

Pensando em afirmações demonstráveis, podemos dizer que uma demonstração é uma espécie de raciocínio que permite concluir ou estabelecer uma tese, supondo compreendidas as condições dadas nas hipóteses. O esquema seguinte (Figura 16) ilustra como se dá esse processo.

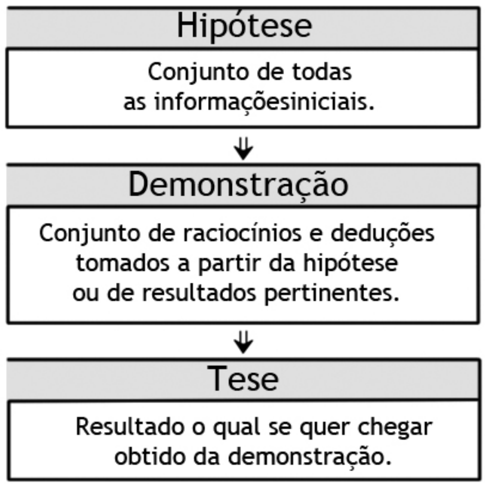

Figura 16 – Esquema do processo de demonstração

4.2 TIPOS DE DEMONSTRAÇÕES

Existem várias formas de se fazer demonstrações, entre as quais se destacam:

Demonstrações Diretas ou **Dedutivas**: utilizam-se das informações contidas nas hipóteses e/ou de outras afirmações pertinentes e são obtidas por meio de uma sequência lógica coerente de raciocínios. Dito de outro modo, o método dedutivo para demonstrar um teorema do tipo $P \Rightarrow Q$ consiste em deduzir que Q é verdadeira, assumindo que a proposição P é verdadeira e utilizando equivalências lógicas e fatos pré-estabelecidos. A demonstração direta é o tipo de demonstração mais comum na Matemática.

Demonstrações por Contraposição: consistem na utilização da equivalência lógica $P \to Q \Leftrightarrow \sim Q \to \sim P$. Mostrarmos o teorema $P \Rightarrow Q$, utilizando o método de demonstração direta para provar que $\sim Q \Rightarrow \sim P$. Esse tipo de demonstração é também muito utilizado na Matemática, uma vez que, para muitas afirmações, é mais fácil demonstrar sua contrapositiva.

Demonstrações por Redução ao Absurdo ou **por Contradições** ou **Indiretas**: consistem na utilização da equivalência lógica $P \to Q \Leftrightarrow (P \wedge \sim Q) \to \sim P$.

Mostrarmos o teorema $P \Rightarrow Q$, indicando que $(P \wedge \sim Q) \to \sim P$. Isso resulta em um absurdo, uma vez que P é verdadeira e concluímos que $\sim P$ também é verdadeira, resultando que $P \wedge \sim P$ é também verdadeira. Isso é evidentemente uma contradição. Portanto, estrategicamente, a demonstração por redução ao absurdo, ou simplesmente *demonstração por absurdo*, é baseada na negação lógica da tese e consequente contradição da hipótese. Esse tipo de demonstração é considerada por alguns autores uma "jóia do raciocínio dedutivo", sendo uma das mais sutis e grandes "armas" da Matemática.

Demonstração por Indução: técnica de demonstração que consiste em, partindo de certas observações particulares, obter conclusões mais gerais. Demonstrações por indução são também bastante comuns dentro da Matemática. A *indução por enumeração* é o tipo mais simples de demonstração por indução. Nela, uma conclusão sobre *todos* os elementos de uma classe é obtida de premissas que se referem a elementos *particulares* dessa classe. Destacamos o *Princípio da Indução Matemática*, utilizado para demonstrar proposições que dependem dos números inteiros.

SAIBA MAIS

Há vários livros na internet sobre lógica e demonstrações matemáticas. Você pode consultá-los para continuar estudando e complementando seus conhecimentos. Recomendamos que você veja um vídeo que se encontra no site do Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA): http://strato.impa.br/capem_jul2004.html. Ele trata de indução com o saudoso Professor Augusto Cesar Morgado. Abaixo, listamos mais algumas páginas que poderão ajudá-lo. Bons estudos!

1. http://pucrs.campus2.br/~annes/inflog.html
2. http://www.pucsp.br/~logica/
3. http://wwmat.mat.fc.ul.pt/~jnsilva/logica97/logica97.html
4. http://rogesantana.vilabol.uol.com.br/modulo_1/Logos1.htm#roge05

Durante todo o seu curso, você terá várias oportunidades de ver e resolver cada um desses tipos de demonstrações.

Nesta aula, vimos as relações de implicação e de equivalência lógica e os principais tipos de afirmações e de demonstrações usadas na Matemática. Na próxima aula, trataremos de sentenças abertas e de quantificadores.

Existem inúmeras demonstrações diretas na Matemática. Nos exercícios, proporemos que o aluno faça algumas delas. Ele deverá pesquisar nos livros de Matemática as demonstrações que já viu e verificar de que tipo de demonstração se trata.

AULA 6 | Sentenças abertas e quantificadores

Esta é a nossa última aula. Nela trataremos de dois temas que estão bem presentes nas afirmações e demonstrações da Matemática, fazendo mesmo parte da linguagem e da notação comumente utilizadas nesta área: as sentenças abertas e os quantificadores.

Sentenças abertas e quantificadores são elementos da chamada Lógica de Primeira Ordem (LPO) ou Cálculo de Predicados de Primeira Ordem (CPPO). A LPO é um sistema lógico que generaliza a lógica que estudamos até aqui – a Lógica Proposicional ou Cálculo Proposicional. Veremos que é possível operar na LPO da mesma forma que na Lógica Proposicional. As sentenças abertas funcionam como operandos na LPO e os quantificadores são operadores especiais que transformam sentenças abertas em proposições. Então, anime-se e vamos iniciar o trabalho!

Objetivos

- Conhecer sentenças abertas
- Determinar o conjunto-verdade de sentenças abertas
- Conhecer operações de quantificação e quantificadores
- Determinar o valor lógico de sentenças abertas quantificadas
- Construir algumas demonstrações

TÓPICO 1

Sentenças abertas com uma variável

Objetivos

- Definir sentenças abertas com uma variável
- Determinar conjuntos-verdade de sentenças abertas
- Construir sentenças abertas

1.1 INTRODUÇÃO

Até aqui, temos tratado da Lógica Proposicional (ou Cálculo Proposicional), cujo elemento central são as proposições. Sabemos que as proposições são sentenças para as quais é possível estabelecer um valor lógico (verdade ou falsidade) e que elas podem ser relacionadas por meio de operações lógicas definidas pelos conectivos lógicos.

