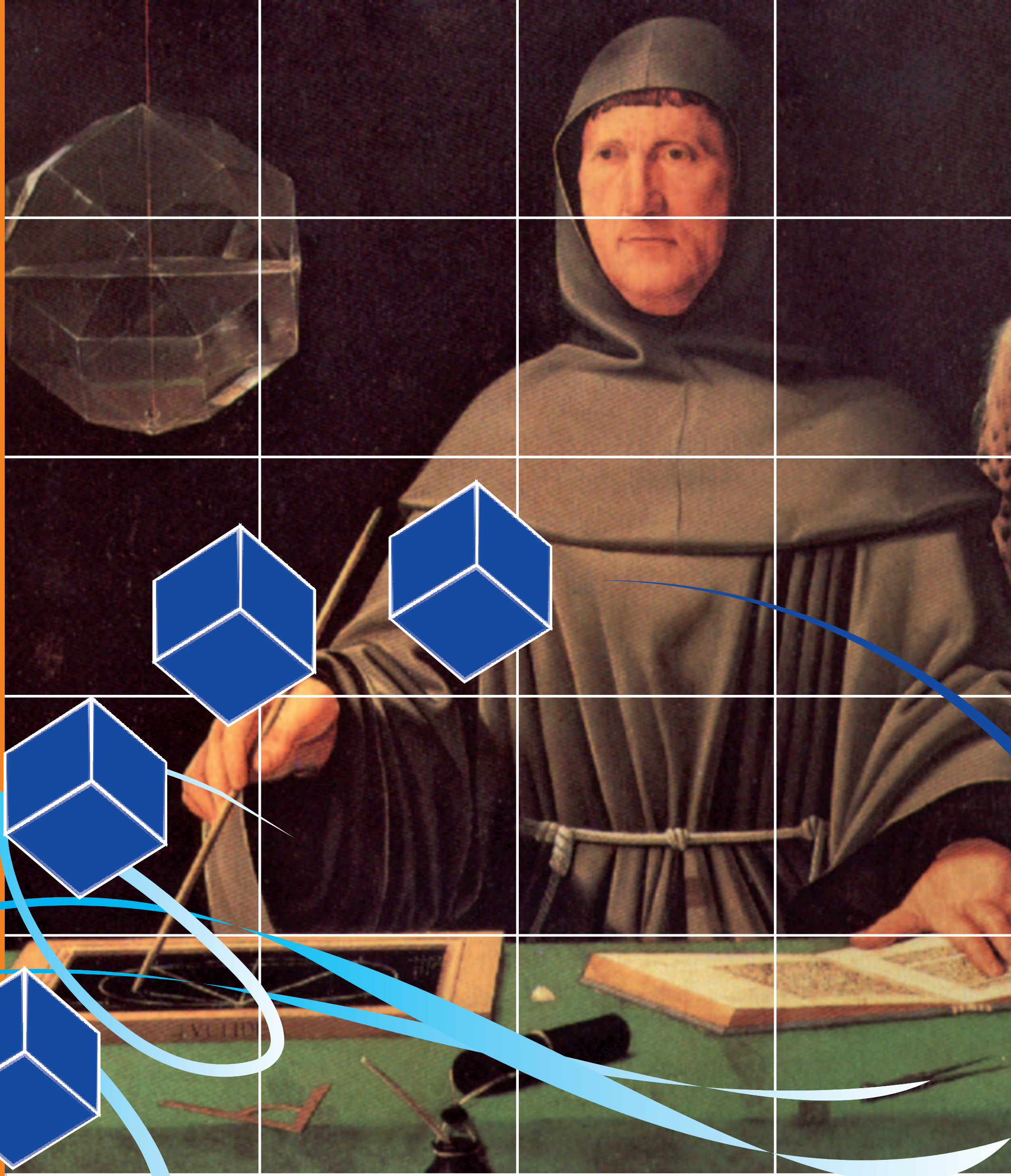
MATEMÁTICA

LICENCIATURA



Álgebra Linear

Marcelo Henriques de Carvalho

EDITORA UFMS

MATEMÁTICA

Disciplina

ÁLGEBRA LINEAR

Marcelo Henriques de Carvalho

Campo Grande, MS - 2009

EDITORA UFMS

LICENCIATURA

INFORMAÇÕES SOBRE O MATERIAL

PREZADO ALUNO,

O presente trabalho foi escrito tendo como norte uma premissa básica: que fosse acessível ao aluno do 2.º ano da faculdade. Para tanto, sua linguagem teria que ser tão clara e didática quanto possível. Por vezes, preferiu-se a apresentação intuitiva aos refinamentos teóricos. Críticas e sugestões hão de surgir, e serão bem-vindas. Resta-nos o consolo de ter envidado esforços para empregar utilmente o nosso tempo.

Você está de posse de um material auto-suficiente. Este livro foi concebido para que você adquira os fundamentos necessários do cálculo vetorial, da geometria analítica e da álgebra linear para os seus estudos posteriores, relativos à sua formação. O livro foi planejado para que você tenha uma formação de base sólida. Aconselhamos estudá-lo utilizando dois tipos de leitura: uma superficial ou de reconhecimento e outra profunda ou detalhada. A leitura superficial deverá ser a da leitura de cada capítulo, parágrafo, teorema, etc..., todo de uma vez e sem a preocupação de uma compreensão detalhada, mas apenas com o objetivo de que você tenha uma visão do conjunto das idéias em questão.

Aconselhamos que você faça esta forma de leitura pelo menos duas vezes, em cada unidade. Tendo então obtido a idéia geral da unidade na qual está trabalhando, você deverá fazer uma leitura profunda e detalhada, que é o estudo detalhado de cada aspecto do texto analisado, feito com calma e rigor, e só deverá finalizá-la quando a unidade analisada estiver totalmente compreendida, em seus mínimos detalhes. Para esta abordagem você deverá estar munido de uma lápis, borracha e papel. Experimente reproduzir o conteúdo da unidade, em detalhes, mas não de forma decorada e sim como resultado de seu aprendizado. Faça isso e você não se arrependerá do trabalho realizado. Acreditamos que sob a orientação dessas duas abordagens seu aprendizado ocorrerá de forma maximizada.

O livro é composto por um único módulo. Em cada capítulo, cada seção é organizada em forma de definições, lemas, proposições, teoremas e corolários, muitos deles com demonstrações com certo nível de rigor. No entanto, devido aos objetivos programáticos dessa disciplina, algumas demonstrações foram omitidas, sem prejuízos ao seu aprendizado. O leitor mais ousado pode consultar a bibliografia recomendada, para entender essas demonstrações, mas isso não é uma exigência para esse momento.

Este texto possui muitos exercícios resolvidos, de forma comentada, sobre os diferentes conteúdos abordados. A finalidade deles é esclarecer a teoria apresentada, exemplificá-la, e apresentar um método de resolução, das diferentes questões que são propostas. Isso não impede que você desenvolva outras modalidades de resoluções. O importante é que o seu método seja logicamente consistente. Os exercícios propostos estão apresentados ao longo de cada seção (e não apenas no final de cada capítulo) com o intuito de facilitar ao leitor o emprego dos resultados e técnicas necessárias para resolvê-los.

Ressaltamos que os exercícios resolvidos desempenham um papel importante no aprendizado. Sugerimos ao leitor que, ao estudá-los, utilize o chamado "método do *strip-tease*" para extrair deles o maior proveito. O método consiste em tapar a resolução do exercício e tentar resolvê-lo. Não conseguindo, descobre-se a primeira linha e tenta-se completar a resolução. Não conseguindo ainda, descobre-se mais uma linha, e assim por diante.

Ao final, apresentaremos algumas referências como leitura alternativa, complementar e até suplementar, dos conteúdos em questão, onde você poderá encontrar outras visões sobre os mesmos assuntos tratados neste texto e, em muitos deles, você encontrará aplicações dos tópicos estudados. O contato com esses assuntos ajudará a ter uma idéia de como a Matemática evoluiu para estruturas mais complexas.

Desejamos a vocês sucesso em seus estudos.

Prof^{o} Dr. Marcelo Henriques de Carvalho

PREFÁCIO

Álgebra Linear é um ramo da matemática que surgiu do estudo detalhado de sistemas de equações lineares, sejam elas algébricas ou diferenciais. A álgebra linear utiliza alguns conceitos e estruturas fundamentais da Matemática como vetores, espaços vetoriais, transformações lineares, sistemas de equações lineares e matrizes.

A história da álgebra linear tem origem no século XVIII com os estudos dos coeficientes de sistemas de equações lineares e seus determinantes por Leibniz e Cramer.

Não obstante o fato de a Álgebra Linear ser um campo abstrato da Matemática, ela tem um grande número de aplicações dentro e fora da Matemática, como em programação linear, processamento de imagens, física matemática, estatística, etc.

São pré-requisitos para este curso os resultados básicos da matemática elementar estudados no ensino médio. Espera-se também do leitor familiaridade com alguns conceitos da Álgebra Elementar, como determinantes, matrizes e sistemas lineares.

Sobre o Autor

Marcelo Henriques de Carvalho possui graduação em Licenciatura Plena em Matemática pela Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (1984), mestrado em Matemática Aplicada pela Universidade de São Paulo (1988) e doutorado em Ciência da Computação pela Universidade Estadual de Campinas (1996). Pós-Doutorado pela University of Waterloo, Canadá (2004). Atualmente é professor da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul. Tem experiência na área de Ciência da Computação, com ênfase em Teoria dos Grafos e Algoritmos.

SUMÁRIO

Capítulo I

MATRIZES

Introdução

Nesta seção apresentamos os conceitos básicos sobre matrizes. Estes conceitos são essenciais, pois ordenam, simplificam e fornecem novos métodos de resolução de problemas.

Chamamos de ***matriz*** uma tabela de elementos dispostos em linhas e colunas. Por exemplo, ao coletarmos os dados referentes a altura, peso e idade de um grupo de quatro pessoas, podemos dispô-los em uma tabela:

	Altura (m)	**Peso (kg)**	**Idade (anos)**
Pessoa 1	1,70	70	23
Pessoa 2	1,75	60	45
Pessoa 3	1,60	52	25
Pessoa 4	1,81	72	30

Ao abstrairmos os significados das linhas e colunas, temos a matriz:

$$B = \begin{bmatrix} 1,70 & 70 & 23 \\ 1,75 & 60 & 45 \\ 1,60 & 52 & 25 \\ 1,81 & 72 & 30 \end{bmatrix}$$

Observe que para um problema em que o volume de dados é muito grande, essa disposição dos dados em forma de matriz é imprescindível.

Representaremos uma matriz A de m linhas e n colunas por:

$$A_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ij}]_{m \times n}$$

Usaremos sempre letra maiúscula e em negrito para representar matriz. Se uma matriz A possui m linhas e n colunas dizemos que a *ordem* de A é m x n (lê-se m por n), e escrevemos $A_{m \times n}$.

Para representar um elemento de uma matriz, usamos a letra minúscula correspondente à letra da matriz com índices i e j representado a linha e a coluna (nesta ordem) em que ele está. Por exemplo, na matriz B anterior, o elemento que está na 1ª linha e 3ª coluna é 23, e escrevemos $b_{13} = 23$. Ainda neste exemplo, temos b_{11} = 1,70 e $b_{32} = 52$.

Definição de igualdade de matrizes: Duas matrizes $A_{m \times n}$ e $B_{r \times s}$ são iguais, A = B, se elas têm o mesmo número de linhas ($m = r$) e colunas ($n = s$), e todos os seus elementos correspondentes possuem o mesmo valor ($a_{ij} = b_{ij}$).

Exemplo 1. $$\begin{bmatrix} 3^2 & 1 & \log 1 \\ 2 & 2^2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & \operatorname{sen} 90^\circ & 0 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Tipos especiais de matrizes

Ao trabalhar com matrizes, observamos que existem alguns tipos que aparecem freqüente-mente na prática e, por isso, recebem nomes especiais. Veremos estes tipos a seguir. Consideremos uma matriz $A_{m \times n}$ (com m linhas e n colunas).

- ***Matriz quadrada*** é aquela em que o número de linhas é igual ao número de colunas ($m = n$). Neste caso, dizemos que A é uma matriz de ordem m.

Exemplo 2. $$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 4 & 0 & 7 \\ 5 & 3 & -5 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [8]$$

- ***Matriz nula*** é aquela em que todos os seus elementos são nulos, isto é, $a_{ij} = 0$, para todo i e j.

Exemplo 3. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $[0]$

A matriz nula de qualquer ordem é simplesmente denotada por **0**.

- ***Matriz coluna*** é aquela que possui uma única coluna ($n = 1$).

Exemplo 4. $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

- ***Matriz linha*** é aquela que possui uma única linha ($m = 1$).

Exemplo 5. $[2 \quad 0 \quad -1]$, $[0 \quad 0]$ e $[4]$

- ***Matriz diagonal*** é uma matriz quadrada ($m = n$) onde $a_{ij} = 0$, para todo $i \neq j$, isto é, os elementos que <u>não</u> estão na diagonal principal são nulos. (Os elementos a_{ij} em que $i = j$ constituem a *diagonal principal*.)

Exemplo 6. $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ e $[-1]$

Os elementos a_{ij} em que $i + j = \text{n} + 1$ constituem a *diagonal secundária*.

- ***Matriz identidade*** é uma matriz quadrada em que $a_{ii} = 1$ e $a_{ij} = 0$, para $i \neq j$. A matriz identidade de ordem n é denotada por $\mathbf{I}_n$.

Exemplo 7. $\mathbf{I}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{I}_1 = [1]$

- ***Matriz triangular superior*** é uma matriz quadrada onde todos os elementos abaixo da diagonal principal são nulos, isto é, $m = n$ e $a_{ij} = 0$, para $i > j$.

Exemplo 8. $\begin{bmatrix} 7 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e [-3]

De forma análoga, definimos a matriz triangular inferior.

- ***Matriz simétrica*** é uma matriz quadrada em que $a_{ij} = a_{ji}$.

Exemplo 9. $\begin{bmatrix} 7 & 3 & -4 \\ 3 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e [7]

Observe que, no caso de uma matriz simétrica, a parte superior é uma "reflexão" da parte inferior, em relação à diagonal.

Exercícios

1. Verdadeiro ou falso?

a) Toda matriz simétrica é quadrada
b) Toda matriz quadrada é simétrica
c) Toda matriz nula é diagonal
d) Toda matriz quadrada de ordem 1 é uma matriz linha
e) Toda matriz quadrada de ordem 1 é uma matriz coluna
f) Toda matriz quadrada de ordem 1 é uma matriz nula
g) Toda matriz quadrada de ordem 1 é triangular superior
h) Toda matriz quadrada de ordem 1 é triangular inferior
i) Toda matriz quadrada de ordem 1 é matriz simétrica
j) Toda matriz quadrada de ordem 1 é matriz diagonal
k) Toda matriz diagonal é simétrica
l) Toda matriz diagonal é triangular superior

Operações com matrizes

Ao utilizar matriz, surge naturalmente a necessidade de efetuarmos certas operações. Por exemplo, consideremos as tabelas abaixo, que descrevem a produção de grãos em dois anos consecutivos.

Produção de grãos (em toneladas) durante o primeiro ano			
	arroz	**milho**	**soja**
Região A	400	600	3000
Região B	700	100	700
Região C	500	800	1000

Produção de grãos (em toneladas) durante o segundo ano			
	arroz	**milho**	**soja**
Região A	200	0	5000
Região B	300	300	2000
Região C	600	600	2000

Se quisermos montar uma tabela que dê a produção por produtos e por região nos dois anos conjuntamente, teremos que somar os elementos correspondentes das duas tabelas acima.

$$\begin{bmatrix} 400 & 600 & 3000 \\ 700 & 100 & 700 \\ 500 & 800 & 1000 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 200 & 0 & 5000 \\ 300 & 300 & 2000 \\ 600 & 600 & 2000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 600 & 600 & 8000 \\ 1000 & 400 & 2700 \\ 1100 & 1400 & 3000 \end{bmatrix}$$

Ou seja,

Produção de grãos (em toneladas) durante os dois anos			
	arroz	**milho**	**soja**
Região A	600	600	8000
Região B	1000	400	2700
Região C	1100	1400	3000

Consideremos agora a seguinte situação: suponha que a previsão para a safra do terceiro ano seja o triplo da produção do primeiro ano. Assim, a matriz de estimativa da produção do terceiro ano será:

$$3.\begin{bmatrix} 400 & 600 & 3000 \\ 700 & 100 & 700 \\ 500 & 800 & 1000 \end{bmatrix} = \begin{array}{cccl} \text{arroz} & \text{milho} & \text{soja} & \\ 1200 & 1800 & 9000 & \text{Região A} \\ 2100 & 300 & 2100 & \text{Região B} \\ 1500 & 2400 & 3000 & \text{Região C} \end{array}$$

Acabamos de efetuar, nestes exemplos, duas operações com matrizes: soma e multiplicação por um número, que serão definidas formalmente a seguir.

Adição de matrizes

A soma de duas matrizes de mesma ordem $A_{m \times n}$ e $B_{m \times n}$ é uma matriz de ordem m x n, denotada por A + B, cujos elementos são a soma dos elementos correspondentes de A e B, isto é,

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n}$$

Exemplo 10.

$$\begin{bmatrix} 7 & 3 & -4 \\ -2 & 2 & 0 \\ 8 & 12 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & 3 & -4 \\ 4 & 2 & 0 \\ -3 & -5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & -8 \\ 2 & 4 & 0 \\ 5 & 7 & 2 \end{bmatrix}$$

Observe que, pela forma com que foi definida, a adição de matrizes tem as mesmas proprie-dades que a adição de números reais.

Propriedades:
Dadas as matrizes A,B e C de mesma ordem m x n, temos:

i) A + B = B + A (comutatividade)
ii) A + (B + C) = (A + B) + C (associatividade)
iii) A + 0 = A, onde 0 denota a matriz nula de ordem m x n.

Verifique a validade das propriedades anteriores e envie no material do aluno.

Produto de matriz por escalar

Seja $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ uma matriz e k um número real. O **produto** de k por A é a matriz obtida multiplicando cada elemento de A por k, isto é,

$$k \,.\, A = [k\, a_{ij}]_{m \times n}$$

Exemplo 11.

$$2. \begin{bmatrix} 7 & 3 & -4 \\ -2 & 2 & 0 \\ 8 & 12 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 6 & -8 \\ -4 & 4 & 0 \\ 16 & 24 & 2 \end{bmatrix}$$

Propriedades:

Dadas as matrizes A e B de mesma ordem m x n e números k, k_1 e k_2, temos:

i) $k\,(A + B) = kA + kB$

ii) $(k_1 + k_2)\,A = k_1A + k_2A$

iii) $0.A = 0$, isto é, se multiplicarmos o número zero por qualquer matriz A, teremos a matriz nula.

iv) $k_1\,(k_2\,A) = (k_1\,k_2)\,A$

Verifique a validade das propriedades anteriores e envie no material do aluno.

Transposição de matrizes

A ***transposta* de uma matriz** A é a matriz, denotada por A^T, cujas linhas são as colunas de A preservando a ordem, ou seja, a 1ª linha de A^T é a 1ª coluna de A, e assim por diante.

Exemplo 12.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \qquad A^t = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Exemplo 13.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}^T = [\,1 \quad 2\,]$$

Propriedades:

i) $(A^T)^T = A$, isto é, a transposta da transposta de uma matriz é a própria matriz.

ii) $(A + B)^T = A^T + B^T$, isto é, a transposta da soma é a soma das transpostas.

iii) $(k\,A)^T = k\,A^T$, onde k é qualquer escalar.

iv) Uma matriz é simétrica se, e somente se, ela é igual à sua transposta ($A = A^T$).

Verifique a validade das propriedades anteriores e envie no material do aluno.

Produto de matrizes

Antes de definirmos formalmente o produto de matrizes, vejamos um exemplo que pode ocorrer na prática. Suponhamos que a seguinte matriz forneça as quantidades das vitaminas A, B e C obtidas em cada unidade dos alimentos I e II.

	A	B	C
Alimento I	4	3	0
Alimento II	5	0	1

Se ingerirmos 5 unidades do alimento I e 2 unidades do alimento II, quanto consumiremos de cada tipo de vitamina? Podemos representar o consumo dos alimentos I e II (nesta ordem) pela matriz "consumo":
[5   2]

A operação que vai fornecer a quantidade ingerida de cada vitamina é o seguinte "produto":

$$[5 \quad 2] \cdot \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= [5 \,.\, 4 + 2 \,.\, 5 \quad 5 \,.\, 3 + 2 \,.\, 0 \quad 5 \,.\, 0 + 2 \,.\, 1] = [30 \quad 15 \quad 2]$$

Isto é, serão ingeridas 30 un. de vitamina A, 15 un. de vitamina B e 2 un. de vitamina C.

Este exemplo ilustra a definição de produto de matrizes. De forma mais geral, os elementos da matriz produto são obtidos pela soma de produtos dos elementos de uma linha da primeira matriz pelos elementos de uma coluna da segunda matriz. Por exemplo,

Sejam

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}$$

A matriz produto A . B é a matriz definida como:

$$A \,.\, B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \,.\, \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \end{bmatrix}$$

Observe que o elemento na linha *i* e coluna *j* da matriz A .B é obtido pela soma de produtos dos elementos da linha *i* da matriz A pelos elementos da coluna *j* da matriz B. Podemos então definir formalmente o produto de matrizes da seguinte forma.

Definição de produto de matrizes: Dadas duas matrizes $A_{m \times n} = [a_{ij}]$ e $B_{n \times p} = [b_{ij}]$, o produto A.B é uma matriz $C_{m \times p} = [c_{ij}]$ tal que cada elemento c_{ij} de C é obtido por:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

Observações:

i) O somatório acima indica que o elemento c_{ij} é obtido multiplicando os elementos da *i*-ésima linha da matriz A pelos elementos correspondentes da *j*-ésima coluna da matriz B, e somando estes produtos.

ii) Só podemos efetuar o produto de uma matriz $A_{m \times n}$ por uma matriz $B_{l \times p}$ se o numero de colunas de A for igual ao número de colunas de B, ou seja, $n = l$. Alem disso, a matriz resultante C será de ordem n x p.

Exemplo 14.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.1+1.0 & 2.(-1)+1.3 \\ 0.1+3.0 & 0.(-1)+3.3 \\ (-1).1+4.0 & (-1).(-1)+4.3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 9 \\ -1 & 13 \end{bmatrix}$$

Exemplo 15.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = ??$$

Observação: Não é Possível realizar este produto, pois o número de elementos em cada linha da 1ª matriz é diferente do número de elementos de cada coluna da segunda.

Propriedades:

Desde que sejam possíveis as operações, as seguintes propriedades são válidas:

i) A.I = I.A = A, onde I representa a matriz identidade.

ii) A.(B + C) = A.B + A.C (distributividade à esquerda em relação à soma).

iii) (A + B).C = A.C + B.C (distributividade à direita em relação à soma).

iv) (A.B).C = A.(B.C) (associatividade)

v) $(A.B)^T = B^T.A^T$ (observe a ordem!)

vi) A.0 = 0.A = 0

Verifique a validade das propriedades anteriores e envie no material do aluno.

É importante observar que, em geral, $A \,.\, B \neq B \,.\, A$ (podendo mesmo um dos membros estar definido e o outro não).

Exemplo 16.

Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

então $A \,.\, B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$ e $B \,.\, A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

Exercícios

1. Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,

$C = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ e $D = \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix}$

Encontre:

a) A + B b) A.C c) B.C d) C.D

e) D.A f) D.B g) -A h) -D

2. Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & x^2 \\ 2x-1 & 0 \end{bmatrix}$. Se $A^T = A$ então $x =$ ______.

3. Se A é uma matriz simétrica então $A - A^T =$ ______.

4. Se A é uma matriz triangular superior então A^T é ____________.

5. Se A é uma matriz diagonal então A^T = _____.

6. Verdadeiro ou falso?

a) $(-A)^T = -A^T$
b) $(A + B)^T = B^T + A^T$
c) Se A.B = 0 então A = 0 ou B = 0
d) $(k_1 A).(k_2 B) = (k_1 k_2)\, A.B$
e) (-A).(-B) = - (A.B)
f) Se A e B são matrizes simétricas então A.B = B.A
g) Se A.B = 0 então B.A = 0
h) Se pudermos efetuar o produto A.A então A é uma matriz quadrada.

7. Se $A^2 = A.A$ então $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}^2 =$ _________.

8. Se A é uma matriz triangular superior então A^2 é __________.

9. Determine x, y, z e w se $\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

10. Dadas $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & -3 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

e $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & -1 & -1 \\ 2 & -5 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

mostre que A.B = A.C.

11. Explique por que, em geral, $(A + B)^2 \neq A^2 + 2A.B + B^2$ e $(A + B).(B - A) \neq A^2 - B^2$.

12. Dadas

$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$

a) Mostre que $A.B = B.A = 0$, $A.C = A$ e $C.A = C$.
b) Use os resultados de (a) para mostrar que $A.C.B = C.B.A$, $A^2 - B^2 = (A - B).(A + B)$ e $(A \pm B)^2 = A^2 + B^2$.

13. Se $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$, ache B de modo que $B^2 = A$.

13. Um construtor tem contratos para construir 3 estilos de casas: moderno, mediterrâneo e colonial. A quantidade de material empregada em cada tipo de casa é dada pela matriz:

	Ferro	Madeira	Vidro	Tinta	Tijolo
Moderno	5	20	16	7	17
Mediterrâneo	7	18	12	9	21
Colonial	6	25	8	5	13

a) Se ele vai construir 5, 7 e 12 casas do tipo moderno, mediterrâneo e colonial, respectivamente, quantas unidades de cada material serão empregadas?

b) Suponha agora que os preços por unidade de ferro, madeira, vidro, tinta e tijolo sejam, respectivamente, 15, 8, 5, 1 e 10. Qual é o preço unitário de cada tipo de casa?

c) Qual o custo total do material empregado?

Matriz inversa

Dada uma matriz quadrada A de ordem n, chamamos de ***inversa*** de A uma matriz B tal que $A.B = B.A = I_n$, onde I_n é a matriz identidade de ordem n. Denotamos a inversa de A por A^{-1}. Se a matriz A possui inversa, dizemos que A é ***inversível*** ou ***não-singular***. Caso contrário, dizemos que A é ***não-inversível*** ou ***singular***.

Exemplo 17.

Se $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ então $A^{-1} = \begin{bmatrix} 4/5 & -3/5 \\ -1/5 & 2/5 \end{bmatrix}$,

pois $A.A^{-1} = A^{-1}.A = I_2$. (verifique !!!)

Exemplo 18. Determine a inversa da matriz $A = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 11 & 4 \end{bmatrix}$.

Solução: Por definição, a inversa de A é uma matriz

B = $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ tal que A.B = B.A = I_2. Impondo a 1ª condição,

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 11 & 4 \end{bmatrix}} \cdot \underset{B}{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}} = \underset{I_2}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

$$\begin{bmatrix} 6a+2c & 6b+2d \\ 11a+4c & 11b+4d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Logo, $\begin{cases} 6a+2c=1 \\ 11a+4c=0 \end{cases}$ e $\begin{cases} 6b+2d=0 \\ 11b+4d=1 \end{cases}$

Resolvendo os sistemas, temos: $a = 2$, $b = -1$, $c = -11/2$ e $d = 3$.

Então,

$$\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 11 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -11/2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ou seja, A.B = I. Também

$$. = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -11/2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 11 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ou seja, B.A = I. Portanto, B = $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -11/2 & 3 \end{bmatrix}$ é a inversa de A ($B = A^{-1}$).

Teorema. A inversa de uma matriz quando existir é única.
Prova: Suponha que B e C sejam matrizes inversas de uma matriz A.
Logo, B . A = I = A . C
Então B = B . I = B . (A . C) = (B . A) . C = I . C = C. Portanto, B = C.

Observações:

i. Se A é uma matriz quadrada e existe uma matriz B tal que B.A = I, então A é inversível, ou seja, A^{-1} existe e, além disso, $B = A^{-1}$. Em outras palavras, basta verificar uma das condições para a inversa de uma matriz.

ii. Se A e B são matrizes quadradas de mesma ordem, ambas inversíveis (isto é existem A^{-1} e B^{-1}), então $A.B$ é inversível e $(A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$.

iii. Nem toda matriz tem inversa.

Exemplo 19. Para mostrar que $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ não tem inversa, é suficiente mostrar que a equação matricial

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

não tem solução. Isto é verdade, pois

$$\begin{bmatrix} 2c & 2d \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

implica que $2c = 1$ e $c = 0$, e não podemos ter estas igualdades simultaneamente.

Um método de inversão de matrizes

O cálculo da inversa de uma matriz pelo método apresentado no exemplo 1.4.2 envolve a solução de um grande sistema de equações lineares. Veremos agora um processo prático de cálculo da matriz inversa baseado em operações simples nas linhas da matriz. Este processo é muito vantajoso em termos de cálculos.

Chamamos **de *operações elementares*** sobre uma matriz as seguintes operações:

I – Troca de duas linhas.

II – Multiplicação de uma linha por um número real não nulo.

III – Substituição de uma linha por sua soma com outra linha previamente multiplicada por um número real não nulo.

Observemos inicialmente que cada operação elementar sobre uma matriz A corresponde a aplicar esta mesma operação sobre a matriz identidade e, em seguida, multiplicar esta nova matriz por A.

Exemplo 20. Ao multiplicarmos a primeira linha da matriz

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -4 \end{bmatrix}$ por 2, obtemos a matriz $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -4 \end{bmatrix}$,

que é exatamente o produto $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -4 \end{bmatrix}$

da matriz identidade multiplicada por 2 pela matriz A.

Exemplo 21. Ao trocarmos a primeira e segunda linha da matriz A do exemplo acima, obtemos a matriz.

Este resultado é o mesmo do produto

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

Exemplo 22. Ao somarmos à primeira linha da matriz A a segunda linha multiplicada por 2, obtemos a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 10 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -4 \end{bmatrix}$,

que é o mesmo do produto $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -4 \end{bmatrix}$

Através destes exemplos podemos perceber que existe uma relação íntima entre as operações elementares sobre uma matriz e certas matrizes especiais constituídas a partir da matriz identidade.

Uma ***matriz elementar*** é uma matriz obtida a partir da matriz identidade pela aplicação de uma operação elementar.

Suponhamos que conseguimos transformar uma matriz A na matriz identidade através de aplicações sucessivas de operações elementares. Como a cada operação corresponde uma multiplicação por uma matriz elementar $\mathbf{E}_i$, teremos então:

$$I = E_k \,.\, E_{k-1} \,.\, \dots \,.\, E_2 \,.\, E_1 \,.\, A = (E_k \,.\, E_{k-1} \,.\, \dots \,.\, E_2 \,.\, E_1 \,.\, I) \,.\, A$$

Mas isto quer dizer que $(\mathbf{E}_k \,.\, \mathbf{E}_{k-1} \,.\, \dots \,.\, \mathbf{E}_2 \,.\, \mathbf{E}_1 \,.\, \mathbf{I}) = \mathbf{A}^{-1}$. Mais precisamente, temos o seguinte:

Teorema: Se uma matriz A pode ser reduzida à matriz identidade por uma seqüência de operações elementares então A **é inversível** e a matriz inversa de A é obtida a partir da matriz identidade aplicando-se a mesma seqüência de operações. Se A não pode ser reduzida à matriz identidade, ela não é inversível.

Na prática, operamos simultaneamente com as matrizes A e I, através de operações elementares, até chegarmos à matriz I na posição correspondente à matriz A. A matriz obtida no lugar correspondente à matriz I será a inversa de A.

$(A \mid I) \Rightarrow (I \mid A^{-1})$

Exemplo 23. Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

Coloquemos A junto com a matriz identidade e apliquemos as operações elementares sobre A para transformá-la na matriz identidade. Cada operação deve ser efetuada simultaneamente na matriz identidade.

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Trocando a primeira e segunda linha, obtemos

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Agora, somamos a quarta à primeira, e à segunda, a primeira linha multiplicada por -2.

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Subtraímos a segunda linha da terceira, obtendo

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Trocamos o sinal da terceira linha e, em seguida, anulamos os demais elementos da terceira coluna.

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

Finalmente, obtemos a identidade à esquerda e a inversa de A a direita.

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & -3 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -5 & 6 & 6 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & -5 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

Portanto,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & -3 & 2 \\ -5 & 6 & 6 & -4 \\ 4 & -5 & -4 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Verificação:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -3 & -3 & 2 \\ -5 & 6 & 6 & -4 \\ 4 & -5 & -4 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exemplo 24. Seja A = $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.

Partimos de

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

e fazendo operações elementares para converter a parte esquerda (que corresponde a A) na matriz identidade, obtemos

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

A anulação de uma linha de A significa que A não pode ser reduzida à matriz identidade. Logo, A não possui inversa.

Exercícios

1. Verifique se a matriz C é inversa de A, onde

a) A = $\begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ e C = $\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -3 & 8 \end{bmatrix}$

b) A = $\begin{bmatrix} 9 & 7 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$ e C = $\begin{bmatrix} 4 & -7 \\ -5 & 9 \end{bmatrix}$

2. Encontre A^{-1}, onde

a) A = $\begin{bmatrix} 12 & 7 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ b) A = $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix}$

c) A = $\begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ d) A = $\begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & -2 \\ -4 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$

e) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -4 & -2 & -2 \\ 2 & -5 & 1 \end{bmatrix}$ f) $A = \begin{bmatrix} -3 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & -5 & 4 \end{bmatrix}$

g) $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ h) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

i) $A = \begin{bmatrix} -1 & 10 & -7 \\ -1 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ j) $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 7 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

3. Calcular o valor de k para que a matriz $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 6 & k \end{bmatrix}$ não tenha inversa.

4. Uma forma de codificar uma mensagem é através de multiplicação por matrizes. Vamos associar as letras do alfabeto aos números segundo a correspondência a seguir.

A→1 B→2 C→3 D→4 E→5 F→6 G→7 H→8 I→9
J→10 L→11 M→12 N→13 O→14 P→15 Q→16 R→17 S→18
T→19 U→20 V→21 W→22 X→23 Y→24 Z→25

Suponhamos que a nossa mensagem seja "PUXA VIDA". Podemos

escrevê-la em uma matriz 3x3 assim: $\begin{bmatrix} P & U & X \\ A & - & V \\ I & D & A \end{bmatrix}$,

que usando a correspondência numérica fica

$$M = \begin{bmatrix} 15 & 20 & 23 \\ 1 & 0 & 21 \\ 9 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Agora seja **C** uma matriz 3x3 qualquer inversível, por exemplo:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Multiplicando nossa matriz da mensagem por C, obtemos

$$M\,.\,C = \begin{bmatrix} 15 & 20 & 23 \\ 1 & 0 & 21 \\ 9 & 4 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 83 & 58 \\ 1 & 21 & 22 \\ 5 & 13 & 14 \end{bmatrix}$$

Transmitimos esta nova matriz (na prática, envia-se a cadeia de números -5 83 58 1 21 22 5 13 14). Quem recebe a mensagem decodifica-a através da multiplicação pela inversa ($(M.C).C^{-1} = M$) e posterior transcrição dos números pelas letras. A matriz C é chamada de ***chave*** para o código.

a) Você recebeu a mensagem -12 48 23 -2 42 26 1 42 29. Traduza a mensagem utilizando a mesma chave.

b) Aconteceu que o inimigo descobriu sua chave. O seu comandante manda você substituir a matriz chave por . Você transmite uma mensagem a ele (codificada, naturalmente!). Por que não será possível a ele decodificar a mensagem?

c) Escolha uma matriz chave que dê para codificar mensagens de até 16 letras. Codifique e descodifique à vontade.

Capítulo II

SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

Introdução

Para motivar o estudo de sistemas lineares, vamos considerar o seguinte problema:

Um nutricionista precisa estabelecer uma dieta diária contendo 10 unidades de vitamina A, 30 unidades de vitamina B e 18 unidades de vitamina C. Essas vitaminas estão contidas em quantidades variadas em cinco alimentos que vamos chamar de S_1, S_2, S_3, S_4 e S_5. O quadro seguinte fornece o número de unidades das vitaminas A, B e C em cada unidade desses cinco alimentos.

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
A	0	1	5	4	3
B	2	1	0	3	2
C	3	1	0	9	0

Calcular as quantidades dos cinco alimentos que devem ser incluídas na dieta diária, a fim de encontrarmos os teores requeridos de vitaminas.

Modelagem do problema: Sejam x_1, x_2, x_3, x_4 e x_5 o número de unidades dos alimentos S_1, S_2, S_3, S_4 e S_5, respectivamente, de uma dieta diária. O teor de 10 unidades de vitamina A pode ser expresso pela seguinte equação:

$$x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 3x_5 = 10$$

Analogamente, expressamos os outros teores pelas equações

$$2x_1 + x_2 + 3x_4 + 2x_5 = 30$$
$$3x_1 + x_2 + 9x_4 = 18$$

Nosso problema consiste em encontrar valores x_1, x_2, x_3, x_4 e x_5 que satisfaçam o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 3x_5 = 10 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_4 + 2x_5 = 30 \\ 3x_1 + x_2 + 9x_4 = 18 \end{cases}$$

Problemas desta natureza são muito comuns e suas soluções dependem de entendermos como resolver um sistema de equações lineares. É isso que veremos neste Capítulo, começando com a definição a seguir de igualdade linear.

Uma ***equação linear*** (ou *igualdade linear*) é uma equação do tipo:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$$

onde os x_i $(1 \le i \le n)$ são as *variáveis* (ou *incógnitas*) da equação, os a_i $(1 \le i \le n)$ são valores reais denominados *coeficientes* das variáveis, e b é um valor real denominado *termo independente*.

Exemplos de equações lineares:

- $2x_1 + 5x_2 - \sqrt{3}x_3 = 6$
- $-1/2\, x_1 + 3x_2 = -4$
- $3x - 2y + z = 1$ (equivale a $3x_1 - 2x_2 + x_3 = 1$)

Exemplos de equações não lineares:

- $x^2 + y^2 = 9$
- $x_1 + x_1x_2 + 4x_3 = 3$

Atribuindo valores às variáveis x_i de modo a satisfazer a equação, obtemos uma ***solução*** da equação.

Exemplo 1. A seqüência (5, 6, 7) é solução da equação $2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 14$, pois tomando $x_1 = 5$, $x_2 = 6$ e $x_3 = 7$ na equação dada teremos

$$2\,(5) + 3\,(6) - 2\,(7) = 14$$

Um ***sistema de equações lineares*** com *m* equações e *n* incógnitas é um conjunto de equações lineares descritas na forma

$$(*)\quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Uma *solução* do sistema (*) é uma *n*-upla $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ que satisfaz as *m* equações simultaneamente. Nem todo sistema de equações lineares possui solução. O nosso objetivo neste capítulo é decidir se um dado sistema de equações lineares possui solução, e encontrar uma solução, caso ela exista.

Sistemas e matrizes

Vamos agora aprender como descrever um sistema de equações lineares de forma mais compacta, utilizando matrizes. Podemos escrever o sistema (*) na seguinte forma matricial:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

ou **A** . **X** = **B**, onde

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ e } \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

A matriz A é denominada ***matriz dos coeficientes***, X é a ***matriz das incógnitas***, e B é a ***matriz dos termos independentes.***

Uma outra matriz que desempenha papel importante na solução de sistemas lineares é a formada pela matriz dos coeficientes e a dos termos independentes, ou seja,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & L & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & L & a_{2n} & b_2 \\ M & M & & M & M \\ a_{m1} & a_{m2} & L & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

que chamamos de ***matriz ampliada do sistema***. Cada linha desta matriz é simplesmente uma representação abreviada da equação correspondente no sistema.

Exemplo 2. Dado o sistema $\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 4 \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 5 \end{cases}$, temos a forma matricial

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & -3 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot X = B$$

A matriz ampliada do sistema é $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 4 & 4 \\ 1 & -3 & -2 & 5 \end{bmatrix}$

Dois sistemas de equações lineares são ***equivalentes*** se qualquer solução de um deles é também solução do outro. Em outras palavras, dois sistemas de equações lineares são equivalentes se possuem as mesmas soluções.

Operações elementares

Vamos agora estudar algumas operações sobre um sistema de equações lineares. Elas são semelhantes às operações elementares sobre matrizes e fundamentais para encontrarmos uma solução para o sistema. São três as ***operações elementares*** sobre um sistema de equações lineares.

I – Permutação de duas equações.
II – Multiplicação de uma equação por um número real não nulo.
III – Substituição de uma equação por sua soma com outra equação previamente multiplicada por um número real não nulo.

Exemplo 3. Dado o sistema $\begin{cases} 2x+4y-6z=10 \\ 4x+2y+2z=16 \\ 2x+8y-4z=24 \end{cases}$.

a) Quando desejamos permutar, por exemplo, a 2ª equação com a 3ª, escrevemos:

$$\begin{cases} 2x+4y-6z=10 \\ 4x+2y+2z=16 \\ 2x+8y-4z=24 \end{cases} \to L_{23} \text{ e o sistema resultante será } \begin{cases} 2x+4y-6z=10 \\ 2x+8y-4z=24 \\ 4x+2y+2z=16 \end{cases}$$

b) Quando desejamos multiplicar a 1ª equação, por exempo, por 1/2 , escrevemos:

$$\begin{cases} 2x+4y-6z=10 \to L_1\ 1/2 \\ 2x+8y-4z=24 \\ 4x+2y+2z=16 \end{cases} \text{ e o sistema resultante será } \begin{cases} x+2y-3z=5 \\ 2x+8y-4z=24 \\ 4x+2y+2z=16 \end{cases}$$

c) Quando desejamos substituir a 2ª equação, por exemplo, pela soma dela com a 1ª equação multiplicada por (-2), escreveremos:

$$\begin{cases} 2x+4y-6z=10 \\ 2x+8y-4z=24 \to L_2 = L_2 + L_1\ (-2) \\ 4x+2y+2z=16 \end{cases} \text{ e o sistema resultante será } \begin{cases} 2x+4y-6z=10 \\ 0x-6y+14z=-4 \\ 2x+8y-4z=24 \end{cases}$$

O leitor poderá verificar, a título de exercício, que todos os sistemas do exemplo acima são equivalentes, isto é, têm a mesma solução: $x = 2$, $y = 3$ e $z = 1$. Mais precisamente, a aplicação de qualquer operação elementar sobre um sistema de equações lineares produz um sistema linear equivalente. Esta afirmação justifica-se pelo fato de que uma operação elementar sempre adiciona um mesmo valor em ambos os membros de uma equação do sistema dado.

Baseado neste fato, podemos construir um algoritmo para encontrar solução de sistemas de equações lineares da seguinte forma:

Método de Gauss-Jordan

- Transformamos, por meio de operações elementares, o sistema dado em outro em que a matriz dos coeficientes seja a matriz unidade;
- Transformada a matriz dos coeficientes na matriz unidade, a matriz dos termos independentes ficará

transformada na solução do sistema.

Este é conhecido como **método de Gauss-Jordan.** Ele é muito usado devido às suas vantagens computacionais. Vejamos um exemplo.

Exemplo 4. Dado o sistema do exemplo anterior $\begin{cases} 2x+4y-6z=10 \\ 2x+8y-4z=24 \\ 4x+2y+2z=16 \end{cases}$

Solução:

$$\begin{cases} 2x+4y-6z=10 \rightarrow L_1\left(\frac{1}{2}\right) \\ 4x+2y+2z=16 \\ 2x+8y-4z=24 \end{cases} \qquad \begin{cases} 1x+2y-3z=5 \\ 4x+2y+2z=16 \rightarrow L_2=L_2+L_1\,(-4) \\ 2x+8y-4z=24 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1x+2y-3z=5 \\ 0x-6y+14z=-4 \\ 2x+8y-4z=24 \rightarrow L_3=L_3+L_1\,(-2) \end{cases} \qquad \begin{cases} 1x+2y-3z=5 \\ 0x-6y+14z=-4 \rightarrow L_2=L_2\left(-\frac{1}{6}\right) \\ 0x+4y+2z=14 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1x+2y-3z=5 \rightarrow L_1=L_1+L_2\,(-2) \\ 0x+1y-\frac{7}{3}z=\frac{2}{3} \\ 0x+4y+2z=14 \end{cases} \qquad \begin{cases} 1x+0y+\frac{5}{3}z=\frac{11}{3} \\ 0x+1y-\frac{7}{3}z=\frac{2}{3} \\ 0x+4y+2z=14 \rightarrow L_3=L_3+L_2\,(-4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1x+0y+\frac{5}{3}z=\frac{11}{3} \\ 0x+1y-\frac{7}{3}z=\frac{2}{3} \\ 0x+0y+\frac{34}{3}z=\frac{34}{3} \rightarrow L_3\left(\frac{3}{34}\right) \end{cases} \qquad \begin{cases} 1x+0y+\frac{5}{3}z=\frac{11}{3} \\ 0x+1y-\frac{7}{3}z=\frac{2}{3} \rightarrow L_2=L_2+L_3\left(\frac{7}{3}\right) \\ 0x+0y+1z=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1x+0y+\frac{5}{3}z=\frac{11}{3} \rightarrow L_1=L_1+L_3\left(-\frac{5}{3}\right) \\ 0x+1y+0z=3 \\ 0x+0y+1z=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 1x+0y+0z=2 \\ 0x+1y+0z=3 \\ 0x+0y+1z=1 \end{cases}$$

Logo, a solução deste último sistema é: $x=2$, $y=3$ e $z=1$. Como todos os sistemas anteriores são equivalentes, esta também é a solução de todos os sistemas anteriores e, em particular, do sistema dado.

Observe que as variáveis x, y e z praticamente não participaram do processo, a não ser pela presença ao lado dos coeficientes. Logo, podemos aplicar o método acima utilizando apenas a matriz dos coeficientes e a dos termos independentes, sem escrever as variáveis.

Exemplo 5. Dado o sistema $\begin{cases} 2x+y+3z=8 \\ 4x+2y+2z=4 \\ 2x+5y+3z=-12 \end{cases}$.

Solução: Procedendo de forma análoga ao exemplo anterior e lembrando que a última coluna contém os termos independentes, temos:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 8 \\ 4 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 3 & -12 \end{bmatrix} \rightarrow L_1\left(\frac{1}{2}\right) \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 3/2 & 4 \\ 4 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 3 & -12 \end{bmatrix} \rightarrow L_2 = L_2 + L_1(-4)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 3/2 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & -12 \\ 2 & 5 & 3 & -12 \end{bmatrix} \rightarrow L_3 = L_3 + L_1(-2) \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 3/2 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & -12 \\ 0 & 4 & 0 & -20 \end{bmatrix} \rightarrow L_{23}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 3/2 & 4 \\ 0 & 4 & 0 & -20 \\ 0 & 0 & -4 & -12 \end{bmatrix} \rightarrow L_2\left(\frac{1}{4}\right) \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 3/2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & -4 & -12 \end{bmatrix} \rightarrow L_3\left(-\frac{1}{4}\right)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 3/2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow L_1 = L_1 + L_2\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3/2 & 13/2 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow L_1 = L_1 + L_3\left(-\frac{3}{2}\right) \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

O sistema inicial de equações lineares se transformou no sistema equivalente:

$$\begin{cases} 1x+0y+0z=2 \\ 0x+1y+0z=-5 \\ 0x+0y+1z=3 \end{cases}$$

cuja solução é: $x = 2$, $y = -5$ e $z = 3$. Portanto, esta também é a solução do sistema dado.

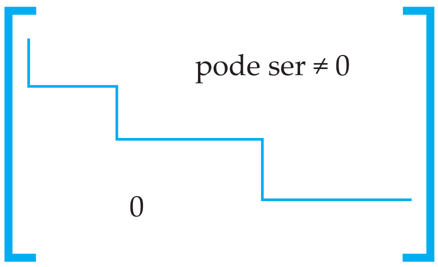
Mas ainda precisamos de alguns conceitos adicionais para entender por completo como resolver um sistema de equações lineares, pois um tal sistema pode não possuir solução, ou ainda, pode possuir infinitas soluções. Veremos como tratar estes casos nas próximas seções.

Forma escada

Motivado pelas operações elementares estudadas na seção anterior, introduzimos o seguinte conceito sobre matrizes:

Uma matriz está na ***forma escada*** se as seguintes condições são satisfeitas:
a) O primeiro elemento não nulo de uma linha não nula é 1;
b) Cada coluna que contém o primeiro elemento não nulo de alguma linha tem todos os seus outros elementos iguais a zero;
c) Toda linha nula ocorre abaixo de todas as linhas não nulas;
d) Se as linhas $1,\ldots,r$ são as linhas não nulas e se o primeiro elemento não nulo da linha i ocorre na coluna k_i então $k_1 < k_2 < \; < k_r$.

Esta última condição impõe a forma escada à matriz:



Em uma matriz na forma escada o número de zeros precedendo o primeiro elemento não nulo de uma linha aumenta a cada linha até que sobre somente linhas nulas, se houver.

Exemplo 6.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Não está na forma escada pois a 2ª condição não é satisfeita.

Exemplo 7.

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Não está na forma escada pois a 1ª e 4ª condições não estão satisfeitas.

Exemplo 8.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Não satisfaz a 1ª e nem a 3ª condições.

Exempo 9.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Está na forma escada.

Exercício 1. A matriz nula está na forma escada?