Introduzindo novos símbolos na linguagem do Cálculo Proposicional, é possível tratar de sentenças mais gerais e complexas. É o que faz a Lógica de Primeira Ordem (ou o Cálculo de Predicados de Primeira Ordem). Além de ser dotada de uma linguagem mais rica, a LPO tem várias aplicações importantes para a Matemática e para outras áreas, especialmente para as Ciências Exatas.

Nesta nova linguagem, além dos *conectivos do cálculo proposicional* e dos *parênteses*, teremos novos símbolos: *variáveis*, *constantes*, *símbolos de funções proposicionais (sentenças abertas)*, *quantificadores* e *termos*.

Vamos iniciar considerando as seguintes sentenças ou expressões:

Exemplo 1:

p: $\sqrt{10} > 3$

q: $x^2 - 3x = 0$

É fácil perceber que a sentença p é uma proposição cujo valor lógico é V(p) = **V**. Já a sentença q carece de valor lógico, ou seja, não é possível atribuir um valor lógico a q. Portanto, q não é uma proposição. Para sermos mais precisos, devemos dizer que o valor lógico de q será conhecido apenas quando x for identificado, ou seja, V(q) será conhecido para cada atribuição de valor a x, podendo ser verdadeira ou falsa, dependendo de tal atribuição. Por exemplo:

→ Para $x = 0$ ou $x = 3$, q será uma proposição verdadeira, isto é, V(q) = **V**.

→ Para $x \neq 0$ e $x \neq 3$, q será uma proposição falsa, isto é, V(q) = **F**.

Esse exemplo deixa claro que existem sentenças para as quais não temos como decidir se assumem valor lógico verdadeiro ou falso. Vejamos mais alguns exemplos:

Atenção!

Ao trabalharmos com sentenças abertas, deve sempre estar claro quem são as variáveis e quais os universos de cada variável.

Exemplo 2:

1. $x^2 - 7x + 10 = 0$.
2. Ela é aluna do curso de Matemática.
3. Ele e ela formam um lindo casal.

Novamente aqui não temos como dizer o valor lógico dessas sentenças, a menos que os objetos desconhecidos em cada uma delas, a saber, "x" em (1), "ela" em (2) e "ele" e "ela" em (3) sejam identificados.

Sentenças como essas do Exemplo 2 são denominadas de *funções proposicionais*, *proposições abertas* ou *sentenças abertas*. Os objetos desconhecidos nas sentenças abertas são chamados *variáveis* e os elementos que uma variável de uma sentença aberta pode assumir, transformando-a em uma proposição, formam o que chamamos de *universo de discurso* (ou simplesmente *universo*), que será denotado por U.

A seguir, definimos de modo mais formal sentença aberta com uma variável. Posteriormente, estenderemos essa definição para sentenças abertas com duas ou mais variáveis.

1.2 SENTENÇA ABERTA COM UMA VARIÁVEL - DEFINIÇÕES

Definição 1

Dado um conjunto A, uma sentença aberta com uma variável em um conjunto A ou simplesmente uma sentença aberta em A é uma expressão P(x) tal que P(a) é uma proposição (verdadeira ou falsa) para todo elemento a $\in$ A. O conjunto A é chamado de conjunto-universo ou apenas universo ou ainda domínio da variável x e um elemento qualquer a $\in$ A é chamado de valor da variável x.

Uma sentença aberta com uma variável em A é também chamada *função proposicional com uma variável em A* ou simplesmente *função proposicional em A* ou ainda *condição em A*.

Quando, nas sentenças abertas, substituímos as variáveis por constantes, estamos fazendo o que chamamos de uma *interpretação* ou *instanciação* da sentença. Assim, "$3^2 - 7 \cdot 3 + 10 = 0$" é uma interpretação de "$x^2 - 7x + 10 = 0$" pela substituição de x por 3.

"Sara é aluna do curso de Matemática" é uma instanciação de "Ela é aluna do curso de Matemática" pela substituição de *ela* por *Sara*.

Essas interpretações são proposições, cujo valor lógico é **V** ou **F**. No primeiro caso, ela é **F**.

Quando, em uma sentença aberta $P(x)$ em A, temos que $P(a)$ é verdadeira (V) para $a \in A$, dizemos que a *satisfaz* ou *verifica* $P(x)$. Definimos:

ATENÇÃO!

Uma sentença aberta $P(x)$ em A torna-se uma proposição sempre que a variável x é substituída por um elemento $a \in A$.

VOCÊ SABIA?

Em uma sentença aberta, as variáveis representam objetos que não estão identificados no universo considerado ("alguém", "algo", etc.) e os valores das variáveis (também chamados constantes) representam objetos identificados do universo ("José", "o ponto A", etc.).

DEFINIÇÃO 2

Conjunto-verdade de uma sentença aberta P(x) em A, denotado por V_P, é o conjunto de todos elementos $a \in A$ que satisfazem (verificam) P(x), ou seja, é o conjunto de todos elementos $a \in A$ tais que P(a) é uma proposição verdadeira. Simbolicamente,

$$V_P = \{a \mid a \in A \wedge P(a) \text{ é } \mathbf{V}\}.$$

De um modo mais simples, o conjunto-verdade de uma sentença aberta $P(x)$ em A é dado por:

$$V_P = \{a \mid a \in A \wedge P(a)\} \text{ ou ainda por}$$

$$V_P = \{a \in A \mid P(a)\}.$$

GUARDE BEM ISSO!

O conjunto-verdade de uma sentença aberta $P(x)$ em A é sempre um subconjunto de A, ou seja, $V_P \subset A$.