Note que as operações elementares sobre um sistema de equações lineares são, na prática, operações elementares aplicadas sobre matrizes,

Dada uma matriz $A_{m \times n}$, dizemos que $B_{m \times n}$ é uma matriz na **forma escada *equivalente*** *à* A se B está na forma escada e for obtida a partir de A por aplicações sucessivas de operações elementares.

Definição de posto e nulidade de matriz: Dada uma matriz $A_{m \times n}$, seja $B_{m \times n}$ a matriz na forma escada equivalente à A.

- O ***posto*** de A é o número de linhas não nulas de B.
- A ***nulidade*** de A é o valor $n - p$.

Exemplo 10. Encontrar o posto e a nulidade da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Solução: Efetuando operações elementares sobre A para obter a matriz na forma escada equivalente, temos (as operações elementares aplicadas não serão mais explicitamente indicadas. Além disso, para ganhar tempo e espaço, não descreveremos todas as matrizes, mas apenas as mais importantes. Mas o leitor poderá facilmente identificar todas as operações aplicadas analisando cada matriz resultante.):

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & -4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 5/2 \\ 0 & -4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 5/2 \\ 0 & 0 & 8 & 11 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -7/8 \\ 0 & 1 & 0 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 11/8 \end{bmatrix}$$

Esta última matriz é equivalente a A e está na forma escada. Logo, o posto de A é 3, e a nulidade de A é $4 - 3 = 1$.

Exemplo 11. Encontrar o posto e a nulidade da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & -5 & 1 \\ 4 & 16 & 8 \end{bmatrix}$$

Solução: Efetuando operações elementares sobre A para obter a matriz na forma escada equivalente, obtemos a matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 14/9 \\ 0 & 1 & 1/9 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Portanto, o posto de A é 2, e a nulidade é 1.

Soluções de um sistema de equações lineares

Consideremos um sistema de equações lineares com m equações e n incógnitas

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Este sistema poderá ter:

- Uma única solução,
- Infinitas soluções, ou
- nenhuma solução.

No primeiro caso, dizemos que o sistema é ***possível* (ou *compatível*) e *determinado***. No segundo caso, dizemos que o sistema é ***possível* (ou *compatível*) e *indeterminado***. No terceiro caso, dizemos que o sistema é ***impossível* (ou *incompatível*).**

Teorema 1. Um sistema de m equações lineares e n incógnitas admite solução se, e somente se, o **posto da matriz ampliada** é igual ao **posto da matriz dos coeficientes**. Além disso, se as duas matrizes têm o mesmo posto p e:

- $p = n$, a solução é única.
- $p < n$, o sistema admite infinitas soluções.

Exemplo 12. Resolver o sistema $\begin{cases} x+2y+z+t=0 \\ x+3y-z+2t=0 \end{cases}$.

Solução: A matriz associada ao sistema é

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

que reduzida à forma escada fornece

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

O posto p da matriz dos coeficientes e da matriz ampliada é 2. Como $n = 4$, o sistema possui infinitas soluções. Estas podem ser obtidas da seguinte forma: Primeiro, observamos que a matriz reduzida à forma escada corresponde ao sistema

$$\begin{cases} x+0y+5z-t=0 \\ 0x+y-2z+t=0 \end{cases}$$

Podemos reescrever este sistema na seguinte forma matricial:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} t$$

As variáveis z e t são chamadas de variáveis livres do sistema, e dizemos também que o sistema tem grau de liberdade 2.

Ao atribuirmos valores quaisquer para z e t, obtemos valores para x e y que correspondem à solução do sistema. Por exemplo, fazendo $z = 1$ e $t = 0$, obtemos $x = -5$ e $y = 2$. Logo, $(-5, 2, 1, 0)$ é solução do sistema.

Para $z = 0$ e $t = 1$, obtemos $x = 1$ e $y = -1$. Logo, $(1, -1, 0, 1)$ é também solução do sistema.

Sistemas lineares como o do exemplo acima, em que os termos independentes são todos nulos, são chamados de ***sistemas homogêneos***. Note que a solução nula (ou trivial), ou seja, aquela obtida atribuindo o valor zero para cada uma das variáveis do sistema, é sempre solução de um sistema homogêneo. Portanto, sistemas homogêneos são sempre possíveis.

Veremos a seguir exemplo de um sistema impossível.

Exemplo 13. Resolver o sistema $\begin{cases} 2x + 4y = 16 \\ 5x - 2y = 4 \\ 10x - 4y = 3 \end{cases}$.

Solução: A matriz associada ao sistema é

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 16 \\ 5 & -2 & 4 \\ 10 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

que reduzida à forma escada fornece

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

Como o posto p da matriz dos coeficientes é 2 e o da matriz ampliada é 3, o sistema não possui solução, ou seja, é impossível.

Exemplo 14. Calcular o valor de k para que o sistema $\begin{cases} x + 2y = -1 \\ -3x + 4y = k \\ 2x - y = -7 \end{cases}$ seja compatível.

Solução: A matriz associada ao sistema é

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & 4 & k \\ 2 & -1 & -7 \end{bmatrix}$$

que reduzida à forma escada fornece

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1-2\left(\dfrac{k-3}{10}\right) \\ 0 & 1 & \dfrac{k-3}{10} \\ 0 & 0 & -5+\dfrac{k-3}{2} \end{bmatrix}$$

Para que o sistema seja compatível devemos ter $-5+\dfrac{k-3}{2}=0$, o que resulta em $k = 13$.

Exercícios

1. Reduza as matrizes à forma escada:

a) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & -4 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

2. Calcule o posto e a nulidade das matrizes da questão anterior.

3. Classificar e resolver os sistemas de equações lineares:

a) $\begin{cases} 5x+8y=34 \\ 10x+16y=50 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x-y-3z=15 \\ 3x-2y+5z=-7 \\ 2x+3y+4z=7 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x+2y-5z=8 \\ 2x-4y-2z=-4 \\ x-2y-3z=-4 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x+3y-2z=2 \\ 3x-5y+4z=5 \\ x-2y-7z=-24 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x+3z=-8 \\ 2x-4y=-4 \\ 3x-2y-5z=26 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 2x+4y+6z=-6 \\ 3x-2y-4z=-38 \\ x+2y+3z=-3 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x+2y+3z=10 \\ 3x+4y+6z=23 \\ 3x+2y+3z=10 \end{cases}$

h) $\begin{cases} x+y-z=0 \\ 2x-3y+z=0 \\ 4x-4y-2z=0 \end{cases}$

i) $\begin{cases} x+3z=-8 \\ 2x-4y=-4 \\ 3x-2y-5z=26 \end{cases}$

j) $\begin{cases} x-z=0 \\ 3x+y+2z=0 \\ 4x+2y+2z=0 \end{cases}$

k) $\begin{cases} 5x-3y-7z=-5 \\ 4x-y-z=2 \\ -2x+4y+8z=10 \end{cases}$

l) $\begin{cases} 6x+2y+4z=0 \\ -9x-3y-6z=0 \end{cases}$

m) $\begin{cases} x-y=0 \\ 2y+4z=6 \\ x+y+4z=6 \end{cases}$

n) $\begin{cases} 3x-8y-9z=14 \\ 7x+3y+2z=-12 \\ -8x-9y+6z=11 \end{cases}$

o) $\begin{cases} 4x-3y=-18 \\ 2y+5z=-8 \\ x-2y-3z=0 \end{cases}$

p) $\begin{cases} x+2y=4 \\ -3x+4y=3 \\ 2x-y=-6 \end{cases}$

4. Determine o valor de *k* para que o sistema $\begin{cases} -4x+3y=2 \\ 5x-4y=0 \\ 2x-y=k \end{cases}$ admita solução.

5. Dado o sistema linear: $\begin{cases} 3x+5y+12z-w=-3 \\ x+y+4z-w=-6 \\ 2y+2z+w=5 \end{cases}$

a. Discuta a solução do sistema.
b. Acrescente a equação $2z+kw=9$ ao sistema e encontre um valor para *k* que torne o sistema incompatível.

Capítulo III

DETERMINANTES

Definição de determinante

Determinante é uma função que associa a cada matriz quadrada um valor real. Esta função, além de atuar na solução de sistemas de equações lineares, permite saber se a matriz tem ou não inversa, pois as que não têm são precisamente aquelas cujo determinante é igual a 0. Representamos o determinante de uma matriz A por det A ou $|A|$.

Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz quadrada de ordem n. Definiremos o ***determinante*** de A (det A) recursivamente da seguinte forma:

- Se $n = 1$, ou seja, $A = [a_{11}]$ então $\det A = a_{11}$.
- Se $n > 1$ então $\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} |D_{ij}|$, onde i é uma linha (qualquer) de A, e D_{ij} é a submatriz quadrada de A de ordem $n-1$ obtida removendo a linha i e a coluna j.

O determinante $|D_{ij}|$ é chamado de ***menor complementar*** do elemento a_{ij} da matriz A, e $A_{ij} = (-1)^{i+j} |D_{ij}|$ é chamado de ***complemento algébrico* ou *cofator* do elemento** a_{ij}.

A definição de determinante também pode ser feita fixando uma coluna j ao invés de uma linha. Neste caso, a fórmula fica $\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} |D_{ij}|$. Pode-se demonstrar que em qualquer caso o valor do determinante é o mesmo.

Exemplo 1. det $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}\, a_{22} - a_{21}\, a_{12}$. Esta fórmula é obtida utilizando a definição de determinante fixando, por exemplo, a primeira linha ($i = 1$).

Exemplo 2. Se $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ então det A = 2 . 3 – 5 . (-1) = 11.

Exemplo 3. Se $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ então

$$\det A = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}\,(a_{22}\,a_{33} - a_{32}\,a_{23}) - a_{12}\,(a_{21}\,a_{33} - a_{31}\,a_{23}) + a_{13}\,(a_{21}\,a_{32} - a_{31}\,a_{22})$$

$$= a_{11}\,a_{22}\,a_{33} - a_{11}\,a_{32}\,a_{23} - a_{12}\,a_{21}\,a_{33} + a_{12}\,a_{31}\,a_{23} + a_{13}\,a_{21}\,a_{32} - a_{13}\,a_{31}\,a_{22}$$

Exemplo 4. Se A = então

$$\det A = 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 2 \,.\, 10 - 1 \,.\, (-3) + 4 \,.$$

(-6) = -1

Exercícios

1. Calcule det A, nos casos:

a) $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 5 & 9 & 8 \\ 7 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & -4 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -3 & -4 & 1 \\ -2 & -3 & -1 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -3 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ f) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & -4 \\ -2 & 2 & -3 \end{bmatrix}$

g) $\begin{bmatrix} -2 & -3 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \\ -3 & -1 & -4 & 1 \\ -2 & 2 & -3 & -1 \end{bmatrix}$

2. Resolver a equação:

a) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & x \\ 1 & -2 & x \\ 2 & -1 & x \end{vmatrix} = 8$ b) $\begin{vmatrix} x & 3 & 2 \\ 5 & x & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 12$

c) $\begin{vmatrix} 2 & x-2 & 1 \\ 1 & x+3 & 4 \\ 3 & x+1 & 5 \end{vmatrix} = 56$

Propriedades dos determinantes

Como decorrência da definição, podemos descrever uma série de **propriedades dos determinantes.**

Seja A uma matriz quadrada.

i. Se todos os elementos de uma linha (ou coluna) de A são nulos, então det A = 0.

ii. det A = det A^T.

iii. Se multiplicarmos uma linha (ou coluna) de A por uma constante *k*, o determinante fica multiplicado por *k*.

iv. Quando trocamos duas linhas (ou colunas) de A, o determinante troca de sinal.

v. Se A tem duas linhas (ou colunas) iguais, então det A = 0.

vi. O determinante de A não se altera se somarmos a uma linha outra linha multiplicada por uma constante.

vii. det (A . B) = det A . det B

Em muitos casos, vale a pena utilizar as propriedades anteriores para simplificar o cálculo dos determinantes, como ilustra o exemplo a seguir.

Exemplo 5. Calcule o determinante da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Solução: Se somarmos a segunda linha à terceira, obtemos a matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Pela propriedade (*vi*) acima, o determinante destas duas matrizes é o mesmo. Logo,

$$\det \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= 1 \,.\, (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5$$

Exemplo 6. Calcule o determinante da matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 5 & 9 & 8 \\ 7 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

Solução: Vamos realizar operações sobre a matriz A para simplificar o cálculo do determinante.
Dividindo a 1ª linha por dois, obtemos a matriz abaixo. Pela propriedade (iii), o determinante de A também fica dividido por dois. Portanto, podemos escrever:

$$\det A = 2 \,.\, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 9 & 8 \\ 7 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Realizando operações elementares para anular o 2º e 3º elementos da 1ª coluna, obtemos: (Pela propriedade (*vi*) acima, o determinante não se altera).

$$\det A = 2 \,.\, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -7 \\ 0 & -12 & -20 \end{bmatrix}$$

Calculando o determinante pela 1ª coluna, temos:

det A = 2 . ((-1) . (-20) – (-12) . (-7)) = -128.

Exercícios

1. Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, calcule

a) det A + det B
b) det (A + B)

2. Sejam A e B matrizes quadradas de ordem n. As afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas?

a) det (A.B) = det (B.A)
b) det (A^T) = det A
c) det (2A) = 2 det A
d) det (A^2) = (det A)^2

3. É verdade que o determinante de uma matriz quadrada triangular é igual ao produto dos elementos de sua diagonal. Argumente.

4. Calcule det $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 19 & 18 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & \pi & -5 & 0 & 0 \\ 4 & \sqrt{2} & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 5 & 6 & 1 \end{bmatrix}$.

5. Mostre que det $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{bmatrix} = (a-b).(b-c).(c-a)$

Matriz adjunta e matriz inversa

Dada uma matriz quadrada A, lembremos que o cofator A_{ij} do elemento a_{ij} é dado pela expressão $(-1)^{i+j}\,|D_{ij}|$, onde D_{ij} é a submatriz quadrada de A de ordem $n - 1$ obtida removendo a linha i e a coluna j. Com estes cofatores, podemos formar uma nova matriz $\overline{A}$, denominada ***matriz dos cofatores*** de A.

Exemplo 7. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 4 \\ 1 & 6 & 5 \end{bmatrix}$.

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = -19$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 19, \;\ldots\; \text{etc}$$

$$\text{Então } \overline{A} = \begin{bmatrix} -19 & 19 & -19 \\ -5 & 10 & -11 \\ 4 & -8 & 5 \end{bmatrix}$$

Dada uma matriz quadrada A, chamaremos de ***matriz adjunta* de A** (denotada por adj A) à transposta da matriz dos cofatores de A. Ou seja, adj A = $\overline{A}^{T}$.

Para a matriz A, do exemplo anterior, temos:

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} -19 & -5 & 4 \\ 19 & 10 & -8 \\ -19 & -11 & 5 \end{bmatrix}$$

Vamos efetuar, neste exemplo, o produto A . adj A.

$$A \,.\, \text{adj } A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 4 \\ 1 & 6 & 5 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -19 & -5 & 4 \\ 19 & 10 & -8 \\ -19 & -11 & 5 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -19 & 0 & 0 \\ 0 & -19 & 0 \\ 0 & 0 & -19 \end{bmatrix} = -19\, I_3$$

além disto, podemos verificar que det A = -19. Então A . adj A = = (det A) . I_3. Pode-se demonstrar que esta propriedade é válida para toda matriz quadrada.

Teorema 1. Para toda matriz quadrada A de ordem *n*, A . adj A = (det A) . I_n.

Podemos usar este teorema para calcular a inversa de uma matriz quadrada da seguinte forma: Suponhamos agora que $A_{n \times n}$ tenha inversa, isto é existe A^{-1} tal que A . A^{-1} = I_n. Pela propriedade (*vii*) dos determinantes, temos

det A . det A^{-1} = det (A . A^{-1}) = det I_n = 1

Desse produto concluímos que se A tem inversa:

i. $\det A \neq 0$

ii. $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$

Ou seja, det A ≠ 0 é uma condição necessária para que A tenha inversa. Esta condição é, na verdade, também suficiente, pois pelo Teorema 1, A . adj A = (det A) . I_n, para qualquer matriz quadrada A de ordem *n*. Se det A ≠ 0 então

$$A \cdot \left(\frac{1}{\det A} \cdot \operatorname{adj} A\right) = I$$

Como a inversa é única, concluímos que $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \cdot \operatorname{adj} A$.

Resumindo:

Teorema 2. Uma matriz quadrada A possui inversa se, e somente se, det A ≠ 0. Neste caso,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \operatorname{adj} A$$

Este resultado fornece um novo **método para calcular a inversa de uma matriz**.

Por exemplo, consideremos a matriz $A = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 11 & 4 \end{bmatrix}$.

Então det A = 24 – 22 = 2 ≠ 0 e, portanto, A possui inversa. Podemos então calcular A^{-1} utilizando o teorema 2:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 4 & -11 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -11 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\text{Então } A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \operatorname{adj} A = 1/2 \cdot \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -11 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -11/2 & 3 \end{bmatrix}$$

Exercícios

1. Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, calcule

a) adj A b) det A c) A^{-1}

2. Dizemos que A e B são matrizes semelhantes se existe uma matriz P tal que $B = P^{-1}.A.P$. Mostre que se A e B são semelhantes então det A = det B.

3. Verdadeiro ou falso:
a) Se det A = 1 então $A^{-1} = A$.
b) Se A é uma matriz triangular superior e A^{-1} existe então A^{-1} também será triangular superior.
c) Se A é uma matriz da forma kI_n então det A = k^n.
d) Se A é uma matriz triangular então det A = $a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn}$.

Regra de Cramer

O cálculo da inversa de uma matriz utilizando determinantes fornece um outro método de resolução de sistemas de equações lineares conhecido como ***Regra de Cramer***.

Observação: Este método só se aplica a sistemas lineares em que o número de equações é igual ao número de incógnitas.

Suponha que desejamos resolver o sistema linear de *n* equações e *n* incógnitas.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \quad\vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Podemos escrever este sistema na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

ou $A \cdot X = B$

onde $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ é a matriz dos coeficientes,

$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ é a matriz das incógnitas e $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ é a matriz dos termos independentes.

Suponhamos que det A ≠ 0, e portanto, que A possui inversa A^{-1}. Então multiplicando a equação A . X = B por A^{-1} e, isolando X, temos

$$\begin{array}{lcl} A^{-1}(A\,.\,X) & = & A^{-1}\,.\,B \\ (A^{-1}A)\,.\,X & = & A^{-1}\,.\,B \\ I_n X & = & A^{-1}\,.\,B \\ X & = & A^{-1}\,.\,B \end{array}$$

Reescrevendo esta expressão na forma matricial, temos

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Utilizando o Teorema 2, temos

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Então

$$x_1 = \frac{b_1 A_{11} + \cdots + b_n A_{n1}}{\det A}$$

Mas note que o numerador desta fração é igual ao determinante da matriz obtida de **A** substituindo a primeira coluna pela matriz dos termos independentes:

$$\det \begin{bmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = b_1 A_{11} + \cdots + b_n A_{n1}$$

Logo,

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}$$

Fazendo deduções análogas, obtemos

$$x_i = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}, \text{ para } i = 1, 2, \ldots, n.$$

Observe que no denominador temos o determinante da matriz dos coeficientes (det A $\neq$ 0), e no numerador aparece o determinante da matriz obtida de A substituindo a *i*-ésima coluna pela coluna dos termos independentes. Lembre-se de que este método somente se aplica a um sistema linear de *n* equações e *n* incógnitas e quando o determinante da matriz dos coeficientes for não nulo.

Exemplo 8. Dado o sistema $\begin{cases} 2x - 3y + 7z = 1 \\ x + 3z = 5 \\ 2y - z = 0 \end{cases}$

Temos que: $\det \begin{bmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} = -1 \neq 0.$

Portanto, podemos usar a regra de Cramer. Então

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 & 7 \\ 5 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{-1} = -49 \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 1 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{-1} = 9$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{-1} = 18$$

Exercícios

1. Resolva os sistemas lineares, usando a regra de Cramer.

a) $\begin{cases} 5x + 8y = 34 \\ 10x + 16y = 50 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x + 2y - 5z = 8 \\ 2x - 4y - 2z = -4 \\ x - 2y - 3z = -4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 3z = -8 \\ 2x - 4y = -4 \\ 3x - 2y - 5z = 26 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 10 \\ 3x + 4y + 6z = 23 \\ 3x + 2y + 3z = 10 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x + 3z = -8 \\ 2x - 4y = -4 \\ 3x - 2y - 5z = 26 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 5x - 3y - 7z = -5 \\ 4x - y - z = 2 \\ -2x + 4y + 8z = 10 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x - y = 0 \\ 2y + 4z = 6 \\ x + y + 4z = 6 \end{cases}$

h) $\begin{cases} 4x - y - 3z = 15 \\ 3x - 2y + 5z = -7 \\ 2x + 3y + 4z = 7 \end{cases}$

i) $\begin{cases} 2x + 3y - 2z = 2 \\ 3x - 5y + 4z = 5 \\ x - 2y - 7z = -24 \end{cases}$

j) $\begin{cases} 2x + 4y + 6z = -6 \\ 3x - 2y - 4z = -38 \\ x + 2y + 3z = -3 \end{cases}$

k) $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x - 3y + z = 0 \\ 4x - 4y - 2z = 0 \end{cases}$

l) $\begin{cases} x - z = 0 \\ 3x + y + 2z = 0 \\ 4x + 2y + 2z = 0 \end{cases}$

m) $\begin{cases} 6x + 2y + 4z = 0 \\ -9x - 3y - 6z = 0 \end{cases}$

n) $\begin{cases} 3x - 8y - 9z = 14 \\ 7x + 3y + 2z = -12 \\ -8x - 9y + 6z = 11 \end{cases}$

Capítulo IV

ESPAÇO VETORIAL

Definição de espaço vetorial

A noção comum de vetores como objetos com comprimento, direção e sentido, juntamente com as operações de adição e multiplicação por números reais forma a idéia básica de um espaço vetorial. Para definir um **espaço vetorial**, precisamos de um conjunto de elementos e duas operações definidas sobre os elementos deste conjunto, adição e multiplicação por números reais.

Seja V um conjunto não vazio sobre o qual estão definidas duas operações:

$\forall \vec{u}, \vec{v} \in V, \vec{u} + \vec{v} \in V$ (Soma)
$\forall \alpha \in \mathrm{R}, \ \forall \vec{v}, \in V, \alpha.\vec{v} \in V$ (Multiplicação por escalar)

O conjunto V com essas duas operações é um ***espaço vetorial real*** (ou espaço vetorial sobre) se as seguintes propriedades forem satisfeitas $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V, \forall \alpha, \beta \in \mathrm{R}$:

Em relação à adição:

i. $(\vec{u} + \vec{v}) + w = \vec{u} + (\vec{v} + w)$ (associatividade)
ii. $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ (comutatividade)
iii. $\exists\, 0 \in V$ tal que $\vec{u} + 0 = \vec{u}, \forall \vec{u} \in V$
(existência de vetor nulo)
iv. $\exists - \vec{u} \in V$ tal que $\vec{u} + (-\vec{u}) = 0, \forall \vec{u} \in V$
(existência de inverso aditivo ou simétrico)

Em relação à multiplicação por escalar:

v. $\alpha\,(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$ (distributividade)

vi. $(\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$ (distributividade)
vii. $(\alpha.\beta)\vec{u} = \alpha.(\beta\vec{u})$ (associatividade)
viii. $1\vec{u} = \vec{u}$ (vetor neutro 1)

Os elementos de um espaço vetorial serão chamado de ***vetores***. Como veremos, o conjunto das matrizes, polinômios e o próprio conjunto dos números reais formam um espaço vetorial. Estes conjuntos, apesar de terem naturezas diferentes dos vetores no espaço, "comportam-se" como eles.

Se na definição de espaço vetorial, ao invés de termos os números reais como escalares, tivermos os números complexos, ***V*** será chamado de ***espaço vetorial complexo***.