Exemplo 3:

Seja $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$ o conjunto dos números naturais. As seguintes expressões são sentenças abertas com uma variável em $\mathbb{N}$:

1. $P(x)$: $2x + 1 < 12$
2. $Q(x)$: $2^x = x^2$
3. $R(x)$: x é divisor de 10
4. $S(x)$: x é quadrado perfeito

Os conjuntos-verdade dessas sentenças abertas são respectivamente:

1. $V_P = \{a \in \mathbb{N} \mid 2a + 1 < 12\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
2. $V_Q = \{a \in \mathbb{N} \mid 2^a = a^2\} = \{2, 4\}$
3. $V_R = \{a \in \mathbb{N} \mid a \text{ é divisor de } 10\} = \{1, 2, 5, 10\}$
4. $V_S = \{a \in \mathbb{N} \mid a \text{ é quadrado perfeito}\} = \{1, 4, 9, ...\} = \{a^2 \text{ com } a \in \mathbb{N}\}$

Vejamos mais alguns exemplos de sentenças abertas interessantes, cujos conjuntos-verdade têm certas peculiaridades:

Exercício resolvido 1:

Determine o conjunto-verdade de cada uma das seguintes sentenças abertas com uma variável:

1. $P(x)$: $x^2 = 2$ em $\mathbb{Z}$ (conjunto dos inteiros)
2. $Q(x)$: $x^2 + 3 \geq 0$ em $\mathbb{R}$ (conjunto dos reais)

Solução:

Sabemos que não existe número inteiro x cujo quadrado seja igual a 2 (na verdade, os únicos números cujo quadrado é igual a 2 são $-\sqrt{2}$ e $\sqrt{2}$ que não são inteiros). Desde que o quadrado de um número real qualquer é maior ou igual a 0, sua soma com 3 é também maior ou igual a 0. Portanto, temos:

1. $V_P = \{a \in \mathbb{Z} \mid a^2 = 2\} = \varnothing$ e 2. $V_Q = \{a \in \mathbb{R} \mid a^2 + 3 \geq 0\} = \mathbb{R}$

O Exemplo 3 e o Exercício resolvido 1 mostram que são possíveis três casos para uma sentença aberta $P(x)$ em A:

→ Nenhum $x \in A$ satisfaz $P(x)$, isto é, $V_P = \varnothing$. Neste caso, dizemos que $P(x)$ é uma *condição impossível* ou uma *propriedade impossível* em A.

→ Alguns (mas não todos) $x \in A$ satisfazem $P(x)$, isto é, $\varnothing \neq V_P \subsetneq A$ (V_P é um subconjunto próprio de A). Neste caso, $P(x)$ é dita ser uma *condição possível* ou uma *propriedade possível* em A.

→ Todo $x \in A$ satisfaz $P(x)$, isto é, $V_P = A$. Dizemos, então, que $P(x)$ é uma *condição universal* ou uma *propriedade universal* em A.

A condição $P(x)$: $x^2 = 2$ é impossível em $\mathbb{Z}$ (conforme vimos no Exercício resolvido 1, $V_P = \varnothing$), mas é possível em $\mathbb{R}$ ($V_P = \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$). A condição $Q(x)$: $x + 5 > 2$ é universal em $\mathbb{N}$, possível em $\mathbb{Z}$ e impossível em $A = \{-50, -40, -30, -20, -10\}$.

Neste tópico, vimos o que são sentenças abertas com uma variável e determinamos os conjuntos-verdade de algumas delas. No tópico seguinte, estenderemos esses conceitos para sentenças abertas com várias variáveis.

SAIBA MAIS

O domínio de uma condição é determinante para decidir se ela é universal, possível ou impossível. Mais precisamente, uma mesma condição pode ser, por exemplo, possível em um domínio e impossível em outro.

TÓPICO 2

Sentenças abertas com mais de uma variável

Objetivos

- Definir sentenças abertas com mais de uma variável
- Determinar conjuntos-verdade de sentenças abertas
- Construir sentenças abertas

2.1 INTRODUÇÃO - DEFINIÇÕES

Nas definições seguintes, estendemos os conceitos de sentença aberta e de conjunto-verdade de uma sentença aberta para sentenças com mais de uma variável.

ATENÇÃO!

Uma sentença aberta $P(x, y)$ em $A\times B$ torna-se uma proposição sempre que as variáveis x e y são substituídas, respectivamente, por elementos $a \in A$ e $b \in B$ (isto é, $(a, b) \in A\times B$).

DEFINIÇÃO 3

Dados dois conjuntos A e B, uma sentença aberta com duas variáveis em $A\times B$ ou simplesmente uma sentença aberta em $A\times B$ é uma expressão P(x, y) tal que P(a, b) é uma proposição (verdadeira ou falsa) para todo par ordenado $(a, b) \in A\times B$.

DEFINIÇÃO 4

Conjunto-verdade de uma sentença aberta P(x, y) em $A\times B$, denotado por V_P, é o conjunto de todos os pares ordenados $(a, b) \in A\times B$ que satisfazem (verificam) P(x, y), ou seja, é o conjunto de todos os pares ordenados $(a, b) \in A\times B$ tais que P(a, b) é uma proposição verdadeira. Simbolicamente,

$$V_P = \{(a,b) \mid a \in A \wedge b \in B \wedge P(a,b) \text{ é } \mathbf{V}\}.$$

De um modo mais simples, o conjunto-verdade de uma sentença aberta

$P(x, y)$ em $A \times B$ é dado por:

$$V_P = \{(a,b) \mid a \in A \wedge b \in B \wedge P(a,b)\}$$

ou ainda por $V_P = \{(a,b) \in A \times B \mid P(a,b)\}$.

GUARDE BEM ISSO!

O conjunto-verdade de uma sentença aberta $P(x, y)$ em $A \times B$ é sempre um subconjunto de $A \times B$, ou seja, $V_P \subset A \times B$.

Exemplo 4:

Sejam os conjuntos $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ e $B = \{1, 4, 9\}$. As seguintes expressões são sentenças abertas com duas variáveis em $A \times B$:

1. $P(x)$: $x + y \geq 5$
2. $Q(x)$: $x^2 = y$
3. $R(x)$: x é divisor y
4. $S(x)$: $3x + y = 0$

Observe que o par ordenado $(2, 4) \in A \times B$, por exemplo, satisfaz as sentenças abertas $P(x)$, $Q(x)$ e $R(x)$, mas não satisfaz $S(x)$. Portanto, temos que

$$(2,4) \in V_P,\ (2,4) \in V_Q,\ (2,4) \in V_R \text{ e } (2,4) \in V_S.$$

Por curiosidade, considerando o Exemplo 3: quantos são os pares ordenados de $A \times B$? Quais são eles? Quais são todos os pares todos os pares que satisfazem $P(x)$? O par $(1, 9)$ satisfaz $Q(x)$? Ele satisfaz $R(x)$? Algum dos pares satisfaz $S(x)$? No exercício seguinte, respondemos a alguns destes questionamentos.

Exercício resolvido 2:

Determine o conjunto-verdade de cada uma das sentenças abertas do Exemplo 3.

Solução:

O produto cartesiano $A \times B$ é constituído de $5 \times 3 = 15$ pares ordenados, a saber:

$$\{(-2,1),\ (-2,4),\ (-2,9),\ (-1,1),\ (-1,4),\ (-1,9),\ (0,1),\ (0,4),\ (0,9),\ (1,1),\ (1,4),\ (1,9),\ (2,1),\ (2,4),\ (2,9)\}.$$

Os conjuntos-verdade das sentenças abertas dadas são respectivamente:

1. $V_P = \{(a, b) \in A \times B \mid a + b \geq 5\} = \{(-2, 9), (-1, 9), (0, 9), (1, 4), (1, 9), (2, 4), (2, 9)\}$
2. $V_Q = \{(a, b) \in A \times B \mid a^2 = b\} = \{(-2, 4), (-1, 1), (1, 1), (2, 4)\}$
3. $V_R = \{(a, b) \in A \times B \mid a$ Ødivisor de $b\} = \{(-2,4), (-1,1), (-1,4), (-1,9), (1,1), (1,4) (1,9), (2,4)\}$
4. $V_S = \{(a, b) \in A \times B \mid 3a + b = 0\} = \varnothing$

ATENÇÃO!

Uma sentença aberta $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ em $A_1 \times A_2 \times \ ... \ \times A_n$ torna-se uma proposição sempre que as variáveis $x_1, x_2, ...,$ e x_n são substituídas, respectivamente, por elementos $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2$, ..., e $a_n \in A_n$ (isto é, $(a_1, a_2, ..., a_n) \in A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$).

DEFINIÇÃO 5

Dados n conjuntos $A_1, A_2, ..., A_n$ uma sentença aberta com n variáveis em $A_1 \times A_2 \times \ ... \ \times A_n$ ou simplesmente uma sentença aberta em $A_1 \times A_2 \times \ ... \ \times A_n$ é uma expressão $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ tal que $P(a_1, a_2, ..., a_n)$ é uma proposição (verdadeira ou falsa) para toda n-upla ordenada $(a_1, a_2, ..., a_n) \in A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$.

DEFINIÇÃO 6

Conjunto-verdade de uma sentença aberta $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ em $A_1 \times A_2 \times \ ... \ \times A_n$, denotado por V_P, é o conjunto de todas as n-uplas ordenadas $(a_1, a_2, ..., a_n) \in A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ que satisfazem (verificam) $P(x_1, x_2, ..., x_n)$, ou seja, é o conjunto de todas as n-uplas ordenadas $(a_1, a_2, ..., a_n) \in A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ tais que $P(a_1, a_2, ..., a_n)$ é uma proposição verdadeira. Simbolicamente,

$$V_P = \{(a_1, a_2, ..., a_n) \mid a_1 \in A_1 \wedge a_2 \in A_2 \wedge \ ... \wedge \ a_n \in A_n \wedge P(a_1, a_2, ..., a_n)\ \text{Ø}\mathbf{V}\}.$$

GUARDE BEM ISSO!

O conjunto-verdade de uma sentença aberta $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ em $A_1 \times A_2 \times \ ... \ \times A_n$ é sempre um subconjunto de $A_1 \times A_2 \times \ ... \ \times A_n$, ou seja, $V_P \subset (A_1 \times A_2 \times \ ... \ \times A_n)$.

De um modo mais simples, o conjunto-verdade de uma sentença aberta $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ em $A_1 \times A_2 \times \ ... \ \times A_n$ é dado por:

$$V_P = \{(a_1, a_2, ..., a_n) \mid a_1 \in A_1 \wedge a_2 \in A_2 \wedge \ ... \wedge \ a_n \in A_n \wedge P(a_1, a_2, ..., a_n)\}$$

ou ainda por

$$V_P = \{(a_1, a_2, ..., a_n) \in (A_1 \times A_2 \times \ ... \ \times A_n) \mid P(a_1, a_2, ..., a_n)\}.$$

EXEMPLO 5:

Seja $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$ o conjunto dos números naturais. A expressão

$P(x)$: $x + 2y + 3z \leq 10$

é uma sentença aberta com três variáveis em $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$:

Observe que a tripla ordenada $(1, 1, 1) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ satisfaz $P(x)$, pois $1 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \leq 10$ é verdade (V). Por outro lado, a tripla ordenada $(1, 2, 3) \in$

$\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ não satisfaz $P(x)$, pois $1+2\cdot 2+3\cdot 3\leq 10$ é falsa (**F**). O conjunto-verdade da sentença aberta $P(x)$ é:

$$V_P = \{(x, y, z) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N} \mid x + 2y + 3z \leq 10\}$$
$$= \{(1,1,1), (1,1,2), (1,2,1), (1,3,1), (2,1,1), (2,1,2), (2,2,1), (3,1,1), (3,2,1)\}.$$

Finalizamos este tópico com a seguinte observação vista em Alencar Filho (2002, p. 161):

Em Matemática, as **equações** e as **inequações** são sentenças abertas que exprimem relação de igualdade e desigualdade, respectivamente, entre duas expressões com variáveis. Mas, o conceito de sentença aberta é muito mais amplo que o de equação ou inequação; assim, "*x* divide *y*", "*x* é primo com *y*", "*x* é filho de *y*", etc., são sentenças abertas, sem serem equações nem inequações.

Neste tópico, tratamos das sentenças abertas com mais de uma variável, determinando seus conjuntos-verdade. No próximo tópico, veremos como operar com sentenças abertas.

TÓPICO 3

Operando com sentenças abertas

Objetivos

- Conhecer as operações com sentenças abertas
- Construir sentenças abertas
- Determinar conjuntos-verdade de sentenças abertas

SAIBA MAIS!