Exemplo 1. O conjunto $V = \mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ é um espaço vetorial com as operações usuais de adição e multiplicação por escalar assim definidas:

- $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$
- $\alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha y)$

Para verificarmos as oito propriedades de espaço vetorial, consideremos:
$\vec{u}_1 = (x_1, y_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2)$ e $\vec{w} = (x_3, y_3)$.

i. $$\begin{aligned}(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} &= ((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) + (x_3, y_3)\\ &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2) + (x_3, y_3)\\ &= ((x_1 + x_2) + x_3, (y_1 + y_2) + y_3)\\ &= (x_1 + (x_2 + x_3), y_1 + (y_2 + y_3))\\ &= (x_1, y_1) + (x_2 + x_3, y_2 + y_3)\\ &= (x_1, y_1) + ((x_2, y_2) + (x_3, y_3))\\ &= \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})\end{aligned}$$

ii. $$\begin{aligned}\vec{u} + \vec{v} &= (x_1, y_1) + (x_2, y_2)\\ &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2)\\ &= (x_2 + x_1, y_2 + y_1)\\ &= (x_2, y_2) + (x_1, y_1)\\ &= \vec{v} + \vec{u}\end{aligned}$$

iii. $\exists\, 0 = (0,0) \in \mathbb{R}^2$ tal que $\forall\, \vec{u} \in \mathbb{R}^2$, $$\begin{aligned}\vec{u} + 0 &= (x_1, y_1) + (0, 0)\\ &= (x_1 + 0, y_1 + 0)\\ &= (x_1, y_1)\\ &= \vec{u}\end{aligned}$$

$$\text{iv. } \forall\, \vec{u} \in \mathbb{R}^2, \exists\, -\vec{u} = (-x_1, -y_1) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } \vec{u} + (-\vec{u}) = (x_1, y_1) + (-x_1, -y_1)$$
$$= (x_1 - x_1, y_1 - y_1)$$
$$= (0, 0)$$
$$= 0$$

$$\begin{aligned}
\text{v. } \alpha\,(\vec{u} + \vec{v}) &= \alpha\,((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) \\
&= \alpha\,(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\
&= (\alpha\,(x_1 + x_2), \alpha\,(y_1 + y_2)) \\
&= (\alpha x_1 + \alpha x_2, \alpha y_1 + \alpha y_2)) \\
&= (\alpha x_1, \alpha y_1) + (\alpha x_2, \alpha y_2) \\
&= \alpha\,(x_1, y_1) + \alpha\,(x_2, y_2) \\
&= \alpha + \alpha
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{vi. } (\alpha + \beta)\,\vec{u} &= (\alpha + \beta)\,(x_1, y_1) \\
&= ((\alpha + \beta)\,x_1, (\alpha + \beta)\,y_1) \\
&= ((\alpha x_1 + \beta x_1, \alpha y_1 + \beta y_1) \\
&= (\alpha x_1, \alpha y_1) + (\beta x_1, \beta y_1) \\
&= \alpha\,(x_1, y_1) + \beta\,(x_1, y_1) \\
&= \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{vii. } (\alpha.\beta)\,\vec{u} &= (\alpha.\beta)\,(x_1, y_1) \\
&= ((\alpha.\beta)x_1, (\alpha.\beta)y_1) \\
&= (\alpha.(\beta x_1), \alpha.(\beta y_1)) \\
&= \alpha\,(\beta x_1, \beta y_1) \\
&= \alpha(\beta\vec{u})
\end{aligned}$$

$$\text{viii. } 1\vec{u} = 1(x_1, y_1) = (1x_1, 1y_1) = (x_1, y_1) = \vec{u}$$

Todas as oito propriedades de espaço vetorial foram verificadas.

Portanto, o conjunto $V = \mathbb{R}^2 = \{ (x, y) \mid x, y \in \mathbb{R} \}$ é um espaço vetorial com as operações acima definidas.

Exemplo 2. Os conjuntos $\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4, \ldots, \mathbb{R}^n$ também são espaços vetoriais com as operações usuais de adição e multiplicação por escalar.

$V = \mathbb{R}^n = \{ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R} \}$

e se $= (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $= (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ e $a \in \mathbb{R}$,

- $\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$ e
- $a\,\vec{u} = (ax_1, ax_2, \ldots, ax_n)$

Depois de verificadas as oito propriedades de espaço vetorial para o $\mathbb{R}^2$, estas propriedades ficam evidentes também para estes conjuntos. Neste caso, perdemos a visão geométrica de "vetores", pois saímos de um espaço de "dimensão" 3 e passamos a um espaço de dimensão n. Apesar disto, podemos trabalhar com estes espaços da mesma forma que em R^3.

Exemplo 3. O conjunto R com as operações usuais de adição e multiplicação por escalar é espaço vetorial. Os vetores (e os escalares) nesse caso são os próprios números reais. Sabemos que a adição de números reais satisfaz as propriedades (i) a (iv) da definição de espaço vetorial, e o produto de números satisfaz as propriedades (vi) a (viii).

Exemplo 4. O conjunto M(m, n) das matrizes m x n com as operações usuais de adição e multiplicação por escalar formam um espaço vetorial.

Para verificarmos as oito propriedades de espaço vetorial, consideremos A, B e C matrizes de ordem m x n, α e $\beta \in R$.

Em relação à adição valem as propriedades:

(i) $(A + B) + C = A + (B + C)$
(ii) $(A + B) = (B + A)$
(iii) $\exists$ a matriz nula 0 tal que $A + 0 = A$
(iv) $\forall$ matriz $A_{m \times n}$, $\exists$ matriz $-A_{m \times n}$ tal que $A + (-A) = 0$

Em relação à multiplicação por escalar valem as propriedades:

(v) $\alpha (A + B) = \alpha A + \alpha B$
(vii) $(\alpha + \beta) A = \alpha A + \beta A$
(vii) $(\alpha.\beta) A = \alpha(\beta A)$
(viii) $1A = A$

Exemplo 5. O conjunto $P_n = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n \mid a_i \in R\}$ dos polinômios com coeficientes reais de grau $\leq$ n, incluindo o polinômio nulo, em relação às operações usuais de adição de polinômios e multiplicação por escalar é um espaço vetorial. Deixaremos a cargo do leitor a tarefa de testar as oito propriedades de espaço vetorial para este exemplo.

Exemplo 6. O conjunto $V = \{ (x, x^2) \mid x \in R \}$ é um espaço vetorial com as operações de adição e multiplicação por escalar assim definidas:

$$(x_1, x_1^2) \oplus (x_2, x_2^2) = (x_1 + x_2, (x_1 + x_2)^2)$$

$$\alpha \cdot (x, x^2) = (\alpha x, \alpha^2 x^2)$$

Para verificarmos as oito propriedades de espaço vetorial, consideremos $\vec{u} = (x_1, x_1^2)$, $\vec{v} = (x_2,x_2^2)$ e $\vec{w} = (x_3, x_3^2)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\text{i. } (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} &= ((x_1, x_1^2) + (x_2,x_2^2)) + (x_3, x_3^2) \\
&= (x_1 + x_2, (x_1 + x_2)^2) + (x_3, x_3^2) \\
&= (x_1 + x_2 + x_3, ((x_1 + x_2) + x_3)^2) \\
&= (x_1 + x_2 + x_3, (x_1 + (x_2 + x_3))^2) \\
&= (x_1, x_1^2) + ((x_2,x_2^2) + (x_3, x_3^2)) \\
&= \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{ii. } \quad \vec{u} + \vec{v} &= (x_1, x_1^2) + (x_2,x_2^2) \\
&= (x_1 + x_2, (x_1 + x_2)^2) \\
&= (x_2 + x_1, (x_2 + x_1)^2) \\
&= (x_2,x_2^2) + (x_1, x_1^2) \\
&= \vec{v} + \vec{u}
\end{aligned}$$

iii. $\exists\ 0 = (0, 0^2) = (0, 0) \in \boldsymbol{V}$ tal que $\forall\ \vec{u} \in \boldsymbol{V}$,

$$\begin{aligned}
\vec{u} + 0 &= (x_1, x_1^2) + (0, 0) \\
&= (x_1 + 0, (x_1 + 0)^2) \\
&= (x_1, x_1^2) \\
&= \vec{u}
\end{aligned}$$

iv. $\forall\ \vec{u} = (x_1, x_1^2) \in \boldsymbol{V}$, $\exists\ -\vec{u} = (-x_1,(-x_1)^2) \in \boldsymbol{V}$ tal que

$$\begin{aligned}
\vec{u} + (-\vec{u}) &= (x_1, x_1^2) + (-x_1,(-x_1)^2) \\
&= (x_1 - x_1, (x_1 + (-x_1))^2) \\
&= (0, 0) \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{v. } \alpha (\vec{u} + \vec{v}) &= \alpha ((x_1, x_1^2) + (x_2,x_2^2)) \\
&= \alpha (x_1 + x_2, (x_1+ x_2)^2) \\
&= (\alpha (x_1 + x_2), \alpha^2 (x_1 + x_2)^2) \\
&= (\alpha x_1 + \alpha x_2, (\alpha(x_1 + x_2))^2) \\
&= (\alpha x_1 + \alpha x_2, (\alpha x_1 + \alpha x_2)^2) \\
&= (\alpha x_1, (\alpha x_1)^2) + (\alpha x_2, (\alpha x_2)^2) \\
&= (\alpha x_1, \alpha^2 x_1^2) + (\alpha x_2, \alpha^2 x_2^2) \\
&= \alpha \quad + \alpha \\
&= \alpha + \alpha
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{vi. } \quad (\alpha + \beta) \ &= (\alpha + \beta) \\
&= ((\alpha + \beta)\, x_1, \ ) \\
&= ((\alpha + \beta)\, x_1, \ ) \\
&= ((\alpha x_1 + \beta x_1, (\alpha x_1 + \beta x_1)^2) \\
&= (\alpha x_1, (\alpha x_1)^2) + (\beta x_1, (\beta x_1)^2) \\
&= (\alpha x_1, \ ) + (\beta x_1, \ ) \\
&= \alpha\, (x_1, x_1^2) + \beta\, (x_2,x_2^2) \\
&= \alpha\, \vec{u} + \beta\, \vec{v}
\end{aligned}$$

vii. $(\alpha.\beta)\vec{u} = (\alpha.\beta)(x_1, x_1^2)$
$= ((\alpha.\beta)x_1, (\alpha\beta)^2 x_1^2)$
$= (\alpha.(\beta x_1), (\alpha.\beta x_1)^2)$
$= (\alpha.(\beta x_1), \alpha^2.(\beta x_1)^2)$
$= \alpha(\beta x_1, (\beta x_1)^2)$
$= \alpha(\beta x_1, \beta^2 x_1^2)$
$= \alpha(\beta(x_1, x_1^2))$
$= \alpha(\beta\vec{u})$

viii. $1\vec{u} = 1(x_1, x_1^2) = (1x_1, 1^2 x_1^2) = (x_1, x_1^2) = \vec{u}$

Todas as oito propriedades de espaço vetorial foram verificadas. Portanto, o conjunto $V = \{ (x, x^2) \mid x \in R \}$ é um espaço vetorial com as operações acima definidas.

Exemplo 7. Considere o conjunto $R^2 = \{ (x, y) \mid x, y \in R \}$. Vamos mostrar que este conjunto não é um espaço vetorial com as operações de adição e multiplicação por escalar assim definidas:

- $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$
- $\alpha(x, y) = (\alpha x, y)$

Para isso, vamos mostrar que alguma das oito propriedades da definição de espaço vetorial não se verifica. Como a adição definida é a usual, ela verifica as quatro propriedades da adição. Vamos testar as propriedades relativas à multiplicação. Em particular, vamos testar a propriedade (vi). Seja $u = (x, y) \in R^2$.

vi. $(\alpha + \beta)\vec{u} = (\alpha + \beta)(x, y) = ((\alpha + \beta)x, y) = (\alpha x + \beta x, y)$
$\alpha\vec{u} + \beta\vec{u} = \alpha(x, y) + \beta(x, y) = (\alpha x, y) + (\beta x, y) = (\alpha x + \beta x, 2y)$
Ou seja, $(\alpha + \beta)\vec{u} \neq \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$.

Como a propriedade (vi) de espaço vetorial não se verifica, concluímos que R^2 com as operações de soma e multiplicação por escalar acima definidas não é espaço vetorial.

A partir deste ponto, vamos convencionar que sempre que considerarmos os espaços vetoriais R^n, M(m, n) das matrizes m x n, e o dos polinômios P_n de grau $\leq$ n, estaremos sempre nos referindo às operações usuais de adição e multiplicação por escalar.

Propriedades dos espaços vetoriais

Da definição de espaço vetorial *V*, decorrem as seguintes propriedades:

1. O vetor nulo é único.
2. Para todo $\alpha \in$ R tem-se que $\alpha.0 = 0$ (onde 0 é o vetor nulo).
3. Para todo $\vec{u} \in V$ tem-se que $0.\vec{u} = 0$.
4. Para cada $\vec{u} \in V$, o vetor oposto $-\vec{u} \in V$ é único.
5. Para todo $\alpha \in$ R, $\vec{u} \in V$, se $\alpha\vec{u} = 0$ então $\alpha = 0$ ou $\vec{u} = 0$.
6. Se $\vec{u} + \vec{v} = \vec{w} + \vec{v}$ então $\vec{u} = \vec{w}$, para todo $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$.
7. Para todo $\vec{u} \in V$, tem-se $-(-\vec{u}) = \vec{u}$, ou seja, o oposto de $-\vec{u}$ é $\vec{u}$.
8. Para todo $\alpha \in$ R, $\vec{u} \in V$, tem-se $(-\alpha)\vec{u} = \alpha(-\vec{u}) = -(\alpha\vec{u})$.
9. Para todo $\alpha \in$ R, $\vec{u} \in V$, tem-se $(-\alpha)(-\vec{u}) = \alpha\vec{u}$.
10. Se $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in$ R, $\vec{u} \in V$ então $(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n)\vec{u}$
$= \alpha_1\vec{u} + \alpha_2\vec{u} + \dots + \alpha_n\vec{u}$.
11. Se $\alpha \in$ R, $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n \in V$ então $\alpha(\vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \dots + \vec{u}_n)\vec{u}$
$= \alpha\vec{u}_1 + \alpha\vec{u}_2 + \dots + \alpha\vec{u}_n$.

Todas as propriedades acima podem ser demonstradas formalmente utilizando a definição de espaço vetorial. Não faremos essas demonstrações aqui, pois entendemos que elas podem ser adiadas para um segundo curso de álgebra linear. Porém nada impede que o leitor mais interessado possa tentar demonstrá-las a titulo de exercícios, pois elas também não são tão difíceis.

Apenas como incentivo, vamos por exemplo demonstrar a propriedade 1, que afirma que "O vetor nulo é único". Para isso, suponha que 0 e 0′ sejam dois vetores nulos de um espaço vetorial *V*. Vamos então mostrar que 0 = 0′.

Aplicando a propriedade (iii) de espaço vetorial com 0′ no papel de *u*, temos 0′+0= 0′.

Aplicando novamente a propriedade (iii) de espaço vetorial, agora com 0 no papel de *u*, temos $0 + 0' = 0$.

Pela comutatividade da adição (propriedade (ii)), temos que $0 + 0' = 0' + 0$.

Portanto, $0 = 0 + 0' = 0' + 0 = 0'$, como queríamos demonstrar.

Exercícios

1. Nos itens a seguir apresenta-se um conjunto com as operações de adição e multiplicação por escalar nele definidas. Verificar quais deles são espaços vetoriais. Para aqueles que não são espaços vetoriais, citar as propriedades que não se verificam.

a) R^3 com as operações

- $(x, y, z) + (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z')$
- $k(x, y, z) = (0, 0, 0)$

b) $\{(x, 2x, 3x) : x \in R\}$ com as operações usuais de soma e multiplicação por escalar.

c) R^2 com as operações

- $(x, y) + (x', y') = (x, y)$
- $k(x, y) = (kx, ky)$

d) R^2 com as operações

- $(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$
- $k(x, y) = (k2x, k2y)$

e) R^2 com as operações

- $(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$
- $k(x, y) = (kx, 0)$

f) $\{ (x, y) \in R^2 : y = 5x \}$ com as operações usuais.

g) $A = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix} \in M(2,2) : a, b \in R \right\}$ com as operações usuais.

Subespaço vetorial

Seja V um espaço vetorial. Um subconjunto não vazio S de V é um ***subespaço vetorial*** de V se S é um espaço vetorial em relação à adição e multiplicação por escalar definidas em V.

Para mostrar que um subconjunto S é um subespaço vetorial de ***V***, deveríamos, a princípio, mostrar que S satisfaz as oito propriedades da definição de espaço vetorial. No entanto, como S é parte de ***V***, que já sabemos ser um espaço vetorial, não há necessidade de verificar todas elas. Por exemplo, a propriedade (ii) que diz que $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$, $\forall\ \vec{u}, \vec{v} \in \boldsymbol{V}$ é claramente válida para os elementos de S já que ela é válida para os elementos de ***V***. O teorema a seguir mostra que, na verdade, precisamos verificar apenas duas propriedades para concluir que S é um subespaço vetorial de ***V***.

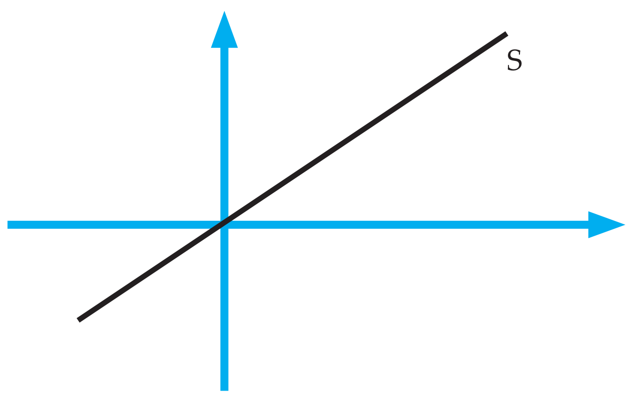
Teorema 1. Seja ***V*** um espaço vetorial e S um subconjunto não vazio de ***V***. Então S é um subespaço vetorial de ***V*** se as seguintes condições forem satisfeitas:

- Para quaisquer $\vec{u}, \vec{v} \in$ S, tem-se $\vec{u} + \vec{v} \in$ S.
- Para quaisquer $\alpha \in$ R, $\vec{u} \in$ S, tem-se $\alpha\vec{u} \in$ S.

Prova: As condições do teorema garantem que ao operarmos em S (soma e multiplicação por escalar), obteremos um vetor em S. As propriedades (i), (ii), (v), (vi), (vii) e (viii) de espaço vetorial são válidas para S, já que S é subconjunto de ***V***.

Para as propriedades (iii) e (iv), seja *u* um vetor qualquer de S. Pela segunda condição do teorema, $\alpha\vec{u} \in$ S para todo $\alpha \in$ R. Fazendo $\alpha = 0$, temos que $0\vec{u} \in$ S, ou seja, $0 \in$ S. Fazendo $\alpha = -1$, temos que $(-1)\vec{u} = -\vec{u} \in$ S. Isso mostra que as propriedades (iii) e (iv) também são válidas para S. Portanto, S é um espaço vetorial.

Exemplo 1. Considere ***V*** = R^2, e S $\subseteq$ ***V*** é uma reta passando pela origem. Então S é subespaço vetorial de ***V***.



Utilizando as propriedades sobre vetores, veja geometricamente a validade das condições do teorema 1. Observe que se a reta S não passar pela origem, ela não seria um subespaço vetorial de V, pois o vetor nulo 0 = (0, 0) não estaria em S. Observe ainda que o conjunto formado somente pela origem (0, 0) também é um espaço vetorial de R^2. Na verdade, os únicos subespaços vetoriais de R^2 são a origem, as retas que passam pela origem e o próprio R^2. Analogamente, os únicos subespaços vetoriais de R^3 são a origem, as retas que passam pela origem, os planos que passam pela origem e o próprio R^3.

Todo espaço vetorial admite pelo menos dois subespaços: o conjunto {0}, chamado de subespaço *nulo*, e o próprio espaço vetorial V. Esses dois são chamados de **subespaços *triviais*** de V. Os demais subespaços são chamados de **subespaços *próprios*** de V. Por exemplo, os subespaços triviais do R^3 são a origem {(0, 0, 0)} e o próprio R^3. Os subespaços próprios do R^3 são as retas que passam pela origem e os planos que passam pela origem.

Exemplo 2. Considere $V = R^5$, e $S = \{(0, x_2, x_3, x_4, x_5) : x_i \in R\}$, isto é, S é o conjunto dos vetores do R^5 que cuja primeira coordenada é nula. Vamos mostrar que S é subespaço vetorial do R^5. Para isso, vamos verificar as condições do teorema 1.

Sejam $x = (0, x_2, x_3, x_4, x_5)$ e $y = (0, y_2, y_3, y_4, y_5)$ elementos de S. Então

- $x + y = (0, x_2 + y_2, x_3 + y_3, x_4 + y_4, x_5 + y_5)$, que pertence a S, pois tem a primeira coordenada nula.
- $\alpha x = (0, \alpha x_2, \alpha x_3, \alpha x_4, \alpha x_5)$, que também pertence a S, pois tem a primeira coordenada nula.

Portanto, S é subespaço vetorial do R^5.

Exemplo 3. Seja V conjunto **M**(m, n) das matrizes m x n, e S o conjunto das matrizes triangulares superiores. Então S é um espaço vetorial de V, pois a soma de matrizes triangulares superiores ainda é uma matriz triangular superior, assim como o produto de uma matriz triangular superior por um escalar.

Vejamos agora alguns exemplos de conjuntos que não são subespaços vetoriais.

Exemplo 4. Seja $V = R^2$, e $S = \{(x, 4 - 2x) : x \in R\}$. Se tomarmos os vetores $\vec{u} = (1, 2)$ e $\vec{v} = (2, 0)$ de S, temos que $\vec{u} + \vec{v} = (3, 2) \notin S$. Pelo Teorema 1, concluímos que S não é espaço vetorial de V. Na verdade, S é uma reta que não passa pela origem.

Exemplo 5. Seja $V = R^2$ com as operações usuais de soma e multiplicação por escalar, e $S = \{(x, x^2) : x \in R\}$. Se escolhermos os vetores $\vec{u} = (1, 1)$ e $\vec{v} = (2, 4)$ de S, temos que $\vec{u} + \vec{v} = (3, 5) \notin S$. Pelo Teorema 1, concluímos que S não é espaço vetorial de V.

Vejamos mais um exemplo interessante de espaço vetorial.

Exemplo 6. Seja $V = R^3$, e $S = \{(x, y, z) \in R : ax + by + cz = 0\}$. Vamos mostrar que S é espaço vetorial de V. Sejam $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ elementos de S.

- $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1) \in S$ implica que $ax_1 + by_1 + cz_1 = 0$
- $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2) \in S$ implica que $ax_2 + by_2 + cz_2 = 0$

Somando estas igualdades resulta em $a(x_1 + x_2) + b(y_1 + y_2) + c(z_1 + z_2) = 0$. Esta expressão mostra que $\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \in S$, pois as suas coordenadas satisfazem a equação $ax + by + cz = 0$.

Por outro lado,
$\alpha = \alpha(x_1, y_1, z_1) = (\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1) \in S$, pois
$a(\alpha x_1) + b(\alpha y_1) + c(\alpha z_1) = \alpha\ (ax_1 + by_1 + cz_1) = \alpha.0 = 0$

O que mostra que as coordenadas de αu satisfazem a equação $ax + by + cz = 0$. Portanto, S é um subespaço vetorial de R^3. Esse subespaço representa um plano passando pela origem.

Exercícios

1. Nos itens abaixo são apresentados subconjuntos do R^2. Verificar quais deles são subespaços vetoriais do R^2 relativamente às operações de adição e multiplicação usuais.

a) $S = \{ (x, y) : y = -x \}$
b) $S = \{ (x, x^2) : x \in R \}$
c) $S = \{ (x, y) : x + 3y = 0 \}$
d) $S = \{ (y, y) : y \in R \}$
e) $S = \{ (x, y) : y = x + 1 \}$
f) $S = \{ (x, y) : x \geq 0 \}$

2. Nos itens abaixo são apresentados subconjuntos do R^3. Verificar quais deles são subespaços vetoriais do R^2 relativamente às operações de adição e multiplicação usuais.

a) S = { $(x, y, z) : x = 4y$ e $z = 0$ }
b) S = { $(x, y, z) : z = 2x - y$ }
c) S = { $(x, y, z) : x = z^2$ }
d) S = { $(x, y, z) : y = x + 2$ e $z = 0$ }
e) S = { $(x, x, x) : x \in R$ }
f) S = { $(x, x, 0) : x \in R$ }
g) S = { $(x, y, z) : xy = 0$ }
h) S = { $(x, y, z) : x = 0$ e $y = | z |$ }
i) S = { $(x, -3x, 4x) : x \in R$ }
j) S = { $(x, y, z) : x \geq 0$ }
k) S = { $(x, y, z) : x + y + z = 0$ }
l) S = { $(4t, 2t, -t) : t \in R$ }

3. Verificar se os subconjuntos abaixo são subespaços de M(2, 2):

a) $S = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : c = a + b \ \text{ e } \ d = 0 \right\}$

b) $S = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} : a, b, c \in R \right\}$

c) $S = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} : a, b, c \in R \right\}$

d) $S = \left\{ \begin{bmatrix} a & a+b \\ a-b & b \end{bmatrix} : a, b \in R \right\}$

e) $S = \left\{ \begin{bmatrix} a & 1 \\ a & b \end{bmatrix} : a, b \in R \right\}$

f) $S = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : ad - bc \neq 0 \right\}$ (conjunto das matrizes inversíveis)

4. Mostre que os seguintes subconjuntos são subespaços do R^4.

a) W = { $(x, y, z, t) \in R^4 : x + y = 0$ e $z - t = 0$ }
b) U = { $(x, y, z, t) \in R^4 : 2x + y - t = 0$ e $z = 0$ }

Combinação linear

Sejam *V* um espaço vetorial e $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ vetores de *V*. Um vetor $\in$ *V* é ***combinação linear*** dos vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ se existir escalares $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tais que

$\vec{v} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \dots + a_n\vec{v}_n$

Se $\vec{u}$ é combinação linear dos vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$, diz-se que $\vec{u}$ é gerado pelos vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$.