Dados dois números inteiros a e b, dizemos que "a divide b" e denotamos por a | b se existir um número inteiro n tal que b = a·n.

3.1 INTRODUÇÃO

As sentenças abertas podem também combinar-se do mesmo modo que as proposições se combinam, por meio dos conectivos lógicos, formando novas sentenças abertas. Como exemplo, vamos considerar as seguintes sentenças abertas com uma variável em $\mathbb{N}$:

$$p(x): 4 \mid x \text{ (4 divide } x\text{)}, \; q(x): x < 20.$$

Podemos ligar as sentenças abertas $p(x)$ e $q(x)$ pelo conectivo $\wedge$ ("e") e obter uma nova sentença aberta em $\mathbb{N}$:

$$p(x) \wedge q(x): 4 \mid x \;\wedge\; x < 20$$

que será satisfeita por todos (e somente por eles) os valores $a \in \mathbb{N}$ que satisfazem simultaneamente as duas sentenças abertas $p(x)$ e $q(x)$. A exemplo do que foi feito para proposições, é natural chamar essa nova sentença aberta $p(x) \wedge q(x)$ de *conjunção* das sentenças abertas $p(x)$ e $q(x)$.

De modo similar, podemos definir operações com sentenças abertas usando os conectivos $\vee$ ("ou"), $\sim$ ("não"), $\rightarrow$ ("se ... então") e $\leftrightarrow$ ("se, e somente se,"). Assim, dadas as sentenças abertas $p(x)$ e $q(x)$ em A, temos:

→ **Conjunção** de $p(x)$ e $q(x)$ é a sentença aberta $p(x) \wedge q(x)$ em A, satisfeita pelos valores $a \in A$ (e somente por eles) que satisfazem simultaneamente $p(x)$ e $q(x)$.

→ **Disjunção** de $p(x)$ e $q(x)$ é a sentença aberta $p(x) \vee q(x)$ em *A*, satisfeita pelos valores $a \in A$ (e somente por eles) que satisfazem a pelo menos uma das sentenças $p(x)$ e $q(x)$.

→ **Negação** de $p(x)$ é a sentença $\sim p(x)$ em *A*, satisfeita pelos valores $a \in A$ (e somente por eles) que não satisfazem $p(x)$.

→ **Condicional** de $p(x)$ e $q(x)$ é a sentença aberta $p(x) \to q(x)$ em *A*, que só não é satisfeita pelos valores $a \in A$ que satisfazem $p(x)$, mas não satisfazem $q(x)$.

→ **Bicondicional** de $p(x)$ e $q(x)$ é a sentença aberta $p(x) \leftrightarrow q(x)$ em *A*, que é satisfeita pelos valores $a \in A$ (e somente por eles) que satisfazem simultaneamente $p(x)$ e $q(x)$ ou que simultaneamente não satisfazem $p(x)$ e $q(x)$.

Do modo como foram definidas, sendo V_p o conjunto-verdade de *p*(*x*) e V_q o conjunto-verdade de *q*(*x*), os conjuntos-verdade dessas novas sentenças abertas serão

1. $V_{p\wedge q} = V_p \cap V_q = \{a \in A \mid p(a)\} \cap \{a \in A \mid q(a)\}$.
2. $V_{p\vee q} = V_p \cup V_q = \{a \in A \mid p(a)\} \cup \{a \in A \mid q(a)\}$.
3. $V_{\sim p} = C_A\, V_p = C_A\, \{a \in A \mid p(a)\}$.
4. $V_{p\to q} = V_{\sim p \vee q} = V_{\sim p} \cup V_q = C_A\, V_p \cup V_q = C_A\{a \in A \mid p(a)\} \cup \{a \in A \mid q(a)\}$
5. $V_{p\leftrightarrow q} = V_{(p\to q)\wedge(q\to p)} = V_{p\to q} \cap V_{q\to p} = (C_A\, V_p \cup V_q) \cap (C_A\, V_q \cup V_p)$

$= (C_A\{a \in A \mid p(a)\} \cup \{a \in A \mid q(a)\}) \cap (\{a \in A \mid p(a)\} \cup C_A\{a \in A \mid q(a)\})$.

Note que a primeira igualdade em (4) e em (5) seguem das equivalências

$$p \to q \Leftrightarrow \sim p \vee q \quad \text{e} \quad p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \to q) \wedge (q \to p).$$

Exemplo 6:

Seja $\mathbb{N} = \{1,\ 2,\ 3,\ ...\}$ o conjunto dos números naturais. Consideremos as sentenças abertas em $\mathbb{N}$:

$$p(x): x+1>8, \quad q(x): x^2-5x+6=0 \quad \text{e} \quad r(x): x \text{ é divisor de } 3.$$

Atribuindo o valor $1 \in \mathbb{N}$ à variável *x*, teremos que as sentenças abertas *p*(*x*), *q*(*x*) e *r*(*x*) se tornarão proposições cujos valores lógicos serão, respectivamente, **F**, **F** e **V**, isto é, $V(p(1)) =$ **F**, $V(q(1)) =$ **F** e $V(r(1)) =$ **V**. Dito de outro modo, o valor $1 \in \mathbb{N}$ satisfaz a sentença aberta *r*(*x*), mas não satisfaz *p*(*x*) nem *q*(*x*). Portanto, segue que o valor $1 \in \mathbb{N}$:

a) não satisfaz a conjunção $p(x) \wedge q(x)$, isto é, $1 \notin V_{p\wedge q}$;

b) não satisfaz a disjunção $p(x) \vee q(x)$, isto é, $1 \notin V_{p\vee q}$;

c) não satisfaz a conjunção $p(x) \wedge r(x)$, isto é, $1 \notin V_{p\wedge r}$;

d) satisfaz a disjunção $p(x) \vee r(x)$, isto é, $1 \in V_{p\vee r}$;

e) satisfaz a negação $\sim p(x)$, isto é, $1 \in V_{\sim p}$;

f) não satisfaz a negação $\sim r(x)$, isto é, $1 \notin V_{\sim r}$;

g) satisfaz a condicional $q(x) \to r(x)$, isto é, $1 \in V_{q \to r}$;

h) não satisfaz a condicional $r(x) \to q(x)$, isto é, $1 \notin V_{r \to q}$;

i) satisfaz a bicondicional $p(x) \leftrightarrow q(x)$, isto é, $1 \in V_{p \leftrightarrow q}$;

j) não satisfaz a bicondicional $p(x) \leftrightarrow r(x)$, isto é, $1 \notin V_{p \leftrightarrow r}$.

Exercício resolvido 2:

Consideremos as sentenças abertas em $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$:

$p(x): x+1<7$, $q(x): x^2-14x+45=0$ e $r(x): x$ é divisor de 12.

Determine o conjunto-verdade das seguintes sentenças abertas:

1. $p(x) \wedge r(x)$
2. $q(x) \vee r(x)$
3. $\sim p(x)$
4. $p(x) \to r(x)$
5. $q(x) \leftrightarrow r(x)$
6. $\sim p(x) \vee (q(x) \wedge r(x))$

Solução:

Observe inicialmente que $x+1<7 \Leftrightarrow x<6$, que as raízes da equação $x^2-14x+45=0$ são 5 e 9 (verifique!) e que os divisores positivos de 12 são 1, 2, 3, 4, 6 e 12. Portanto, os conjuntos-verdade das sentenças abertas $p(x)$, $q(x)$ e $r(x)$ são respectivamente:

$V_p = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $V_q = \{5, 9\}$ e $V_r = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$.

Determinemos agora os conjuntos-verdade das sentenças abertas dadas. Temos:

1. $V_{p \wedge r} = V_p \cap V_r = \{1, 2, 3, 4, 5\} \cap \{1, 2, 3, 4, 6, 12\} = \{1, 2, 3, 4\}$
2. $V_{q \vee r} = V_q \cup V_r = \{5, 9\} \cup \{1, 2, 3, 4, 6, 12\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 12\}$
3. $V_{\sim p} = C_{\mathbb{N}}\, V_p = C_{\mathbb{N}}\{1, 2, 3, 4, 5\} = \mathbb{N} - \{1, 2, 3, 4, 5\} = \{6, 7, 8, ...\}$
4. $V_{p \to r} = C_{\mathbb{N}}\, V_p \cup V_r = C_{\mathbb{N}}\{1, 2, 3, 4, 5\} \cup \{1, 2, 3, 4, 6, 12\} = \mathbb{N} - \{5\}$
5. $V_{q \leftrightarrow r} = (C_{\mathbb{N}}\, V_q \cup V_r) \cap (C_{\mathbb{N}}\, V_r \cup V_q)$

   $= (C_{\mathbb{N}}\{5, 9\} \cup \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}) \cap (\{5, 9\} \cup C_{\mathbb{N}}\{1, 2, 3, 4, 6, 12\})$

   $= (\mathbb{N} - \{5, 9\}) \cap (\mathbb{N} - \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}) = \mathbb{N} - \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 12\}$
6. $V_{\sim p \vee (q \wedge r)} = V_{\sim p} \cup V_{q \wedge r} = C_{\mathbb{N}}\, V_p \cup (V_q \cap V_r)$

   $= C_{\mathbb{N}}\{1, 2, 3, 4, 5\} \cup (\{5, 9\} \cap \{1, 2, 3, 4, 6, 12\})$

   $= (\mathbb{N} - \{1, 2, 3, 4, 5\}) \cup \varnothing = \varnothing$

De modo similar, poderíamos, usando os conectivos lógicos, definir essas mesmas operações com sentenças abertas com mais de uma variável. Assim, para as sentenças abertas com *n* variáveis $p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, teríamos as sentenças abertas compostas:

$$p(x_1, \ldots, x_n) \wedge q(x_1, \ldots x_n)$$
$$p(x_1, \ldots, x_n) \vee q(x_1, \ldots x_n)$$
$$\sim p(x_1, \ldots, x_n)$$
$$p(x_1, \ldots, x_n) \rightarrow q(x_1, \ldots x_n)$$
$$p(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow q(x_1, \ldots x_n)$$

Neste tópico, vimos as principais operações com sentenças abertas e determinamos os conjuntos-verdade das novas sentenças abertas obtidas. No próximo tópico, estudaremos as operações de quantificação.

TÓPICO 4

Quantificadores

Objetivos

- Conhecer as operações de quantificação
- Conhecer os quantificadores universal e existencial
- Determinar o valor lógico de sentenças abertas quantificadas

4.1 INTRODUÇÃO

Nos tópicos anteriores, vimos que uma forma bem simples de transformar uma sentença aberta em uma proposição. Neste tópico, veremos outra forma bem interessante de transformar sentenças abertas em proposições.

Podemos construir *proposições* (isto é, sentenças que podem assumir valor lógico verdadeiro ou falso) a partir de uma dada *sentença aberta P*, de duas maneiras:

→ atribuindo *valores do domínio* às *variáveis* de *P*, isto é, substituindo as variáveis de *P* por elementos do domínio das variáveis.

→ *quantificando* as variáveis de *P*, usando os *quantificadores universal* ($\forall$) e *existencial* ($\exists$).

4.2 QUANTIFICADOR UNIVERSAL ($\forall$)

Seja *A* um conjunto não vazio ($A \neq \varnothing$) e *p*(*x*) uma sentença aberta em *A* tal que $V_p = A$, isto é, *p*(*x*) é uma condição universal. Neste caso, podemos dizer (Alencar Filho, 2002):

1. "Para todo elemento *x* de *A*, *p*(*x*) é verdadeira (**V**)".
2. "Qualquer que seja o elemento *x* de *A*, *p*(*x*) é verdadeira (**V**)".

Ou, dito de modo mais simples:

3. "Para todo *x* de *A*, *p*(*x*)".
4. "Qualquer que seja *x* de *A*, *p*(*x*)".