Observação: O vetor nulo é gerado por $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$, quaisquer que sejam estes vetores. Basta escolher $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$, e teremos $\vec{0} = \vec{0}\,\vec{v}_1 + \vec{0}\,\vec{v}_2 + \dots + \vec{0}\,\vec{v}_n$.

Sejam $\vec{a}$ e $\vec{b}$ vetores dados. E sejam $\overrightarrow{PA}$ e $\overrightarrow{PB}$ representantes de $\vec{a}$ e $\vec{b}$, respectivamente. **Podem ocorrer dois casos:**

Primeiro Caso - envolvendo dois vetores.

$\overrightarrow{PA}$ e $\overrightarrow{PB}$ estão situados sobre a mesma reta.

Se $\overrightarrow{PA}$ e $\overrightarrow{PB}$ estão sobre a mesma reta, então existe um número real x tal que $\vec{a} = x\vec{b}$ ou $\vec{b} = x\vec{a}$. Neste caso os vetores são linearmente dependentes ou colineares.

Se $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são LD e não simultaneamente nulos, então eles geram uma reta, isto é, todos os vetores da forma $x\vec{a} + y\vec{b}$ podem ser representados sobre uma mesma reta. Reciprocamente, se C é um ponto qualquer de r, então existem escalares x e y tais que $x\vec{a} + y\vec{b} = \overrightarrow{PC}$ (na realidade existe uma infinidade de escalares x e y tais que $x\vec{a} + y\vec{b} = \overrightarrow{PC}$)

Segundo Caso - envolvendo dois vetores

$\overrightarrow{PA}$ e $\overrightarrow{PB}$ não estão situados sobre a mesma reta.
$\overrightarrow{PA}$ e $\overrightarrow{PB}$ determinam um plano π. Neste caso $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são linearmente independentes.

Se $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são LI, então todos os vetores da forma $x\vec{a} + y\vec{b}$ podem ser representados sobre o mesmo plano π. Reciprocamente, se C é um ponto qualquer do plano π, então $x\vec{a} + y\vec{b} = \overrightarrow{PC}$. Assim:

Todo vetor $\vec{v}$ que possua representante no plano π pode ser escrito como uma combinação linear dos vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$; e que toda combinação linear dos vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ pode ser representada sobre o plano π. Por essa razão, se os vetores são LI, diremos que eles geram um plano.

Primeiro Caso - envolvendo 3 Vetores

Os vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ são LD, isto é:

Ou $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ possuem representantes numa mesma reta (os vetores são colineares).

Ou $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ possuem representantes em um mesmo plano (os vetores são coplanares).

Se $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ são vetores colineares, não todos nulos, então eles geram uma reta, isto é, todos os vetores da forma $x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$ possuem representantes numa mesma reta; reciprocamente, se r é uma reta sobre a qual existem representantes $\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{PB}$ e $\overrightarrow{PC}$ para os vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ respectivamente, e D é um ponto qualquer de r, então existe uma infinidade de escalares x, y e z tais que $\overrightarrow{PD} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$.

Se $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ são vetores coplanares, mas não colineares, então todos os vetores da forma $x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$ possuem representantes sobre um mesmo plano. Reciprocamente, se π é um plano que contém os representantes $\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{PB}$ e $\overrightarrow{PC}$ de $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ respectivamente, e D é um ponto qualquer de π , então existe uma infinidade de escalares x, y e z tais que $\overrightarrow{PD} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$.

Por essa razão:
3 vetores coplanares, mas não colineares, geram um plano.
3 vetores LD, não simultaneamente nulos, ou geram uma reta ou um plano.

Segundo Caso - envolvendo 3 vetores

Os vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ são LI ou não-coplanares (isto é, não possuem representantes num mesmo plano).

Se $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ são LI, então geram o espaço, isto é se é um vetor qualquer, então existe um (único) terno ordenado (x,y,z) de escalares tais que $\vec{v} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$.

Exemplo 1. No espaço vetorial R^2, o vetor (4, 9) é combinação linear dos vetores (2, 1) e (-1, 3), pois

$\vec{u} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2$
(4, 9) = 3 (2, 1) + 2 (-1, 3)

Exemplo 2. No espaço vetorial P_2 dos polinômios de grau ≤ 2, o polinômio $7x^2 + 11x - 26$ é combinação linear dos polinômios $5x^2 - 3x + 2$ e $-2x^2 + 5x - 8$, pois

$$7x^2 + 11x - 26 = 3\,(5x^2 - 3x + 2) + 4\,(-2x^2 + 5x - 8)$$

Exemplo 3. No espaço vetorial R^3, escrever o vetor $\vec{v} = (-4, -18, 7)$ como combinação linear dos vetores $\vec{v}_1 = (1, -3, 2)$ e $\vec{v}_2 = (2, 4, -1)$.

Solução: Queremos escrever $\vec{v} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2$, onde a_1 e a_2 são escalares a serem determinados. Então devemos ter:
$(-4, -18, 7) = a_1\,(1, -3, 2) + a_2\,(2, 4, -1)$

ou seja, $(-4, -18, 7) = (1a_1, -3a_1, 2a_1) + (2a_2, 4a_2, -1a_2) = (a_1 + 2a_2, -3a_1 + 4a_2, 2a_1 - a_2)$.

Pela condição de igualdade de vetores, resulta o sistema:

$$\begin{cases} a_1 + 2a_2 = -4 \\ -3a_1 + 4a_2 = -18 \\ 2a_1 - a_2 = 7 \end{cases}$$

cuja solução é: $a_1 = 2$ e $a_2 = -3$. Portanto, $\vec{v} = 2\vec{v}_1 - 3\vec{v}_2$.

Exemplo 4. No espaço vetorial R^3, mostrar que o vetor $\vec{v} = (4, 3, -6)$ não é combinação linear dos vetores $\vec{v}_1 = (1, -3, 2)$ e $\vec{v}_2 = (2, 4, -1)$.

Solução: Devemos mostrar que não existem escalares a_1 e a_2 tais que $\vec{v} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2$. Suponhamos que seja possível escrever $\vec{v} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2$. Procedendo de forma análoga ao exemplo anterior, temos:

$$(4, 3, -6) = a_1\,(1, -3, 2) + a_2\,(2, 4, -1)$$

o que resulta no sistema: $\begin{cases} a_1 + 2a_2 = 4 \\ -3a_1 + 4a_2 = 3 \\ 2a_1 - a_2 = -6 \end{cases}$

Este sistema, porém, não admite solução, pois o posto da matriz dos coeficientes é 2 e o da matriz ampliada é 3 (verifique isso!). Concluímos que v não é combinação linear dos vetores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$.

Exemplo 5. Determinar o valor de k para que o vetor $\vec{v} = (-1, k, -7)$

seja combinação linear dos vetores $\vec{v}_1 = (1, -3, 2)$ e $\vec{v}_2 = (2, 4, -1)$.

Solução: Devemos ter $\vec{v} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2$, ou seja,

$(-1, k, -7) = a_1\,(1, -3, 2) + a_2\,(2, 4, -1)$

resultando no sistema: $\begin{cases} a_1 + 2a_2 = -1 \\ -3a_1 + 4a_2 = k \\ 2a_1 - a_2 = -7 \end{cases}$

Devemos agora calcular um valor para k para que este sistema seja compatível. Procedendo de forma análoga ao exemplo 3, chegamos a $k = 13$. (Para este valor de k, a solução do sistema é $a_1 = -3$ e $a_2 = 1$.)

Exemplo 6. Mostrar que o vetor $\vec{v} = (3, 4)$ pode ser escrito de infinitas maneiras como combinação linear dos vetores $\vec{v}_1 = (1, 0)$, $\vec{v}_2 = (0, 1)$ e $\vec{v}_3 = (2, -1)$.

Solução: Queremos escrever $(3, 4) = a\,(1, 0) + b\,(0, 1) + c\,(2, -1)$, donde resulta o sistema $\begin{cases} a + 2c = 3 \\ b - c = 4 \end{cases}$.

Podemos reescrever este sistema na forma $\begin{cases} a = 3 - 2c \\ b = 4 + c \end{cases}$.

Portanto, para cada valor de c obtemos um valor para a e outro para b que determina uma maneira de escrever $\vec{v}$ como combinação linear dos vetores $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ e $\vec{v}_3$. Como podemos atribuir infinitos valores para c, temos infinitas formas de escrever v como combinação linear dos vetores $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ e $\vec{v}_3$.

Exercícios

1. Considere os vetores $\vec{u} = (2, -3, 2)$ e $\vec{v} = (-1, 2, 4)$ de R^3.

a) Escrever o vetor $\vec{w} = (7, -11, 2)$ como combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$.
b) Para qual valor de k o vetor $(-8, 14, k)$ é combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$?

2. Considere os vetores $p_1 = t^2 - 2t + 1$, $p_2 = t + 2$ e $p_3 = 2t^2 - t$ no espaço $P_2 = \{at^2 + bt + c : a, b, c \in R$.

a) Escrever o vetor $p = 5t^2 - 5t + 7$ como combinação linear de p_1, p_2 e p_3.
b) Escrever o vetor $p = 5t^2 - 5t + 7$ como combinação linear de p_1 e p_2.
c) É possível escrever p_1 como combinação linear de p_2 e p_3?

3. No espaço vetorial M(2, 2), escrever o vetor $\begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ como combinação linear dos vetores

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \ \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

4. Escrever o vetor $0 \in R^2$ como combinação linear dos vetores $\vec{v}_1 = (1, 3)$ e $\vec{v}_2 = (2, 6)$.

5. Expressar cada um dos vetores $\vec{u} = (-8, 4, 1)$, $\vec{v} = (0, 2, 3)$ e $\vec{w} = (0, 0, 0)$ como combinação linear dos vetores $\vec{v}_1 = (-1, 2, 1)$, $\vec{v}_2 = (1, 0, 2)$ e $\vec{v}_3 = (-2, -1, 0)$.

6. Expressar o vetor $\vec{u} = (-1, 4, -4, 6)$ como combinação linear dos vetores $\vec{v}_1 = (3, -3, 1, 0)$, $\vec{v}_2 = (0, 1, -1, 2)$ e $\vec{v}_3 = (1, -1, 0, 0)$.

7. Seja $S = \{ (x, y, z, t) \in R^4 : x + 2y - z = 0 \}$ um subespaço do R^4. Pergunta-se:
a) $(-1, 2, 3, 0) \in S$?
b) $(3, 1, 4, 0) \in S$?
c) $(-1, 1, 1, 1) \in S$?

8. Seja $S = \left\{ \begin{bmatrix} a-b & 2a \\ a+b & -b \end{bmatrix} : a, b \in R \right\}$ um subespaço de M(2, 2). Pergunta-se:

a) $\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \in S$?

b) Qual o valor de k para que o vetor $\begin{bmatrix} -4 & k \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ pertença a S?

Subespaços gerados

Seja V um espaço vetorial, e $A = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ um conjunto não vazio de vetores de V. Seja S o conjunto de todos os vetores de V que são combinações lineares de vetores em A. Então S é um subespaço vetorial de V.

De fato, se $\vec{u} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \ldots + a_n\vec{v}_n$ e $\vec{v} = b_1\vec{v}_1 + b_2\vec{v}_2 + \ldots + b_n\vec{v}_n$ são dois vetores quaisquer de S, então:

· $\vec{u} + \vec{v} = (a_1 + b_1)\vec{v}_1 + (a_2 + b_2)\vec{v}_2 + \ldots + (a_n + b_n)\vec{v}_n$ pertence a S, e
· $\alpha\vec{u} = (\alpha a_1)\vec{v}_1 + (\alpha a_2)\vec{v}_2 + \ldots + (\alpha a_n)\vec{v}_n$ também pertence a S.

Como $\vec{u} + \vec{v}$ e $\alpha\vec{u}$ pertencem a S, concluímos que S é subespaço vetorial de ***V***, que recebe o nome de subespaço *gerado* pelos vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ ou pelo conjunto A, e é denotado por $S = [\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n]$ ou S = [A]. Os vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ são chamados **de *geradores* do subespaço** S, enquanto A é o ***conjunto gerador*** de S.

Exemplo 1. Os vetores $\vec{i} = (1, 0)$ e $\vec{j} = (0, 1)$ geram o espaço vetorial R^2, pois qualquer vetor $(x, y) \in R^2$ é combinação linear de $\vec{i}$ e $\vec{j}$.

$$(x, y) = x\,(1, 0) + y\,(0, 1) = x\vec{i} + y\vec{j}$$

Portanto, $[\vec{i}, \vec{j}] = R^2$.
De forma análoga, os vetores $\vec{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1, 0)$ e $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$ geram o espaço vetorial R^3.

Exemplo 2. Os vetores $\vec{i} = (1, 0, 0)$ e $\vec{j} = (0, 1, 0)$ do R^3 geram o subespaço vetorial $S = \{(x, y, 0) \in R^3 : x, y \in R\}$ pois qualquer vetor $(x, y, 0) \in R^3$ é combinação linear de $\vec{i}$ e $\vec{j}$.

$$(x, y, 0) = x\,(1, 0, 0) + y\,(0, 1, 0) = x\vec{i} + y\vec{j}$$

Portanto, $[\vec{i}, \vec{j}] = S$. O subespaço S corresponde geometricamente ao plano xy.

Antes de continuarmos com mais exemplos, é importante atentarmos para o seguinte fato:

Teorema 1. Dados os vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ de um espaço vetorial ***V*** e um vetor $\vec{w} \in V$ que é combinação linear de $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ $(\vec{w} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \ldots + a_n\vec{v}_n)$, então

$$[\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n, \vec{w}] = [\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n]$$

ou seja, o espaço gerado pelos vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n, \vec{w}$ é o mesmo espaço gerado pelos vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$.

Prova: Para provar este fato, observe inicialmente que se $\vec{v} \in [\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n]$ então claramente $\vec{v} \in [\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n, \vec{w}]$. Reciprocamente, suponha que $\vec{v} \in [\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n, \vec{w}]$. Então existem escalares b_1, b_2,

… , b_n, b tais que

$\vec{v} = b_1\vec{v}_1 + b_2\vec{v}_2 + \ldots + b_n\vec{v}_n + b\vec{w}$

mas lembre-se de que $\vec{w}w = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \ldots + a_n\vec{v}_n$. Logo,

$\vec{v} = b_1\vec{v}_1 + b_2\vec{v}_2 + \ldots + b_n\vec{v}_n + b\,(a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \ldots + a_n\vec{v}_n)$

ou
$\vec{v} = (b_1 + a_1b)\vec{v}_1 + (b_2 + a_2b)\vec{v}_2 + \ldots + (b_n + a_nb)\vec{v}_n$

e, portanto, é combinação linear de $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, … , $\vec{v}_n$, ou seja,
$\vec{v} \in [\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots , \vec{v}_n,]$.

Assim, se S é um subespaço gerado por um conjunto A e acrescentarmos vetores de S a esse conjunto A, os novos conjunto continuarão gerando o mesmo subespaço S. Isto significa que um determinado subespaço S pode ser gerado por uma infinidade de vetores, porém existe um número mínimo de vetores para gerá-lo.

Exemplo 4. Determinar o subespaço do R^3 gerado pelo vetor
$\vec{v} = (1, 2, 3)$.

Solução: O subespaço do R^3 gerado pelo vetor $\vec{v} = (1, 2, 3)$ é o conjunto de todos os vetores do R^3 que são combinações lineares de $\vec{v}$, ou seja, todos os vetores (x, y, z) que podem ser escritos na forma

$(x, y, z) = t\,(1, 2, 3) = (0, 0, 0) + t\,(1, 2, 3)$, onde $t \in R$.

Esta é exatamente a equação paramétrica da reta que passa pela origem (0, 0, 0) e tem a direção do vetor (1, 2, 3). Portanto, o subespaço gerado pelo vetor é a reta que passa pela origem e tem a direção do vetor $\vec{v}$.

Exemplo 5. Determinar o subespaço do R^3 gerado pelo conjunto A $= \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$, onde $\vec{v}_1 = (1, -2, -1)$ e $\vec{v}_2 = (2, 1, 1)$.

Solução: O subespaço do R^3 gerado pelos vetores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ é o conjunto de todos os vetores do R^3 que são combinações lineares de $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, ou seja, todos os vetores (x, y, z) que podem ser escritos na forma

$(x, y, z) = h\,(1, -2, -1) + t\,(2, 1, 1) = (0, 0, 0) + h\,(1, -2, -1) + t\,(2, 1, 1)$, onde $h, t \in R$.

Esta é exatamente a equação paramétrica do plano que passa pela origem (0, 0, 0) e tem $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ como vetores diretores. Portanto, o subespaço gerado pelos vetores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ é o plano quepassa pela origem e tem $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ como vetores diretores.

Exemplo 6. Mostre que o conjunto A = {(3, 1), (5, 2)} gera o R^2.

Solução: Vamos mostrar que todo vetor $(x, y) \in R^2$ é combinação linear dos vetores de A, isto é, que sempre existem escalares a_1 e a_2 tais que

$(x, y) = a_1 (3, 1) + a_2 (5, 2)$

Desta equação resulta o sistema $\begin{cases} 3a_1 + 5a_2 = x \\ a_1 + 2a_2 = y \end{cases}$, que resolvido em termos de x e y, fornece: $a_1 = 2x - 5y$ e $a_2 = 3y - x$. Logo, para todo vetor $(x, y) \in R^2$, temos:

$(x, y) = (2x - 5y)(3, 1) + (3y - x)(5, 2)$

e portanto, $[A] = R^2$.

Exercícios

1. Determinar os subespaços do R^3 gerados pelos seguintes conjuntos:
a) A = { (2, -1, 3) }
b) A = { (-1, 3, 2), (2, -2, 1) }
c) A = { (1, 0, 1), (0, 1, 1), (-1, 1, 0) }
d) A = { (-1, 1, 0), (0, 1, -2), (-2, 3, 1) }
e) A = { (1, 2, -1), (-1, 1, 0), (-3, 0, 1), (-2, -1, 1) }
f) A = { (1, 2, -1), (-1, 1, 0), (0, 0, 2), (-2, 1, 0) }

2. Seja $A = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$, onde $\vec{v}_1 = (-1, 3, -1)$ e $\vec{v}_2 = (1, -2, 4)$. Determinar:
a) O subespaço gerado por A.
b) O valor de k para que o vetor $(5, k, 11) \in [A]$.

3. Qual o valor de k para que o vetor $(3, -1, k) \in [\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3]$, onde $\vec{v}_1 = (1, 1, 1)$, $\vec{v}_2 = (1, 2, 0)$, e $\vec{v}_3 = (1, 3, -1)$?

4. Mostre que os vetores $\vec{v}_1 = (2, 1)$ e $\vec{v}_2 = (1, 1)$ geram o R^2.

5. Mostre que os vetores $\vec{v}_1 = (1, 1, 1)$, $\vec{v}_2 = (0, 1, 1)$ e $\vec{v}_3 = (0, 0, 1)$ geram o R^3.

6. Mostre que os polinômios $1-t^3$, $(1-t)^2$, $1-t$ e 1 geram o espaço P_3 dos polinômios de grau ≤ 3.

Dependência e independência linear

Em álgebra linear, é fundamental sabermos se um vetor é combinação linear de outros, pois isto será útil para obter conjuntos geradores com o menor número possível de vetores. Para entendermos melhor o conceito de combinação linear, precisamos ter a noção de dependência e independência linear.

Seja V um espaço vetorial, e $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ vetores de V. Dizemos que o conjunto $A = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ é ***linearmente independente*** (LI), ou que os vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ são LI, se nenhum destes vetores é combinação linear dos outros vetores de A. No caso em que algum vetor $_i$ é combinação linear dos outros vetores de A, dizemos que o conjunto A é ***linearmente dependente*** (LD).

Exemplo 1. Os vetores (2, -1, 3), (-1, 0, -2) e (2, -3, 1) formam um conjunto linearmente dependente, pois

$(2, -3, 1) = 3\,(2, -1, 3) + 4\,(-1, 0, -2)$

Exemplo 2. Os vetores $\vec{v}_1 = (1, -2, 3)$ e $\vec{v}_2 = (2, -4, 6)$ são LD, pois $\vec{v}_1 = 1/2\,\vec{v}_2$. Observe que para o caso particular de dois vetores temos que "dois vetores são LD se, e somente se, um deles é múltiplo escalar do outro.

Exemplo 3. Os vetores $\vec{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1, 0)$ e $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$ são LI. Observe que $\vec{e}_1$ não é combinação linear de $\vec{e}_2$ e $\vec{e}_3$, pois como a primeira componente de $\vec{e}_2$ e $\vec{e}_3$ é 0, qualquer combinação linear destes dois vetores também terá a primeira componente igual a 0, mas a primeira componente de $\vec{e}_1$ é 1. Similar argumento mostra que nem $\vec{e}_2$ nem $\vec{e}_3$ é combinação linear dos outros dois vetores. Portanto, $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ e $\vec{e}_3$ são LI.

Exemplo 4. De forma análoga, os vetores $\vec{v}_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)$, $\vec{v}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, ... , $\vec{v}_n = (0, 0, 0, \dots, 0)$ são LI no espaço R^n.

Exemplo 5. Os vetores $\vec{v}_1 = (2, 2, 3, 4)$, $\vec{v}_2 = (0, 5, -3, 1)$ e $\vec{v}_3 = (0, 0, 4, -2)$ são LD ou LI?

Antes de resolver este exemplo, observamos que para verificar se um dado conjunto A é LI ou LD, devemos, a principio, verificar se cada um dos vetores de A é combinação linear dos outros. Mas isto é uma tarefa árdua, principalmente se o conjunto A possuir muitos vetores. O teorema a seguir fornece uma forma mais direta para resolver este problema.

Teorema 1. Um conjunto $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ é LI se, e somente se, a equação

$$a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \ldots + a_n\vec{v}_n = 0$$

implica que $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$. (Em outras palavras, a equação acima possui uma única solução que é $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$)

Observação: Note que o "0" na equação acima representa o vetor nulo e não o escalar 0. Esta observação ficará mais clara nos exemplos após a prova do teorema.

Prova: Assuma que $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ é LI e vamos mostrar que a equação

$$a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \ldots + a_n\vec{v}_n = 0$$

implica que $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$. Suponha, por contradição, que a equação acima se verifica para algum $a_i \neq 0$. Vamos supor, por exemplo, que $a_1 \neq 0$ (o raciocínio é análogo para qualquer outro $a_i \neq 0$). Podemos então escrever a equação acima na forma

$$a_1\vec{v}_1 = -a_2\vec{v}_2 - \ldots - a_n\vec{v}_n$$

ou ainda

$$\vec{v}_1 = -\frac{a_2}{a_1}\vec{v}_2 - L - \frac{a_n}{a_1}\vec{v}_n$$

e, portanto, $_1$ é combinação linear dos outros vetores, o que contradiz a nossa suposição de que $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ é LI. Logo, a equação $a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \ldots + a_n\vec{v}_n = 0$ possui uma única solução que é $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$.

Reciprocamente, assuma que a equação

(*) $\quad a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \ldots + a_n\vec{v}_n = 0$

implica que $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$, e vamos mostrar que $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ é LI. Suponha, por contradição, que o conjunto $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ é LD. Então um dos vetores $\vec{v}_i$ é combinação linear dos outros vetores em $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$. Apenas para simplificar a notação, vamos supor, por exemplo, que $\vec{v}_1$ é combinação linear dos outros vetores (o raciocínio é análogo caso algum outro vetor $\vec{v}_i$ seja combinação linear dos outros vetores em $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$).

Então, existem escalares $b_2, \ldots, b_n$ tais que $\vec{v}_1 = b_2\vec{v}_2 + \ldots + b_n\vec{v}_n$. Esta equação pode ser escrita na forma

$(-1)\,\vec{v}_1 + b_2\vec{v}_2 + \ldots + b_n\vec{v}_n = 0$

mas isto contradiz o fato de que a equação (*) apenas se verifica se todos os coeficientes dos $\vec{v}_i$ forem nulos. Esta contradição veio do fato de supormos que o conjunto $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ é LD. Portanto, $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ é LI. Isto prova o teorema.

Solução do exemplo 5. Aplicando o teorema acima, consideremos a equação:

$a\,(2, 2, 3, 4) + b\,(0, 5, -3, 1) + c\,(0, 0, 4, -2) = (0, 0, 0, 0)$

que resulta no sistema

$$\begin{cases} 2a = 0 \\ 2a + 5b = 0 \\ 3a - 3b + 4c = 0 \\ 4a + b - 2c = 0 \end{cases}$$

Este sistema admite uma única solução: $a = 0$, $b = 0$ e $c = 0$. Portanto, os vetores $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ e $\vec{v}_3$ são LI.

Exemplo 7. No espaço vetorial M(2, 2) das matrizes 2 x 2, o conjunto

$$A = \left\{ \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

é LD ou LI?

Solução: Examinemos a equação

$$(*)\quad a\begin{bmatrix}-1 & 2\\ -3 & 1\end{bmatrix} + b\begin{bmatrix}2 & -3\\ 3 & 0\end{bmatrix} + c\begin{bmatrix}3 & -4\\ 3 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

que pode ser reescrita como

$$\begin{bmatrix}-a+2b+3c & 2a-3b-4c\\ -3a+3b+3c & a+c\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

que resulta no sistema

$$\begin{cases}-a+2b+3c=0\\ 2a-3b-4c=0\\ -3a+3b+3c=0\\ a+c=0\end{cases}$$

cuja solução é $a = -c$ e $b = -2c$. Como existem valores não nulos de a, b ou c que satisfazem a equação (*), o conjunto é LD.

Para determinar mais concretamente um vetor do conjunto A como combinação linear dos outros, vamos inicialmente denotar os vetores de A por $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ e $\vec{v}_3$, respectivamente. Agora, atribuindo um valor não nulo para c, por exemplo, $c = 1$, obtemos $a = -1$ e $b = -2$. Logo, a equação (*) fica

$$-\vec{v}_1 - 2\vec{v}_2 + \vec{v}_3 = 0,\ \text{ ou seja, }\ \vec{v}_3 = \vec{v}_1 + 2\vec{v}_2.$$

Exemplo 8. O conjunto $\{1 + 2x - x^2,\ 2 - x + 3x^2,\ 3 - 4x + 7x^2\}$ é LD ou LI?

Solução: Examinemos a equação:

$$a(1 + 2x - x^2) + b(2 - x + 3x^2) + c(3 - 4x + 7x^2) = 0 + 0x + 0x^2$$

Pelo princípio da identidade de polinômios, temos o sistema:

$$\begin{cases}a+2b+3c=0\\ 2a-b-4c=0\\ -a+3b+7c=0\end{cases}$$

Como este sistema admite solução não nula (verifique!), o conjunto é LD.

Exemplo 9. Mostre que se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são vetores LI então $\vec{u} + \vec{v}$ e $\vec{u} - \vec{v}$ também são.

Solução: Examinemos a equação:

$a(\vec{u}+\vec{v}) + b(\vec{u}-\vec{v}) = 0$

da qual resulta
$(a+b)\vec{u} + (a-b)\vec{v} = 0$

Como $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são LI, devemos ter

$$\begin{cases} a+b=0 \\ a-b=0 \end{cases}$$

Este sistema admite somente a solução $a = b = 0$. Logo $\vec{u} + \vec{v}$ e $\vec{u} - \vec{v}$ são LI.

Exemplo 10. Determinar o valor de k para que o conjunto $A = \{(1, 0, -1), (1, 1, 0), (k, 1, -1)\}$ seja LI.

Solução: O conjunto A será LI se, e somente se, a equação

$a\,(1, 0, -1) + b\,(1, 1, 0) + c\,(k, 1, -1) = (0, 0, 0)$

admitir apenas a solução $a = b = c = 0$. Dessa equação, resulta o sistema:

$$\begin{cases} a+b+kc=0 \\ \qquad b+c=0 \\ \quad -a-c=0 \end{cases}$$

aplicando o método de Gauss-Jordan, obtemos o seguinte sistema equivalente.

$$\begin{cases} \begin{array}{lllll} a & & & = & 0 \\ & b & & & 0 \\ & & (k-2)c & = & 0 \end{array} \end{cases}$$

Para que esse sistema admita apenas a solução trivial, deve-se ter $k \neq 2$. Logo, o conjunto A será LI se $k \neq 2$.

Propriedades da dependência linear

Seja V um espaço vetorial. Então as seguintes propriedades se verificam:

(I) Se $A = \{v\} \subseteq V$ e $v \neq 0$ então A é LI.
De fato: Como $\vec{v} \neq 0$, a igualdade $a\vec{v} = 0$ só se verifica se $a = 0$.

(II) Se um conjunto $A = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\} \subseteq V$ contém o vetor nulo, então A é LD. De fato: A equação $0\vec{v}_1 + 0\vec{v}_2 + \dots + a0 + \dots + 0\vec{v}_n = 0$ se verifica para todo $a \neq 0$.
Portanto, A é LD.

(III) Se A é um conjunto LD então qualquer conjunto que contém A também é LD.

(IV) Se A é um conjunto LI então qualquer subconjunto de A também é LI.

(V) Se $A = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\} \subseteq V$ é LI e $B = A \cup \{\vec{w}\} \subseteq V$ é LD então é combinação linear de $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$.

Exercícios

1. Verificar se os seguintes subconjuntos do R^2 são LI ou LD:
a) { (1, 3) }
b) { (1, 3), (2, 6) }
c) { (2, -1), (3, 5) }
d) { (1, 0), (-1, 1), (3, 5) }

2. Verificar se os seguintes subconjuntos do R^3 são LI ou LD:
a){ (2, -1, 3) }
b){ (1, -1, 1), (-1, 1, 1) }
c) { (2, -1, 0), (-1, 3, 0), (3, 5, 0) }
d) { (2, 1, 3), (0, 0, 0), (1, 5, 2) }
e) { (1, 2, -1), (2, 4, -2), (1, 3, 0) }
f) { (1, -1, -2), (2, 1, 1), (-1, 0, 3) }
g) { (1, 2, -1), (1, 0, 0), (0, 1, 2), (3, -1, 2) }

3. Quais dos seguintes conjuntos de vetores do P_2 são LD?
a) $2 + x - x^2$, $-4 - x + 4x^2$, $x + 2x^2$
b) $1 - x + 2x^2$, $x - x^2$, x^2
c) $1 + 3x + x^2$, $2 - x - x^2$, $1 + 2x - 3x^2$, $-2 + x + 3x^2$
d) $x^2 - x + 1$, $x^2 + 2x$

Base de um espaço vetorial

Agora, estamos interessados em encontrar, dentro de um espaço vetorial V, um conjunto finito de vetores de cardinalidade mínima tal que qualquer outro vetor de V seja combinação linear deles. Ou seja, queremos determinar um conjunto gerador de V de cardinalidade mínima. Estes vetores certamente são LI, e serão o alicerce de V. Um conjunto de vetores desse tipo é chamado de **base** de V.

Um conjunto $A = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\} \subseteq V$ é uma ***base* do espaço vetorial** V se:

- A é LI
- A gera V

Exemplo 1. O conjunto $A = \{(1, 0), (0, 1)\}$ é base do R^2, denominada ***base canônica***.

De fato:

- A é LI, pois $a(1, 0) + b(0, 1) = (0, 0)$ implica $a = b = 0$;
- A gera R^2, pois todo vetor $(x, y) \in R^2$, temos
$(x, y) = x(1, 0) + y(0, 1)$.

Exemplo 2. Consideremos os vetores $\vec{e}_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, ... , $\vec{e}_n = (0, 0, 0, \dots, 0)$. Vimos no exemplo 2 - dependência e independência linear - que o conjunto $A = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ é LI no espaço R^n.
Além disso, A gera R^n, pois todo vetor $= (x_1, x_2, \dots, x_n)$ pode ser escrito como combinação linear dos vetores de A, isto é:

$$\vec{v} = \vec{e}_1 x_1 + \vec{e}_2 x_2 + \dots + \vec{e}_n x_n$$

Portanto, A é uma base do R^n, conhecida como *base canônica* do R^n.

Exemplo 3. O conjunto $A = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ é base do $M(2, 2)$.

De fato:

- A é LI, pois $a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ equivale a

$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, o que implica que $a = b = c = d = 0$.

• A gera o espaço M(2, 2), pois qualquer vetor $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in$ M(2, 2) pode ser escrito como,

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ou seja, como combinação linear dos vetores de A.

Exemplo 4. O conjunto A = $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ é base do espaço vetorial P_n.

De fato:

• A é LI, pois $a_0 1 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n = 0$ implica $a_0 = a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$.

• A gera P_n, pois qualquer polinômio $p \in P_n$ pode ser escrito como $p = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$. Logo, A é base de P_n, conhecida como *base canônica* de P_n.

Exemplo 5. A = {(1, 2), (2, 4)} não é base de R^2, pois (2, 4) = 2(1, 2), ou seja, A não é LI.

Exemplo 6. A = {(1, 0), (0, 1), (3, 4)} não é base de R^2, pois A também não é LI.

Exemplo 7. A = {(1, 0, 0), (0, 1, 0)} não é base de R^3, pois A não gera R^3. Por exemplo, o elemento (0, 0, 1) não pode ser gerado pelos elementos de A.

Vamos agora estudar algumas propriedades dos espaços vetoriais:

Teorema 1. Se A = $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ é um conjunto de vetores que gera um espaço vetorial V então A contém uma base de V.

Prova: Se A é LI então A é uma base de V. Suponha então que A é LD. Logo, existe um elemento de A, digamos $\vec{v}_n$, que é combinação linear dos outros. Então, Pelo Teorema 1 - em subespaços gerados -, temos que

$$[\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n] = [\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_{n-1}] = V$$

ou seja, o espaço vetorial V gerado pelos vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ é também gerado pelos vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_{n-1}$. Logo, aplicando o

Teorema 1 - em subespaços gerados - uma quantidade finita de vezes, encontraremos um subconjunto de A que gera ***V*** e que é LI, isto é, uma base de ***V***.

Teorema 2. Se A = $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ é um conjunto de vetores que gera um espaço vetorial ***V*** então qualquer conjunto com mais de n vetores de ***V*** é LD. (e, portanto, qualquer conjunto LI tem no máximo n vetores.)

Prova: Por hipótese, A gera ***V***. Pelo Teorema anterior, A contém uma base de ***V***. Para simplificar a notação, vamos supor que B = $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_r\} \subseteq$ A é uma base de ***V***.

Consideremos agora um conjunto $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \ldots, \vec{w}_m$ de m vetores de ***V***, com $m > r$, e vamos mostrar que estes vetores são LD. Como B é base de ***V***, cada vetor $_i$ pode ser escrito como combinação linear dos elementos de B, ou seja, existem constantes a_{ij} tais que

$$\begin{aligned} w_1 &= a_{11}v_1 + a_{12}v_2 + \cdots + a_{1r}v_r \\ w_2 &= a_{21}v_1 + a_{22}v_2 + \cdots + a_{2r}v_r \\ &\vdots \\ w_m &= a_{m1}v_1 + a_{m2}v_2 + \cdots + a_{mr}v_r \end{aligned}$$

Para mostrar que os vetores $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \ldots, \vec{w}_m$ são LD, vamos usar o Teorema 2 - dependência e independência linear. Consideremos então uma combinação linear de $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \ldots, \vec{w}_m$ dando zero.

$$x_1\vec{w}_1 + x_2\vec{w}_2 + \ldots + x_m\vec{w}_m = 0$$

Substituindo cada $\vec{w}_i$ pelo seu valor acima, temos:

$$x_1(a_{11}\vec{v}_1 + a_{12}\vec{v}_2 + \ldots + a_{mr}\vec{v}_r) + x_2(a_{21}\vec{v}_1 + a_{22}\vec{v}_2 + \ldots + a_{2r}\vec{v}_r) + \ldots +$$
$$+ x_m(a_{m1}\vec{v}_1 + a_{m2}\vec{v}_2 + \ldots + a_{mr}\vec{v}_r) = 0$$

Esta equação pode ser reescrita como:

$$(a_{11}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{m1}x_m)\vec{v}_1 + (a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{m2}x_m)\vec{v}_2 + \ldots +$$
$$+ (a_{1r}x_1 + a_{2r}x_2 + \ldots + a_{mr}x_m)\vec{v}_r = 0$$

Como $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_r$ são LI, segue que:

$$
\begin{array}{c}
a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \cdots + a_{m1}x_m = 0 \\
a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{m2}x_m = 0 \\
\vdots \\
a_{1r}x_1 + a_{2r}x_2 + \cdots + a_{mr}x_m = 0
\end{array}
$$

Temos então um sistema de equações lineares homogêneo com r equações e m incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Um sistema linear homogêneo sempre admite solução, e como $r \leq n < m$, este sistema admite, na verdade, infinitas soluções. Portanto, ele admite uma solução não nula, ou seja, existe uma solução com algum x_i não nulo. Portanto, $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \ldots, \vec{w}_m$ são LD, como queríamos demonstrar.

O Teorema 2 tem como conseqüência o resultado a seguir, que é um dos mais importantes no estudo de espaços vetoriais.

Corolário 1. Qualquer base de um espaço vetorial possui o mesmo número de elementos. Este número é chamado de ***dimensão* do espaço** vetorial V, e denotado por *dim* V.

Prova: Sejam $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ e $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \ldots, \vec{w}_m\}$ duas bases de V. Como $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ geram V e $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \ldots, \vec{w}_m$ são LI, temos pelo Teorema anterior que $m \leq n$. Analogamente, $n \leq m$. Logo, $n = m$.

Exemplo 8. A base canônica do R^3 tem três vetores. Logo, qualquer base do R^3 terá também três vetores. Similarmente, qualquer base do R^n terá n vetores. Logo, *dim* $R^3 = 3$.

Exemplo 9. A base canônica do M(2, 2) tem quatro vetores. Logo, qualquer base do M(2, 2) terá também quatro vetores. Similarmente, qualquer base do $M(m, n)$ terá $m.n$ vetores. Logo, *dim* $M(m, n) = m.n$.

Exemplo 10. $A = \{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ é base do espaço vetorial P_n. Logo, *dim* $P_n = n + 1$.

Vamos continuar estudando mais algumas propriedades de espaços vetoriais, o que nos permitirá um melhor entendimento deste que é o mais importante tema no estudo da álgebra linear. O próximo resultado será utilizado para mostrar que podemos construir uma base para um espaço vetorial de forma iterativa acrescentando um vetor a cada passo.

Lema 1. Se $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_r$ são vetores LI de um espaço vetorial V e $\vec{w}$

$\vec{w} \in V$ não é combinação linear de $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_r$ então os vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_r,$ também são LI.

Prova: Suponha, por contradição, que $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_r, \vec{w}$ são LD. Então um deles é combinação linear dos demais. Por hipótese, $\vec{w}$ não é combinação linear de $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_r$. Logo, algum $\vec{v}_i$, digamos $\vec{v}_1$, é combinação linear de $\vec{v}_2, \dots, \vec{v}_r, \vec{w}$, ou seja, existem constantes $a_2, \dots, a_r, a$ tais que:

$$\vec{v}_1 = a_2\vec{v}_2 + \dots + a_r\vec{v}_r + a\vec{w}$$

Observe que $a \neq 0$, pois caso contrário, $\vec{v}_1$ seria combinação linear de $\vec{v}_2, \dots, \vec{v}_r$, o que não pode acontecer já que $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_r$ são LI por hipótese. Portanto, isolando $\vec{w}$ na igualdade acima, podemos reescrevê-la da seguinte forma:

$$\vec{w} = \frac{1}{a}\vec{v}_1 - \frac{a_2}{a}\vec{v}_2 + \dots + \frac{a_r}{a}\vec{v}_r$$

Conseguimos então escrever $\vec{w}$ como combinação linear de $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_r$. Mas isto é uma contradição, pois por hipótese, $\vec{w}$ não é combinação linear de $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_r$. Portanto, os vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_r,$ também são LI, como queríamos demonstrar.

Uma conseqüência imediata deste resultado é a seguinte:

Teorema 3. Qualquer conjunto de vetores LI de um espaço vetorial V de dimensão finita pode ser completado de modo a formar uma base de V.

Prova: Vamos supor que $\dim V = n$, e que $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_r$ são vetores LI. Se $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_r\}$ gera V então $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_r\}$ é uma base de V e o teorema está provado.

Vamos supor então que $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_r\}$ não gera V. Logo, existe $\vec{w} \in V$ que não é combinação linear de $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_r$. Pelo Lema 1, $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_r, \vec{w}$ é LI. Se $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_r, \vec{w}\}$ gera V então $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_r, \vec{w}\}$ é uma base de V, caso contrario, prosseguimos aplicando o Lema 1 para obtermos um conjunto de vetores LI maior do que o atual. Como não podemos ter mais do que n vetores LI em V, após um número finito de passos obteremos uma base para V contendo $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_r,$ como queríamos demonstrar.

Teorema 4. Se $\dim V = n$ então qualquer conjunto de n vetores LI forma uma base de V.

Prova: Se não formasse uma base, poderíamos completar o conjunto até formá-la e, assim, teríamos uma base de *V* com mais do que *n* vetores, o que é um absurdo.

Por exemplo, se soubermos que *dim* ***V*** = 2 e encontrarmos dois vetores LI de ***V***, podemos afirmar que estes dois vetores formam uma base de ***V***.

Teorema 5. Dada uma base A = $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_r\}$ de um espaço vetorial ***V***, cada vetor de ***V*** é escrito de forma única como combinação linear dos vetores de A.

Prova: Seja $\vec{v}$ um vetor de ***V***. Como A é base de ***V***, podemos escrever:

$$\vec{v} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \dots + a_n\vec{v}_n$$

Suponhamos agora que $\vec{v}$ possa ser escrito como outra combinação linear dos vetores de A:

$$\vec{v} = b_1\vec{v}_1 + b_2\vec{v}_2 + \dots + b_n\vec{v}_n$$

Subtraindo, membro a membro as igualdades acima, temos:

$$0 = (a_1 - b_1)\,\vec{v}_1 + (a_2 - b_2)\,\vec{v}_2 + \dots + (a_n - b_n)\,\vec{v}_n$$

Como $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_r$ são vetores LI,

$$a_1 - b_1 = 0, \qquad a_2 - b_2 = 0, \qquad \dots \qquad a_n - b_n = 0$$

O que implica que $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, ... , $a_n = b_n$. Isto significa que os coeficientes $a_1, a_2, \dots, a_n$ são univocamente determinados pelo vetor *v* e pela dada base A = $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_r\}$.

Exercícios

1. Verificar quais dos seguintes conjuntos formam uma base do R^2:
a) { (1, 2), (-1, 3) }
b) { (3, -6), (-4, 8) }
c) { (0, 0), (2, 3) }
d) { (3, -1), (2, 3) }

2. Para que valores de *k* o conjunto { (1, *k*), (*k*, 4) } é base do R^2?

3. Dados os vetores $\vec{v}_1 = (1, 0, -1)$, $\vec{v}_2 = (1, 2, 1)$ e $\vec{v}_3 = (0, -1, 0)$ do R^3.
a) Mostrar que $A = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ é base do R^3.
b) Escrever $\vec{v}_1 = (1, 0, 0)$, $\vec{v}_2 = (0, 1, 0)$ e $\vec{v}_3 = (0, 0, 1)$ como combinação linear dos vetores da base A.

4. Determinar uma base e a dimensão de cada um dos seguintes espaços vetoriais:

a) $\{ (x, y, z) \in R^3 : y = 3x \}$
b) $\{ (x, y, z) \in R^3 : y = 5x \text{ e } z = 0 \}$
c) $\{ (x, y) \in R^2 : x + y = 0 \}$
d) $\{ (x, y, z) \in R^3 : x = 3y \text{ e } z = -y \}$
e) $\{ (x, y, z) \in R^3 : 2x - y + 3z = 0 \}$
f) $\{ (x, y, z) \in R^3 : z = 0 \}$

5. Determinar uma base e a dimensão de cada um dos seguintes subespaços vetoriais do M(2, 2):

a) $\left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : b = a + c \;\text{ e }\; d = c \right\}$

b) $\left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : b = a + c \right\}$

c) $\left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : c = a - 3b \;\text{ e }\; d = 0 \right\}$

d) $\left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : a + d = b + c \right\}$

6. Considere o subespaço do R^3 gerado pelos vetores $\vec{v}_1 = (1, 1, 0)$, $\vec{v}_2 = (0, -1, 1)$ e $\vec{v}_3 = (1, 1, 1)$. $[\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3] = R^3$? Por quê?

7. Considere o subespaço do R^4 gerado pelos vetores $\vec{v}_1 = (1, -1, 0, 0)$, $\vec{v}_2 = (0, 0, 1, 1)$, $\vec{v}_3 = (-2, 2, 1, 1)$ e $\vec{v}_4 = (1, 0, 0, 0)$.

a) O vetor $(2, -3, 2, 2) \in [\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4]$?
b) Exiba uma base para $[\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4]$. Qual a dimensão?
c) $[\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4] = R^4$? Por quê?

Capítulo V

TRANSFORMAÇÕES LINEARES

Definição de transformação linear

Neste capítulo estudaremos um tipo especial de função (ou aplicação), denominadas transformações lineares, onde o domínio e o contradomínio são espaços vetoriais. Essas funções ocorrem com freqüência em Álgebra Linear e em outros campos da matemática, além de serem importantes numa vasta gama de aplicações.

Sejam V e W espaços vetoriais. Uma ***transformação linear*** é uma função $T : V \mapsto W$ que satisfaz as seguintes condições:

i) $T(\vec{u} + \vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v})$

ii) $T(\alpha\vec{u}) = \alpha\, T(\vec{u})$

$\forall\, \vec{u}, \vec{v} \in V$, $\forall\, \alpha \in R$.

Em palavras, uma transformação linear é um tipo particular de função entre dois espaços vetoriais que preserva as operações de adição vetorial e multiplicação por escalar. Uma transformação linear também pode ser chamada de ***aplicação linear*** ou *mapeamento linear*. No caso em que o domínio e contradomínio coincidem, é usada a expressão *operador linear*.

Exemplo 1. A aplicação $T : R \mapsto R$ tal que $T(x) = 3x$ é uma transformação linear. Pois sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ quaisquer vetores de R (os vetores, neste caso, são números reais), e $\alpha \in R$.

- $T(\vec{u} + \vec{v}) = 3(\vec{u} + \vec{v}) = 3\vec{u} + 3\vec{v} = T(\vec{u}) + T(\vec{v})$
- $T(\alpha\vec{u}) = 3(\alpha\vec{u}) = \alpha 3\vec{u} = \alpha T(\vec{u})$

O leitor pode observar que, de forma análoga a este exemplo, podemos mostrar que $T(x) = kx$ é uma transformação linear, para qualquer constante real k.

Exemplo 2. A aplicação $T : V \mapsto V$ tal que $T(\vec{v}) = \vec{v}$ é uma transformação linear. Pois sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores quaisquer de V, e $\alpha \in R$.

- $T(\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u} + \vec{v} = T(\vec{u}) + T(\vec{v})$
- $T(\alpha\vec{u}) = \alpha\vec{u} = \alpha T(\vec{u})$

Esta transformação linear recebe o nome de transformação ***identidade***. Note que esta é exatamente a transformação linear do exemplo anterior para o caso em que k = 1.

Exemplo 3. A aplicação $T : R^2 \mapsto R^3$ tal que $T(x, y) = (3x, -2y, x - y)$ é uma transformação linear. Pois sejam $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2)$ vetores de R^2, e $\alpha \in R$.

- $T(\vec{u} + \vec{v})$
$$\begin{aligned} &= T(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\ &= (3(x_1 + x_2), -2(y_1 + y_2), (x_1 + x_2) - (y_1 + y_2)) \\ &= (3x_1 + 3x_2, -2y_1 - 2y_2, x_1 + x_2 - y_1 - y_2) \\ &= (3x_1, -2y_1, x_1 - y_1) + (3x_2, -2y_2, x_2 - y_2) \\ &= T(\vec{u}) + T(\vec{v}) \end{aligned}$$

- $T(\alpha\vec{u})$
$$\begin{aligned} &= T(\alpha x_1, \alpha y_1) \\ &= (3\alpha x_1, -2\alpha y_1, \alpha x_1 - \alpha y_1) \\ &= \alpha(3x_1, -2y_1, x_1 - y_1) \\ &= \alpha T(\vec{u}) \end{aligned}$$

Exemplo 4. Seja A uma matriz $m \times n$. Seja $T: R^n \mapsto R^m$ a função definida por $T(\vec{v}) = A\vec{v}$. Aqui A é o produto da matriz $A_{m \times n}$ pelo vetor coluna $\vec{v}_{n \times 1}$. Então T é linear.

De fato: Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores do R^n, e $\alpha \in R$.