Simbolicamente, denotamos estas duas afirmações (ambas iguais), escrevendo:

$$(\forall x \in A)(p(x)) \quad \text{ou} \quad \forall x \in A,\ p(x) \quad \text{ou} \quad \forall x \in A : p(x).$$

Por questões de simplicidade, desde que não haja dúvidas quanto ao domínio, podemos omiti-lo e escrever:

$$(\forall x)(p(x)) \quad \text{ou} \quad \forall x,\, p(x) \quad \text{ou} \quad \forall x : p(x)\,.$$

Portanto, o símbolo $\forall$, chamado *quantificador universal* define a operação – denomida *quantificação universal* – que transforma a sentença aberta *p*(*x*) em uma proposição que é verdadeira (**V**) quando *p*(*x*) é uma condição universal ($V_p = A$) e falsa (**F**) quando *p*(*x*) não é uma condição universal ($V_p \neq A$). Tal proposição é denotada por $(\forall x \in A)(p(x))$ e lida "para todo *x* de *A*, *p*(*x*)" ou "qualquer que seja *x* de *A*, *p*(*x*)".

Exemplo 7:

A proposição $(\forall n \in \mathbb{N})(n+4>3)$, na qual $\mathbb{N} = \{1,\ 2,\ 3,\ \ldots\}$ é o conjunto dos números naturais, é verdadeira (**V**), pois a sentença aberta que a define *p*(*n*): $n+4>3$ é uma condição universal em $\mathbb{N}$ ($V_p = \mathbb{N}$). Já a proposição $(\forall n \in \mathbb{N})(n+2>8)$ é falsa (**F**), pois a condição *q*(*n*): $n+2>8$ é possível e não universal em $\mathbb{N}$ ($V_p = \{7, 8, 9, \ldots\} \neq \mathbb{N}$).

4.3 QUANTIFICADOR EXISTENCIAL ($\exists$)

Seja *A* um conjunto não vazio ($A \neq \varnothing$) e *p*(*x*) uma sentença aberta em *A* tal que $V_p \neq \varnothing$, isto é, *p*(*x*) é uma condição possível. Neste caso, podemos dizer (Alencar Filho, 2002):

1. "Existe pelo menos um elemento *x* de *A* tal que *p*(*x*) é verdadeira (**V**)".
2. "Para algum elemento *x* de *A*, *p*(*x*) é verdadeira (**V**)".

Ou, dito de modo mais simples:

3. "Existe *x* de *A* tal que *p*(*x*)".
4. "Para algum *x* de *A*, *p*(*x*)".

Simbolicamente, denotamos estas duas afirmações (que dizem a mesma coisa) escrevendo:

$$(\exists x \in A)(p(x)) \subseteq \quad \text{ou} \quad \exists x \in A,\, p(x) \quad \text{ou} \quad \exists x \in A : p(x)\,.$$

Por questões de simplicidade, desde que não haja dúvidas quanto ao domínio, podemos omiti-lo e escrever:

$(\exists x)(p(x))$ ou $\exists x,\, p(x)$ ou $\exists x : p(x)$. Portanto, o símbolo $\exists$, chamado *quantificador existencial* define a operação, denomida *quantificação existencial*, que transforma a sentença aberta *p*(*x*) em uma proposição que é verdadeira (**V**) quando *p*(*x*) é uma condição possível ($V_p \neq \varnothing$) e falsa (**F**) quando *p*(*x*) é uma condição impossível ($V_p = \varnothing$). Tal proposição é denotada por $(\exists x \in A)(p(x))$ e lida "existe *x* de *A* tal que *p*(*x*)" ou "para algum *x* de *A*, *p*(*x*)".

Exemplo 8:

A proposição $(\exists n \in \mathbb{N})(n+4<7)$, na qual $\mathbb{N}=\{1,\ 2,\ 3,\ \ldots\}$ é o conjunto dos números naturais, é verdadeira (**V**), pois a sentença aberta que a define $p(n)$: $n+4<7$ é possível em $\mathbb{N}$ ($V_p=\{1, 2\}\neq\varnothing$). Por outro lado, a proposição $(\exists n \in N)(n+6<4)$ é falsa (**F**), pois a condição $q(n)$: $n+6<4$ é impossível em $\mathbb{N}$ ($V_p=\varnothing$).

4.4 QUANTIFICADOR DE EXISTÊNCIA E UNICIDADE ($\exists\,|$)

Quando *existe* e é *único* o elemento no conjunto universo A que satisfaz a sentença aberta $p(x)$, ou seja, que torna $p(x)$ uma proposição verdadeira (V), denotamos essa proposição por $(\exists\,|\,x\in A)(\,p(x))$, lida "existe um único x de A tal que $p(x)$" ou "existe um x de A e um só tal que $p(x)$".

GUARDE BEM ISSO!

As seguintes implicações ocorrem:

$(\exists\,|\,x\in A)(p(x)) \Rightarrow (\exists x \in A)(p(x))$ e

$(\forall x \in A)(p(x)) \Rightarrow (\exists x \in A)(p(x))$

As implicações contrárias não ocorrem.

Exemplo 9:

São verdadeiras as proposições:

$(\exists\,|\;x\in\mathbb{N})(x^2=4)$

$(\exists\,|\,x\in\mathbb{N})(-1<x<1)$

Finalizaremos este tópico dizendo que a negação transforma o quantificador universal em quantificador existencial e vice-versa, ou seja, transforma o quantificador existencial em quantificador universal. Estas são as chamada *segundas regras de De Morgan* e, simbolicamente, dizem:

1. $\sim[(\forall x\in A)(p(x))] \Leftrightarrow (\exists x\in A)(\sim p(x))$.
2. $\sim[(\exists x\in A)(p(x))] \Leftrightarrow (\forall x\in A)(\sim p(x))$.

Desde que não haja dúvidas quanto ao domínio, podemos omiti-lo e escrever simplesmente:

1. $\sim[(\forall x)(p(x))] \Leftrightarrow (\exists x)(\sim p(x))$.
2. $\sim[(\exists x)(p(x))] \Leftrightarrow (\forall x)(\sim p(x))$.

Vejamos alguns exemplos extraídos de Daghlian (1995, p. 94-95):

Exercício resolvido 3:

Negar a sentença *Todos os pescadores são mentirosos*.

Solução:

A sentença é uma proposição do tipo:

$$\forall x,\ p(x)$$

Sua negação é equivalente a:

$$\sim (\forall x,\ p(x)) \Leftrightarrow \exists x,\ \sim p(x)$$

Portanto, sua negação é a proposição:

Existe pescador que não é mentiroso.

Ou, dito em outras palavras:

Algum pescador não é mentiroso.