- $T(\vec{u} + \vec{v})$
$$\begin{aligned} &= A(\vec{u} + \vec{v}) \\ &= A + A \text{ (propriedade do produto de matrizes)} \\ &= T() + T() \end{aligned}$$

- $T(\alpha\vec{v})$
$$\begin{aligned} &= A(\alpha\vec{v}) \\ &= \alpha(A\vec{v}) \text{(propriedade do produto de matrizes)} \\ &= \alpha T(\vec{v}) \end{aligned}$$

Assim: Toda matriz $A_{m \times n}$ define uma transformação linear $T: R^n \mapsto R^m$, onde a imagem $T_A(\vec{v})$ é o produto da matriz $A_{m \times n}$ pelo vetor coluna $\vec{v}_{nx1}$.

Como caso particular, suponhamos que $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. A transformação fica então:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{a} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ 0 \\ x + y \end{bmatrix}$$

Ou seja, $T(x, y) = (2x, 0, x + y)$.

Exemplo 5. Veremos agora um exemplo de uma transformação que não é linear. A aplicação $T: R \mapsto R$ tal que $T(x) = (3x + 1)$ não é transformação linear. Pois sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores de R.

• $T(\vec{u} + \vec{v}) = 3(\vec{u} + \vec{v}) + 1 = 3\vec{u} + 3\vec{v} + 1$
enquanto que $T(\vec{u}) + T(\vec{v}) = (3\vec{u} + 1) + (3\vec{v} + 1) = 3\vec{u} + 3\vec{v} + 2$
Logo, $T(\vec{u} + \vec{v}) \neq T(\vec{u}) + T(\vec{v})$. Portanto, T não é transformação linear.

Exercícios

1. Verificar quais das seguintes transformações $T : R^2 \mapsto R^2$ são lineares:
a) $T(x, y) = (x - 3y, 2x + 5y)$
b) $T(x, y) = (y, x)$
c) $T(x, y) = (x^2, y^2)$
d) $T(x, y) = (x + 1, y)$
e) $T(x, y) = (y - x, 0)$
f) $T(x, y) = (|x|, 2y)$
g) $T(x, y) = (\text{sen}\ x, y)$
h) $T(x, y) = (xy, x - y)$

2. Verificar quais das seguintes transformações são lineares:
a) $T : R^2 \mapsto R^3$; $T(x, y) = (x - y, 3x - 2y)$
b) $T : R^3 \mapsto R^3$; $T(x, y, z) = (x + y, x - y, 0)$
c) $T : R^2 \mapsto R^2$; $T(x, y) = (x^2 + y^2, x)$
d) $T : R \mapsto R^2$; $T(x) = (x, 2)$
e) $T : R^3 \mapsto R$; $T(x, y, z) = (-3x + 2y - z)$
f) $T : R^2 \mapsto R^4$; $T(x, y) = (y, x, y, x)$

g) $T : R^2 \mapsto M(2,2)$; $T(x, y) = \begin{bmatrix} 2y & 3x \\ -y & x+2y \end{bmatrix}$

h) $T : R^3 \mapsto R^2$; $(x, y, z) \mapsto \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$.

3. Verificar para quais valores de k dados abaixo, a aplicação $T : R^2 \mapsto R^3$ tal que $T(x, y) = (x + ky, x + k, y)$ é linear:

a) $k = x$
b) $k = 1$
c) $k = 0$

4. Seja $T: R^3 \mapsto R^3$ uma transformação linear cuja matriz em relação à base canônica é: $A = \begin{bmatrix} 3 & -3 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

a) Dar o polinômio característico.
b) Encontrar os autovalores.
c) Encontrar os autovetores associados aos autovalores.
d) Verificar se T é diagonalizável. Justifique.

5. Seja $T: R^3 \mapsto R^3$ tal que $T(x, y, z) = (x+y\ ,\ x-y+2z,\ 2x+y-z)$ onde $\beta = \{(1, 1, 1), (2, 1, -1), (1, 0, 0\}$ e $\beta' = \{(1,3), (1,0)\}$. Encontrar $[T]^{\beta}_{\beta'}$.

6. Ache a transformação linear $T: R^3 \mapsto R^3$ dada por $T(2,1,0) = (2,5)$, $T(1,-2,1) = (3,1)$ e $T(1,0,1) = (2,3)$.

7. Sejam as transformações lineares $T_1: R^2 \mapsto R^3$ e $T_2: R^3 \mapsto R^2$ cujas matrizes são:

$[T_1]^{\alpha}_{\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $[T_2]^{\beta}_{\gamma} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

em relação às bases $\alpha \equiv \{(1,0), (0,2)\}$, $\beta \equiv \{(1, 0,3), (1,1,0), (2, 0, 5)\}$ e $\gamma \equiv \{(2,0), (1,1)\}$. Encontrar a transformação linear composta $T_2 \circ T_1 : \Re^2 \to \Re^2$.

8. Qual é a imagem do vetor $\vec{w} = (-1,-2)$ pela aplicação T, onde a transformação linear $T: R^2 \mapsto R^3$ é dada por $[T]^{\alpha}_{\beta} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$

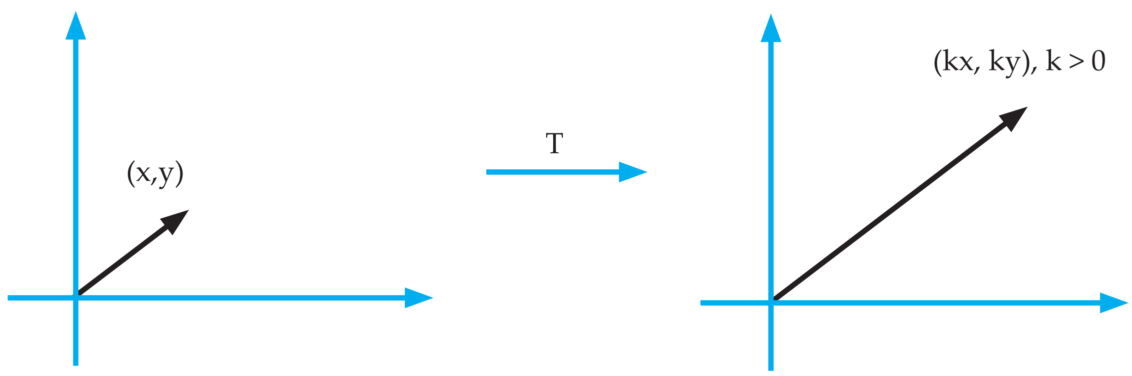
sendo $\alpha \equiv \{(1,0), (0,1)\}$, $\beta \equiv \{(1,0,1), (-2,1,1), (0,1,0)\}$.

Transformações lineares no plano

Nesta seção, continuaremos a apresentar exemplos de transformações lineares. Mas agora, apresentaremos uma visão geométrica das transformações lineares através de exemplos de transformações no plano, ou seja, transformações do tipo $T : R^2 \mapsto R^2$. Veremos que uma série de operações no plano podem ser descritas por transformações lineares.

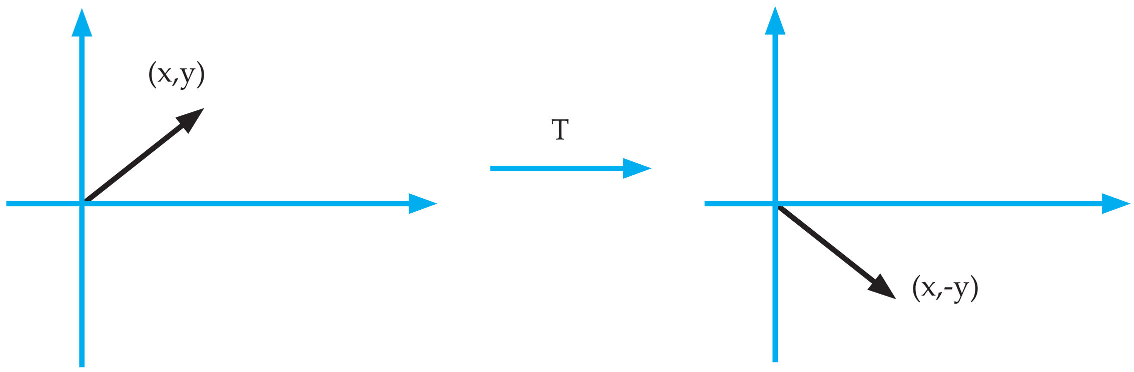
Expansão (ou contração)

A aplicação $T(x, y) = k(x, y) = (kx, ky)$, $k \in R$, é uma transformação linear que leva cada vetor do plano num vetor de mesma direção e mesmo sentido, se $k > 0$, ou sentido contrário, se $k < 0$.



Reflexão em torno do eixo x

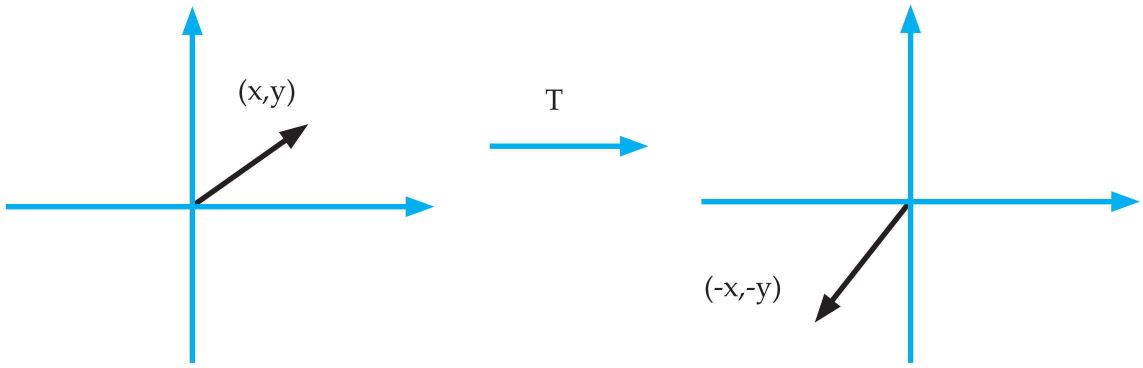
A aplicação $T(x, y) = (x, -y)$ é uma transformação linear que leva cada vetor do plano num vetor "refletido" em relação ao eixo x, como ilustrado na figura a seguir.



De forma análoga, a transformação linear T(x, y) = (-x, y) representa a reflexão em torno do eixo y.

Reflexão em relação à origem

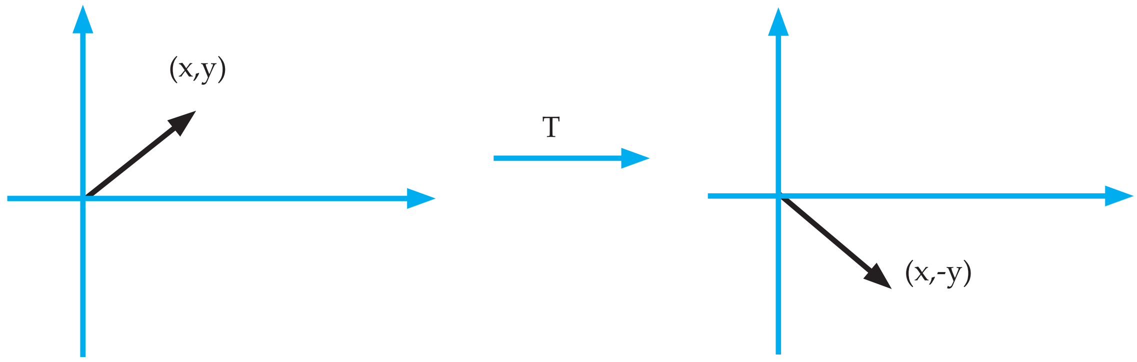
A aplicação T(x, y) = (-x, -y) é uma transformação linear que leva cada vetor do plano num vetor "refletido" em relação à origem das coordenadas, como ilustrado na figura a seguir.



Note que, esta operação é também uma expansão no caso articular em que k = -1.

Projeção no eixo x

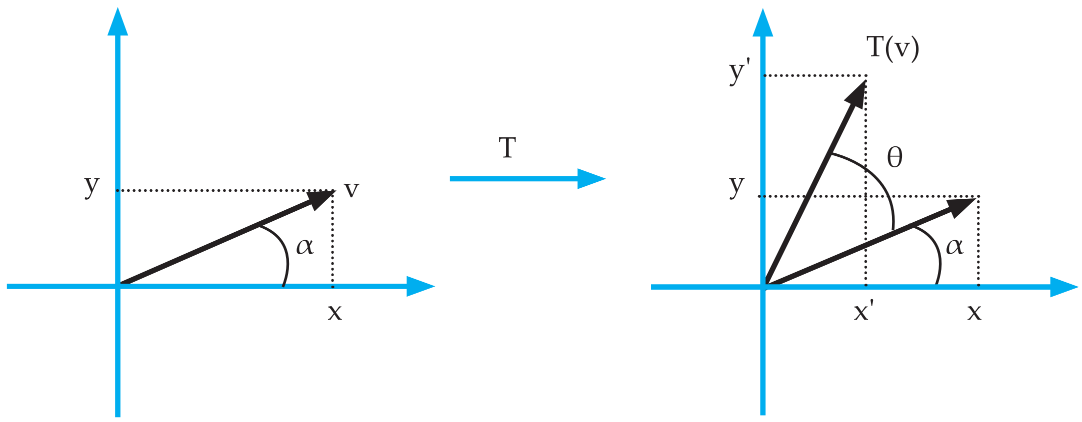
A aplicação T(x, y) = (x, 0) é uma transformação linear que leva cada vetor do plano na sua projeção no eixo x, como ilustrado na figura a seguir.



De forma análoga, a transformação linear T(x, y) = (0, y) representa a projeção do vetor (x, y) no eixo y.

Rotação de um ângulo θ

Consideremos um vetor = (x, y), formando um ângulo α em relação ao eixo x. Vamos descrever a transformação linear que representa a rotação de de um ângulo θ, no sentido anti-horário, como ilustrado na figura a seguir.



Da forma como modelamos o problema, temos qu e T(v) = T(x, y) = (x', y'). Portanto, para determinarmos a transformação T, devemos calcular os valores de x' e y'. Para simplificar os cálculos, vamos denotar por r o módulo do vetor v ($r = \|v\|$). Aplicando regras da trigonometria, observe inicialmente que $r \cos \alpha = x$ e $r \text{ sen } \alpha = y$. Podemos agora calcular as coordenadas x' e y' de T(v).

$$
\begin{aligned}
x' &= r \cos(\alpha + \theta) \\
&= r (\cos \alpha \,.\, \cos \theta - \text{sen } \alpha \,.\, \text{sen } \theta)
\end{aligned}
$$

$$= r\cos\alpha \,.\, \cos\theta - r\,\mathrm{sen}\,\alpha \,.\, \mathrm{sen}\,\theta$$
$$= x \,.\, \cos\theta - y \,.\, \mathrm{sen}\,\theta$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} y' &= r\,\mathrm{sen}(\alpha+\theta) \\ &= r\,(\mathrm{sen}\,\alpha \,.\, \cos\theta + \cos\alpha \,.\, \mathrm{sen}\,\theta) \\ &= r\,\mathrm{sen}\,\alpha \,.\, \cos\theta + r\cos\alpha \,.\, \mathrm{sen}\,\theta \\ &= y \,.\, \cos\theta + x \,.\, \mathrm{sen}\,\theta \end{aligned}$$

Assim, $T(x, y) = (x', y') = (x \,.\, \cos\theta - y \,.\, \mathrm{sen}\,\theta,\ y \,.\, \cos\theta + x \,.\, \mathrm{sen}\,\theta)$. Uma forma mais conveniente é descrever T em forma de matriz, isto é:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad a \quad \begin{bmatrix} \cos\theta & -\mathrm{sen}\theta \\ \mathrm{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Por exemplo, no caso particular em que $\theta = \pi/2$, temos $\cos\theta = 0$ e $\mathrm{sen}\,\theta = 1$. Então, a transformação é

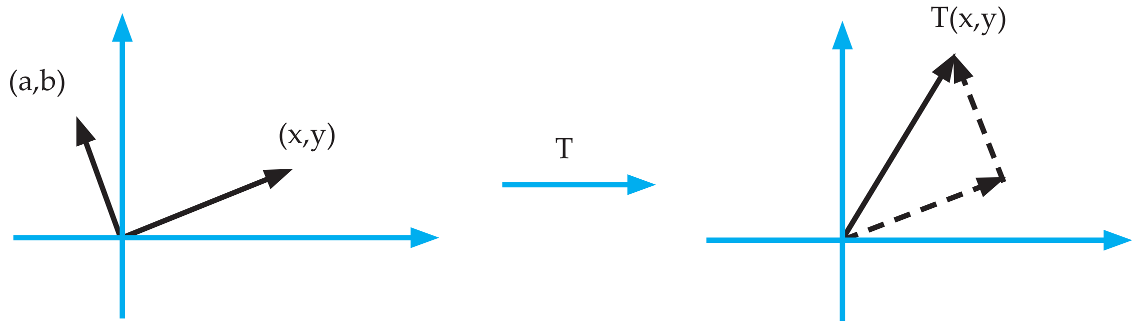
$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad a \quad \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix}$$

Ou seja, a transformação $T(x, y) = (-y, x)$ representa a rotação de 90º, no sentido horário, de qualquer vetor (x, y).

Todas as transformações apresentadas nesta seção são lineares, pois podem ser descritas na forma $T(\vec{v}) = A\vec{v}$, onde A é uma matriz 2 x 2. A aplicação a seguir não é linear.

Translação

A aplicação $T(x, y) = (x + a, y + b)$ é uma translação no plano segundo o vetor (a, b), como ilustrado na figura a seguir.



Esta transformação não é linear (verifique!), a menos que $a = b = 0$ e, neste caso, T é a transformação identidade, que é linear.

Exercícios

1. Determine a transformação no plano que é uma reflexão em torno da reta $x = y$.

2. Determine a transformação no plano que é uma rotação anti-horária de 45º.

3. Determine a transformação no plano que leva cada vetor v em um outro que possui mesma direção e sentido de v e metade de seu módulo.

Propriedades

Estudaremos nesta seção alguns resultados que darão embasamento para um estudo mais profundo das transformações lineares.

T(0) = 0 para toda transformação linear

O teorema a seguir apresenta uma condição necessária para que uma transformação seja linear.

Teorema 1. Em toda transformação linear $T : V \mapsto W$, a imagem do vetor $0 \in V$ é o vetor $0 \in W$, isto é, $T(0) = 0$.

Prova: Este fato decorre da definição de transformação linear, pois $T(0) = T(0 + 0) = T(0) + T(0)$. Subtraindo $T(0)$ de ambos os membros desta equação, temos que $T(0) = 0$, como queríamos demonstrar.

Uma conclusão imediata que podemos tirar deste teorema é que se uma aplicação T é tal que $T(0) \neq 0$ então T não é linear. Podemos então utilizar este resultado para mostrar que certas transformações não são lineares, como nos exemplos a seguir.

Exemplo 2. A aplicação de translação, não é transformação linear se $(a, b) \neq (0, 0)$, pois $T(0, 0) = (a, b)$.

Exemplo 3. A transformação $T(x, y, z) = (3x + 2, 2y - z)$ também não é linear, pois $T(0, 0, 0) = (2, 0) \neq (0, 0)$.

É importante ressaltar que a recíproca do Teorema 1 não é verdadeira, pois existe transformação com $T(0) = 0$ que não é linear, como no exemplo a seguir

Exemplo 4. A transformação $T : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ tal que $T(x) = x^2$ não é linear.
De fato, sejam x e y vetores de R.

$T(x + y) = (x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

Enquanto que

$T(x) + T(y) = x^2 + y^2$
Isto é, $T(x + y) \neq T(x) + T(y)$.

Transformação linear e base de um espaço vetorial

Outra propriedade importante sobre transformações lineares é que elas são perfeitamente determinadas conhecendo-se apenas seu valor nos elementos de uma base.

Para entender melhor esta propriedade, observe inicialmente que se $T : V \mapsto W$ é uma transformação linear, então

$T(a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2) = a_1T(\vec{v}_1) + a_2T(\vec{v}_2)$

para todo $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V$, $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$. Este fato decorre imediatamente da definição de transformação linear.

De forma análoga, tem-se:

$T(a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \ldots + a_n\vec{v}_n) = a_1T(\vec{v}_1) + a_2T(\vec{v}_2) + \ldots + a_nT(\vec{v}_n)$

para todo $\vec{v}_i \in V$, $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Isto é, a imagem de uma combinação linear de vetores é uma combinação linear das imagens desses vetores, com os mesmos coeficientes.

Suponha agora que $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ seja uma base de V e que as imagens de $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ são $T(\vec{v}_1), T(\vec{v}_2), \ldots, T(\vec{v}_n)$, respectivamente. Então sempre é possível obter a imagem de qualquer vetor $\vec{v}$

$\in$ *V*, pois basta escrever $\vec{v}$ como combinação linear dos vetores $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, ... , $\vec{v}_n$ e utilizar a relação acima. os exemplos a seguir esclarecem melhor este fato.

Exemplo 5. Seja T : $R^2 \mapsto R^2$ uma transformação linear e considere a base A = {(1, 0), (0, 1)} do R^2. Suponha que T(1,0) = (2, 3) e T(0, 1) = (-1, 0). Qual a imagem do vetor (-2, 3).

Solução: Escrevendo o vetor (-2, 3) como combinação linear dos elementos da base A, temos (-2, 3) = -2(1, 0) + 3(0, 1). Logo,
T(-2, 3) = -2 T(1, 0) + 3 T(0, 1) = -2(2, 3) + 3(-1, 0) = (-7, -6)
Portanto, a imagem do vetor (-2, 3) é o vetor (-7, -6).

Exemplo 6. Seja T : $R^3 \mapsto R^2$ uma transformação linear e B = {(0, 1, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 0)} uma base do R^3. Determinar T(5, 3, -2) sabendo que T(0, 1, 0) = (1, -2), T(1, 0, 1) = (3, 1) e T(1, 1, 0) = (0, 2).

Solução: Escrevendo o vetor (5, 3, -2) como combinação linear dos vetores da base A:

$(5, 3, -2) = a_1(0, 1, 0) + a_2(1, 0, 1) + a_3(1, 1, 0)$.

Esta equação produz o sistema

$$\begin{cases} a_2 + a_3 = 5 \\ a_1 + a_3 = 3 \\ \phantom{a_1 + {}} a_2 = -2 \end{cases}$$

Cuja solução é: $a_1 = -4$, $a_2 = -2$ $a_3 = 7$. Então

(5, 3, -2) = -4(0, 1, 0) – 2(1, 0, 1) + 7(1, 1, 0).

Logo,

$$\begin{aligned} T(5, 3, -2) &= -4\,T(0, 1, 0) - 2\,T(1, 0, 1) + 7\,T(1, 1, 0). \\ &= -4\,(1, -2) - 2\,(3, 1) + 7\,(0, 2) \\ &= (-10, 20) \end{aligned}$$

Exemplo 7. Qual é a transformação linear T : $R^2 \mapsto R^3$ tal que T(1,0) = (2, -1, 0) e T(0, 1) = (0, 0, 1)?

Solução: Seja (*x*, *y*) um vetor qualquer do R^2. Então (*x*, *y*) = = *x* (1, 0) + *y* (0, 1). Logo,

$$\begin{aligned} T(x, y) &= x\,T(1, 0) + y\,T(0, 1) \\ &= x\,(2, -1, 0) + y\,(0, 0, 1) \\ &= (2x, -x, y) \end{aligned}$$

Exercícios

1. Determine a transformação linear $T : R^2 \mapsto R^3$ tal que $T(-1, 1) = (3, 2, 1)$ e $T(0, 1) = (1, 1, 0)$. Encontre $\vec{v} \in R^2$ tal que $T(\vec{v}) = (-2, 1, -3)$.

2. Determine a transformação linear $T : R^3 \mapsto R^2$ tal que $T(1, -1, 0) = (1, 1)$, $T(0, 1, 1) = (2, 2)$ e $T(0, 0, 1) = (3, 3)$.
Achar $T(1, 0, 0)$ e $T(0, 1, 0)$.

3. Seja $T : R^3 \mapsto R^2$ uma transformação linear tal que
$T(1, 1, 1) = (1, 2)$, $T(1, 1, 0) = (2, 3)$ e $T(1, 0, 0) = (3, 4)$

a) Determine $T(x, y, z)$
b) Determine $\vec{v} \in R^3$ tal que $T(\vec{v}) = (-3, 2)$
c) Determine $\vec{v} \in R^3$ tal que $T(\vec{v}) = (0, 0)$

4. Ache a transformação linear $T : R^3 \mapsto R^2$ tal que $T(1, 0, 0) = (2, 0)$, $T(0, 1, 0) = (1, 1)$ e $T(0, 0, 1) = (0, -1)$.
Encontre $\vec{v} \in R^3$ tal que $T(\vec{v}) = (3, 2)$.