Exercício resolvido 4:

Negar a sentença *Alguns alunos são estudiosos.*

Solução:

A sentença é uma proposição do tipo:

$$\exists x,\ p(x))$$

Sua negação é equivalente a:

$$\sim (\exists x,\ p(x)) \Leftrightarrow \forall x,\ \sim p(x)$$

Portanto, sua negação é a proposição:

Todos os alunos não são estudiosos.

Ou, dito em outras palavras:

Qualquer que seja o aluno, ele não é estudioso.

Exercício resolvido 5:

Negar a sentença $\forall x,\ x-1 \geq 5$.

Solução:

$$\sim (\forall x,\ x-1 \geq 5) \Leftrightarrow \exists x,\ \ x-1 < 5 .$$

Exercício resolvido 6:

Negar a sentença $\exists x,\ \ x^2 = 1 \to x \neq 0$.

Solução:

$$\begin{aligned} \sim (\exists x,\ \ x^2 = 1 \to x \neq 0) \quad &\Leftrightarrow \quad \forall x,\ \sim (x^2 = 1 \to x \neq 0) \\ &\Leftrightarrow \quad \forall x,\ \sim (\sim (x^2 = 1) \vee (x \neq 0)) \\ &\Leftrightarrow \quad \forall x,\ \sim (\sim (x^2 = 1)) \wedge \sim (x \neq 0) \\ &\Leftrightarrow \quad \forall x,\ (x^2 = 1) \wedge (x = 0) \end{aligned}.$$

Aqui usamos a equivalência conhecida: $p \to q \Leftrightarrow \sim p \vee q$.

Na Matemática, muitas vezes, temos de mostrar que uma proposição do tipo "Para todo x de A, $p(x)$", isto é,

$$(\forall x \in A)(p(x))$$

é falsa (**F**). Da equivalência

$$\sim[(\forall x \in A)(p(x))] \Leftrightarrow (\exists x \in A)(\sim p(x)),$$

uma forma de fazer isso é mostrar que

$$(\exists x \in A)(\sim p(x))$$

é uma proposição verdadeira (**V**). Portanto, temos de mostrar que existe pelo menos um elemento $x_0 \in A$ tal que $p(x_0)$ é uma proposição falsa (**F**). Um tal elemento recebe uma denominação especial muito comum em Matemática:

SAIBA MAIS!

Um elemento $x_0 \in A$ tal que $p(x_0)$ é uma proposição falsa (F) é chamado contra-exemplo para a proposição $(\forall x \in A)(p(x))$.

Exemlo 10:

A proposição $(\forall x \in \mathbb{R})(x^2 \geq x)$ é falsa (**F**). Um contra-exemplo é o número $\frac{1}{2}$, pois $\left(\frac{1}{2}\right)^2 \geq \frac{1}{2}$ é falsa (**F**). Os números 0 e $\frac{2}{3}$ também são contra-exemplos. Verifique!

Neste tópico, aprendemos a quantificar sentenças abertas com uma variável e vimos como obter a negação de sentenças abertas quantificadas. Todos esses conceitos podem ser estendidos para a quantificação de sentenças abertas com mais de uma variável.

SAIBA MAIS!

Consulte as referências que citamos ou outras da área e acesse páginas da *internet* relacionadas para complementar seus conhecimentos. Abaixo, listamos algumas páginas que poderão ajudá-lo. Bons estudos!

1. https://www.ime.unicamp.br/~valle/PastCourses/Licao4.pdf
2. www.pucrs.br/famat/ruth/logica_b/9quant.doc

Chegamos ao final de nossa disciplina! Queremos deixar claro que essa foi apenas uma breve introdução ao estudo da *Lógica* e dos *Conjuntos*. Entretanto, devemos ressaltar que os conhecimentos adquiridos aqui serão essenciais para que você possa ter um bom desempenho em todo o curso. Esperamos que você esteja motivado para continuar estudando e aprofundar seus conhecimentos.

Obrigado pela sua participação e até uma próxima oportunidade.

REFERÊNCIAS

ABAR, Celina Aparecida Almeida Pereira. **Noções de lógica matemática**. 2004. Disponível em: <http://www.pucsp.br/~logica>. Acesso em: 18 jan. 2009.

ALENCAR FILHO, Edgard de. **Iniciação à lógica matemática**. São Paulo: Nobel, 2002.

DRUCK, Iole de Freitas. A linguagem lógica. **Revista do Professor de Matemática**, Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, n. 17, p. 10-18, 1990.

DAGHLIAN, Jacob. **Lógica e álgebra de Boole.** 4. ed. São Paulo: Atlas, 1995.

LIMA, Elon Lages *et al*. **A Matemática do ensino médio.** Rio de Janeiro: SBM, 2000.

SILVA, Josimar *et al*. **É divertido resolver problemas.** Rio de Janeiro: LTC, 2000.

CURRÍCULO

Francisco Gêvane Muniz Cunha é professor efetivo do Instituto Federal do Ceará – IFCE desde 1993. Nascido em São João do Jaguaribe – CE em 1970, é técnico em informática industrial pela Escola Técnica Federal do Ceará (1993). Licenciado (1993) e bacharel (1994) em matemática pela Universidade Federal do Ceará – UFC. Possui mestrado em matemática (1997) e mestrado em ciência da computação (2002), ambos pela UFC. É doutor em engenharia de sistemas e computação (2007) pela Universidade Federal do Rio de Janeiro com tese na linha de otimização. Tem experiência na área de matemática aplicada, no ensino de matemática, na formação de professores, no uso de tecnologias e no ensino na modalidade a distância. Atualmente é professor de disciplinas de matemática dos cursos de licenciatura em matemática, engenharias e outros do IFCE. Na modalidade semi-presencial é professor conteudista e formador de disciplinas de matemática do curso licenciatura em matemática do IFCE, tendo produzido diversos livros didáticos. Orienta alunos em nível de graduação e pós-graduação em matemática, ensino de Matemática ou educação Matemática. Tem interesse no uso de ambientes informatizados e, em especial, no uso de softwares educativos como apoio para o ensino de matemática. Dentre outras atividades, gosta de ler a bíblia, ajudar as pessoas, ensinar, estudar matemática e computação e assistir corridas de fórmula 1.