5. Determinar a transformação linear $T : P_2 \mapsto P_2$ tal que $T(1) = x$, $T(x) = 1 - x^2$ e $T(x^2) = x + 2x^2$.

Núcleo de uma Transformação Linear

Seja $T : \boldsymbol{V} \mapsto \boldsymbol{W}$ uma transformação linear. O conjunto de todos os vetores $\vec{v} \in \boldsymbol{V}$ tais que $T(\vec{v}) = 0$ é chamado *núcleo* de T e denotado por *ker*(T) (o termo *ker* é proveniente do inglês **"kernel"** que significa núcleo). Em linguagem simbólica,

$$ker(T) = \{\vec{v} \in \boldsymbol{V} : T(\vec{v}) = 0\}$$

Observe que *ker*(T) é um subconjunto de $\boldsymbol{V}$. Na verdade, *ker*(T) é um subespaço vetorial de $\boldsymbol{V}$, como veremos adiante. Nos exemplos a seguir veremos como determinar o núcleo de uma transformação linear.

Exemplo 1. Determine o núcleo da transformação linear $T : R^2 \mapsto R^2$ tal que

$$T(x, y) = (x + y, 2x - y).$$

Solução: O núcleo de T é o conjunto

$$ker(T) = \{(x, y) \in R^2 : T(x, y) = (0, 0)\}$$

ou seja,

$$ker(T) = \{(x, y) \in R^2 : (x + y, 2x - y) = (0, 0)\}$$

Isto implica que: $\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$. Este sistema possui a seguinte solução: $x = 0$ e $y = 0$.

Logo, $ker(T) = \{(0, 0)\}$.

Exemplo 2. Determine o núcleo da transformação linear $T: R^2 \mapsto R$ tal que $T(x, y) = x + y$.

Solução: O núcleo de T é o conjunto

$$ker(T) = \{(x, y) \in R^2 : T(x, y) = x + y = 0\}$$

Isto é, $ker(T)$ é a reta $y = -x$. Podemos também escrever

$$ker(T) = \{(x, -x) : x \in R\} = \{x (1, -1) : x \in R\} = [(1, -1)]$$

Ou seja, $ker(T)$ é o espaço gerado pelo vetor (1, -1).

Exemplo 3. Determine o núcleo da transformação linear $T : R^3 \mapsto R^3$ tal que $T(x, y, z) = (x, 2y, 0)$.

Solução: O núcleo de T é dado por

$$\begin{aligned} ker(T) &= \{(x, y, z) : T(x, y, z) = (0, 0, 0)\} \\ &= \{(x, y, z) : (x, 2y, 0) = (0, 0, 0)\} \\ &= \{(0, 0, z) : z \in R\} \\ &= \{z (0, 0, 1) : z \in R\} \end{aligned}$$

Ou seja, $ker(T)$ é o espaço gerado pelo vetor (0, 0, 1).

Terminaremos esta seção apresentando algumas propriedades do núcleo de uma transformação linear.

Teorema 1. O núcleo de uma transformação linear $T: \boldsymbol{V} \mapsto \boldsymbol{W}$ é um subespaço vetorial de $\boldsymbol{V}$.

Prova: Sejam $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ vetores de $ker(T)$ e $\alpha \in R$. Então $T(\vec{v}_1) = 0$ e $T(\vec{v}_2) = 0$. Logo,

- $T(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = T(\vec{v}_1) + T(\vec{v}_2) = 0 + 0 = 0$, ou seja, $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 \in ker(T)$.
- $T(\alpha\vec{v}_1) = \alpha.T(\vec{v}_1) = \alpha \,.\, 0 = 0$, ou seja, $\alpha\vec{v}_1 \in ker(T)$.

Pelo Teorema 1 - Subespaço Vetorial, temos que $ker(T)$ é subespaço vetorial de $\boldsymbol{V}$.

O teorema a seguir estabelece condições para que uma transformação linear seja injetora. Lembre-se que uma função $T : \boldsymbol{V} \mapsto \boldsymbol{W}$ é injetora se $\forall\, \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \boldsymbol{V}$, $\vec{v}_1 \neq \vec{v}_2$ implica que $T(\vec{v}_1) \neq T(\vec{v}_2)$.

Teorema 2. Uma transformação linear $T : \boldsymbol{V} \mapsto \boldsymbol{W}$ é injetora se, e somente se, $ker(T) = \{0\}$.

Prova: Suponha inicialmente que T é injetora e vamos mostrar que $ker(T) = \{0\}$. Seja v um vetor de $ker(T)$. Então $T(\vec{v}) = 0$. Pelo Teorema1 (pág. 95), sabemos que $T(0) = 0$. Como T é injetora, temos que $\vec{v} = 0$. Portanto, o vetor zero é o único elemento do núcleo, isto é, $ker(T) = \{0\}$.

Suponha agora que $ker(T) = \{0\}$ e vamos mostrar que T é injetora. Sejam $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2 \in \boldsymbol{V}$ tais que $T(\vec{v}_1) = T(\vec{v}_2)$. Então $T(\vec{v}_1) - T(\vec{v}_2) = 0$ ou $T(\vec{v}_1 - \vec{v}_2) = 0$. Logo, $\vec{v}_1 - \vec{v}_2 \in ker(T)$, ou seja, $\vec{v}_1 - \vec{v}_2 = 0$, o que implica que $\vec{v}_1 = \vec{v}_2$.

Resumindo: mostramos que $T(\vec{v}_1) = T(\vec{v}_2)$ implica que $\vec{v}_1 = \vec{v}_2$. Isto significa que $\vec{v}_1 \neq \vec{v}_2$ implica que $T(\vec{v}_1) \neq T(\vec{v}_2)$. Portanto, T é injetora, como queríamos demonstrar.

Exercícios

1. Considere a transformação linear $T : R^2 \mapsto R^2$ tal que $T(x, y) = (2x+y, 4x+2y)$. Quais dos seguintes vetores pertencem ao núcleo de T?

a) (1, -2) b) (2, -3) c) (-3, 6)

2. Determine o núcleo das seguintes transformações lineares:

a) $T : R^2 \mapsto R^2$ $T(x, y) = (3x - y, -3x + y)$

b) $T : R^2 \mapsto R^3$ $T(x, y) = (x + y, x, 2y)$

c) $T : R^2 \mapsto R^2$ $T(x, y) = (x - 2y, x + y)$

d) $T : R^3 \mapsto R^2$ $T(x, y, z) = (x + 2y - z, 2x - y + z)$

e) $T : R^3 \mapsto R^3$ $T(x, y, z) = (x - y - 2z, -x + 2y + z, x - 3z)$

f) $T : P_1 \mapsto R^3$ $T(ax + b) = (a, a, a - b)$

g) $T : M(2, 2) \mapsto R^2$ $T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (a - b, a + b)$

3. Considere a transformação linear $T : R^2 \mapsto R^3$ tal que $T(-2, 3) = (-1, 0, 1)$ e $T(1, -2) = (0, -1, 0)$.

a) Determinar $T(x, y)$

b) T é injetora?

4. Encontrar uma transformação linear $T : R^3 \mapsto R^3$ cujo núcleo é gerado pelos vetores (1, 2, -1) e (1, -1, 0).

5. Encontrar uma transformação linear $T : R^3 \mapsto R^2$ tal que $ker(T) = [(1, 0, -1)]$.

Imagem de uma transformação linear

A ***imagem*** de uma transformação linear $T : V \mapsto W$, denotada por $Im(T)$, é o conjunto de todos os vetores $\vec{w} \in W$ que são imagens de algum vetor $\vec{v} \in V$. Em linguagem simbólica,

$$Im(T) = \{\vec{w} \in W : T(\vec{v}) = \vec{w} \text{ para algum } \vec{v} \in V\}$$

Observe que $Im(T)$ é um subconjunto de W. Veremos adiante que $Im(T)$ é um subespaço vetorial de W. Nos exemplos a seguir veremos como determinar a imagem de uma transformação linear.

Exemplo 1. Determine a imagem da transformação linear $T : R^2 \mapsto R^2$ tal que $T(x, y) = (x + y, 2x - y)$.

Solução: A imagem de T é dada por:

$$\begin{aligned} Im(T) &= \{(x + y, 2x - y) : x, y \in R\} \\ &= \{x\,(1, 2) + y\,(1, -1) : x, y \in R\} \end{aligned}$$

$= [(1, 2), (1, -1)]$
$= \mathbb{R}^2$

Ou seja, *Im*(T) é o subespaço gerado pelos vetores (1, 2) e (1, -1). Como esses vetores são L.I., temos que $[(1, 2), (1, -1)] = \mathbb{R}^2$.

Exemplo 2. Determine a imagem da transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ tal que $T(x, y) = x + y$.

Solução: $Im(T) = \mathbb{R}$, pois dado $\vec{w} \in \mathbb{R}$, $T(\vec{w}, 0) = \vec{w}$.

Exemplo 3. Determine a imagem da transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ tal que $T(x, y, z) = (x, 2y, 0)$.

Solução: $Im(T) = \{(x, 2y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\}$
$= \{x\,(1, 0, 0) + y\,(0, 2, 0) : x, y \in \mathbb{R}\}$
$= [(1, 0, 0), (0, 2, 0)]$

Exemplo 4. A imagem da transformação identidade $T : \boldsymbol{V} \mapsto \boldsymbol{V}$, tal que $T(\vec{v}) = \vec{v}$, $\forall\, \vec{v} \in \boldsymbol{V}$, é todo o espaço $\boldsymbol{V}$. O núcleo, neste caso, é $ker(T) = \{0\}$.

Exemplo 5. A imagem da transformação nula $T : \boldsymbol{V} \mapsto \boldsymbol{W}$, tal que $T(\vec{v}) = 0$, $\forall\, \vec{v} \in \boldsymbol{V}$, é o conjunto $\{0\}$ ($Im(T) = \{0\}$). O núcleo, neste caso, é $ker(T) = \boldsymbol{V}$.

Exemplo 6. Verifique se o vetor (5, 3) pertence à imagem da transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ definida por
$T(x, y) = (x - 2y, 2x + 3y)$.

Solução: Devemos verificar se existe $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tal que

$T(x, y) = (x - 2y, 2x + 3y) = (5, 3)$

Esta igualdade determina o sistema $\begin{cases} x - 2y = 5 \\ 2x + 3y = 3 \end{cases}$, cuja solução é $x = 3$ e $y = -1$, ou seja, $T(3, -1) = (5, 3)$. Concluímos então que $(5, 3) \in Im(T)$.

Terminaremos esta seção apresentando uma propriedade da imagem de uma transformação linear.

Teorema 1. A imagem de uma transformação linear $T : V \mapsto W$ é um subespaço vetorial de W.

Prova: Sejam $\vec{w}_1$ e $\vec{w}_2$ vetores de $Im(T)$ e $\alpha \in R$. Vamos mostrar que $\vec{w}_1 + \vec{w}_2$ e $\alpha\vec{w}_1 \in Im(T)$. Para isto, devemos mostrar que existem vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ em V tais que $T(\vec{u}) = \vec{w}_1 + \vec{w}_2$ e $T(\vec{v}) = \alpha\vec{w}_1$.

Como $\vec{w}_1$ e $\vec{w}_2 \in Im(T)$, existem vetores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2 \in V$ tais que $T(\vec{v}_1) = \vec{w}_1$ e $T(\vec{v}_2) = \vec{w}_2$. Fazendo $\vec{u} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ e $= \alpha\vec{v}_1$, temos:

- $T(\vec{u}) = T(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = T(\vec{v}_1) + T(\vec{v}_2) = \vec{w}_1 + \vec{w}_2$
- $T(\vec{v}) = T(\alpha\vec{v}_1) = \alpha.T(\vec{v}_1) = \alpha\vec{w}_1$

Pelo Teorema 1 (pág. 62), temos que Im (T) é subespaço vetorial de V.

Exercícios

1. Considere a transformação linear $T : R^2 \mapsto R^2$ tal que $T(x, y) =$
$= (2x + y, 4x + 2y)$. Quais dos seguintes vetores pertencem à imagem de T?

a) (2, 4) b) (-, -1) c) (-1, 3)

2. Determine a imagem das seguintes transformações lineares:

a) $T : R^2 \mapsto R^2$	$T(x, y) = (3x - y, -3x + y)$
b) $T : R^2 \mapsto R^3$	$T(x, y) = (x + y, x, 2y)$
c) $T : R^2 \mapsto R^2$	$T(x, y) = (x - 2y, x + y)$
d) $T : R^3 \mapsto R^2$	$T(x, y, z) = (x + 2y - z, 2x - y + z)$
e) $T : R^3 \mapsto R^3$	$T(x, y, z) = (x - y - 2z, -x + 2y + z, x - 3z)$
f) $T : P_1 \mapsto R^3$	$T(ax + b) = (a, a, a - b)$
g) $T : M(2, 2) \in R^2$	$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (a - b, a + b)$

3. Encontrar uma transformação linear $T : R^3 \mapsto R^4$ cuja imagem é gerada pelos vetores (1, 3, -1, 2) e (2, 0, 1, -1).

Teorema da dimensão

Um resultado importante, que relaciona as dimensões do núcleo e imagem de uma transformação linear $T : V \mapsto W$ com a dimensão de V é dado pela seguinte proposição.

Teorema 1. Seja $T : V \mapsto W$ uma transformação linear. Então

$$dim\ ker(T) + dim\ Im(T) = dim\ V$$

Deixaremos de demonstrar este teorema devido à sua complexidade e faremos algumas comprovações através de exemplos.

Exemplo 1. Determine o núcleo e a imagem da transformação linear $T : R^2 \mapsto R^2$ tal que $T(x, y) = (x + y, 2x - y)$.

Solução: Pelos exemplos 1 (págs. 99 e 101), temos $ker(T) = \{(0, 0)\}$ e $Im(T) = R^2$. Logo,

$dim\ ker(T) = 0$ e $dim\ Im(T) = 2$. Como $dim\ R^2 = 2$, temos
$dim\ ker(T) + dim\ Im(T) = dim\ V$.

Exemplo 2. Determine o núcleo e a imagem da transformação linear $T : R^2 \mapsto R$ tal que $T(x, y) = x + y$.

Solução: Pelos exemplos 2 (págs. 99 e 102), temos $ker(T) = [(1, -1)]$ e $Im(T) = R$. Logo,

$dim\ ker(T) = 1$ e $dim\ Im(T) = 1$. Como $dim\ R^2 = 2$, temos
$dim\ ker(T) + dim\ Im(T) = dim\ V$.

Exemplo 3. Determine o núcleo e a imagem da transformação linear $T : R^3 \mapsto R^3$ tal que $T(x, y, z) = (x, 2y, 0)$.

Solução: Pelos exemplos 3 (págs. 99 e 102), temos

$ker(T) = [(0, 0, 1)]$ e $Im(T) = [(1, 0, 0), (0, 2, 0)]$.

Logo,

$dim\ ker(T) = 1$ e $dim\ Im(T) = 2$. Como $dim\ R^3 = 3$, temos
$dim\ ker(T) + dim\ Im(T) = dim\ V$.

Exemplo 4. Para a transformação identidade $T : V \mapsto V$, tal que $T(\vec{v}) = \vec{v}$, $\forall\, \vec{v} \in V$, temos $ker(T) = \{0\}$ e $Im(T) = V$. Logo,

$dim\ ker(T) = 0$ e $dim\ Im(T) = dim\ V$. Portanto,
$dim\ ker(T) + dim\ Im(T) = dim\ V$.

Exemplo 5. Para a transformação nula $T : V \mapsto W$, tal que $T(\vec{v}) = 0$, $\forall\, \vec{v} \in V$, temos $ker(T) = V$ e $Im(T) = \{0\}$. Logo,

$dim\ ker(T) = dim\ V$ e $dim\ Im(T) = 0$. Portanto,
$dim\ ker(T) + dim\ Im(T) = dim\ V$.

Teorema 2. Seja $T : V \mapsto W$ uma transformação linear.
Se $dim\ V = dim\ W$ e T é injetora então T transforma base em base, isto é, se $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ é base de V, então o conjunto $T(B) = \{T(\vec{v}_1), T(\vec{v}_2), \ldots, T(\vec{v}_n)\}$ é base de W.

Prova: Como $dim\ V = dim\ W = n$, basta mostrar que T(B) é LI. Para tanto, consideremos a igualdade

$$a_1T(\vec{v}_1) + a_2T(\vec{v}_2) + \ldots + a_nT(\vec{v}_n) = 0$$

Pela linearidade de T, esta igualdade equivale a

$$T(a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \ldots + a_n\vec{v}_n) = 0$$

Como T é injetora, temos pelo Teorema 2 (pág. 100) que

$$a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \ldots + a_n\vec{v}_n = 0$$

Como B é base, B é LI e, portanto $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$. Logo, T(B) é base de W, como queríamos demonstrar.

Lembre-se de que uma aplicação $T : V \mapsto W$ é sobrejetora se $Im(T) = W$. Quando T for injetora e sobrejetora ao mesmo tempo, dizemos que T é um ***isomorfismo***. Quando há uma tal transformação entre dois espaços vetoriais, dizemos que estes são ***isomorfos***. Sob o ponto de vista da Álgebra Linear, espaços vetoriais isomorfos são idênticos.

Exercícios

1. Considere a transformação linear $T : R^4 \mapsto R^3$ tal que

$T(1, 0, 0, 0) = (1, -2, 1)$, $T(0, 1, 0, 0) = (-1, 0, 1)$,
$T(0, 0, 1, 0) = (0, -1, 2)$, $T(0, 0, 0, 1) = (0, -3, 1)$

a) Determine o núcleo e a imagem de T.
b) Verificar o teorema da dimensão.

Aplicações lineares e matrizes

Seja $T : V \mapsto W$ uma transformação linear. Para um melhor entendimento da relação entre transformações lineares e matrizes, consideremos o caso particular em que $dim\ V = 2$ e $dim\ W = 3$. O caso geral é análogo a este.

Sejam $A = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ e $B = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}$ bases de V e W, respectivamente. Então um vetor $\vec{v} \in V$ pode ser expresso por:

$$\vec{v} = x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2$$

E a imagem $T(\vec{v})$ por:

$$T(\vec{v}) = y_1\vec{w}_1 + y_2\vec{w}_2 + y_3\vec{w}_3$$

Como $T(\vec{v}_1)$ e $T(\vec{v}_2)$ são vetores de W, eles podem ser escritos como combinações lineares dos vetores da base B de W, ou seja,

$$\begin{aligned} T(\vec{v}_1) &= a_{11}\vec{w}_1 + a_{21}\vec{w}_2 + a_{31}\vec{w}_3 \\ T(\vec{v}_2) &= a_{12}\vec{w}_1 + a_{22}\vec{w}_2 + a_{32}\vec{w}_3 \end{aligned}$$

Como T é transformação linear, podemos também escrever $T(\vec{v})$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned} T(\vec{v}) &= T(x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2) \\ &= x_1T(\vec{v}_1) + x_2T(\vec{v}_2) \\ &= x_1\,(a_{11}\vec{w}_1 + a_{21}\vec{w}_2 + a_{31}\vec{w}_3) + x_2\,(a_{12}\vec{w}_1 + a_{22}\vec{w}_2 + a_{32}\vec{w}_3) \\ &= (a_{11}x_1 + a_{12}x_2)\,\vec{w}_1 + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2)\,\vec{w}_2 + (a_{31}x_1 + a_{32}x_2)\,\vec{w}_3 \end{aligned}$$

Como cada elemento de um espaço vetorial é descrito de forma única como combinação linear de vetores de uma base, concluímos que:

$$y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2$$
$$y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2$$
$$y_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2$$

Reescrevendo esta expressão na forma matricial, temos:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Ou, simbolicamente:

$$[T(\vec{v})]_B = T_B^A \, [\vec{v}]_A$$

Onde:

- $[T(\vec{v})]_B = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$ representa as *coordenadas* de T() na base B;
- A matriz $T_B^A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$ é denominada *matriz de* T *em relação às bases* A e B; e
- $[\vec{v}]_A =$ representa as *coordenadas* de $\vec{v}$ na base A.

Observação: As colunas da matriz T_B^A são as componentes das imagens dos vetores da base A em relação à base B, isto é,

$$\begin{array}{cc} [T(\vec{v}_1)]_B & [T(\vec{v}_2)]_B \\ \downarrow & \downarrow \end{array}$$

$$T_B^A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

Este exemplo particular se generaliza de forma natural para espaços *V* e *W* de dimensões quaisquer. Mais precisamente, para uma transformação linear $T : V \mapsto W$ onde $\dim V = n$ e $\dim W = m$, se $A = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ e $B = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \ldots, \vec{w}_m\}$ são bases de *V* e *W*, respectivamente, teremos que A matriz T_B^A de T em relação às bases A e B é tal que cada coluna *i* é formada pelas componentes das imagens do vetor $\vec{v}_i$ de A em relação à base B.

$$[T(\vec{v}_1)]_B \quad [T(\vec{v}_2)]_B \quad \dots \quad [T(\vec{v}_n)]_B$$

$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$T_B^A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Como se vê, a matriz T_B^A depende das bases A e B consideradas, isto é, a cada dupla de bases corresponde uma determinada matriz. Assim, uma transformação linear poderá ter uma infinidade de matrizes para representá-la. No entanto, fixadas as bases, a matriz é única.

Todo o raciocínio que fizemos até aqui pode ser resumido no seguinte resultado:

Teorema 1. Sejam V e W espaços vetoriais e $T : V \mapsto W$ uma transformação linear. Sejam A e B bases de V e W, respectivamente. Então, para todo $\vec{v} \in V$,

$$[T(\vec{v})]_B = T_B^A\,[\vec{v}]_A$$

Exemplo 1. Seja a transformação linear $T: R^3 \mapsto R^2$ tal que $T(x, y, z) = (2x + y - z, 3x - 2y + 4z)$

Sejam A = {(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)} e B = {(1, 3), (1, 4)} bases do R^3 e R^2.

a) Determinar T_B^A.

b) Se $\vec{v} = (2, 3, -1)$ (coordenadas de v em relação à base canônica), calcular $[T(\vec{v})]_B$.

Solução: Calculando T como combinação linear dos elementos da base B, temos:

- $T(1, 1, 1) = (2, 5) = 3(1, 3) - 1(1, 4)$
- $T(1, 1, 0) = (3, 1) = 11(1, 3) - 8(1, 4)$
- $T(1, 0, 0) = (2, 3) = 5(1, 3) - 3(1, 4)$

Então $T_B^A = \begin{bmatrix} 3 & 11 & 5 \\ -1 & -8 & -3 \end{bmatrix}$.

Para calcular $[T(\vec{v})]_B$, precisamos inicialmente calcular as coordenadas de na base A, ou seja, $[\vec{v}]_A$:

(2, 3, -1) = -1(1, 1, 1) + 4(1, 1, 0) – 1(1, 0, 0). Logo, $[\vec{v}]_A$ = (-1, 4, -1).

utilizamos a igualdade:

$$[T(\vec{v})]_B = T_B^A\,[\vec{v}]_A = \begin{bmatrix} 3 & 11 & 5 \\ -1 & -8 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36 \\ -28 \end{bmatrix}$$

Observe que uma forma de verificar esses cálculos pode ser a seguinte:

$T(\vec{v})$ = T(2, 3, -1) = (8, -4) = 36(1, 3) – 28(1, 4).

Ou seja, $[T(\vec{v})]_B = \begin{bmatrix} 36 \\ -28 \end{bmatrix}$.

Exemplo 2. Consideremos a transformação linear

$T(x, y, z) = (2x - y + z, 3x + y - 2z)$

Sejam A = {(1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)} e B = {(1, 0), (0, 1)} bases do R^3 e R^2.

a) Determinar T_B^A .
b) Se $\vec{v}$ = (3, -4, 2), calcular $[T(\vec{v})]_B$.

Solução: Calculando T como combinação linear dos elementos da base B, temos:

- T(1, 1, 1) = (2, 2) = 2(1, 0) + 2(0, 1)
- T(0, 1, 1) = (0, -1) = 0(1, 0) – 1(0, 1)
- T(0, 0, 1) = (1, -2) = 1(1, 0) – 2(0, 1)

Então $T_B^A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix}$.

Calculando $[\vec{v}]_A$:

(3, -4, 2) = 3(1, 1, 1) – 7(0, 1, 1) + 6(0, 0, 1). Logo, $[\vec{v}]_A$ = (3, -7, 6).

Logo, $[T(\vec{v})]_B = T_B^A\,[\vec{v}]_A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -7 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Exemplo 3. Consideremos a mesma transformação linear do exercício anterior

$T(x, y, z) = (2x - y + z, 3x + y - 2z)$

Sejam A = {(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)} e B = {(1, 0), (0, 1)} bases canônicas do R^3 e R^2.
a) Determinar T_B^A .
b) Se $\vec{v} = (3, -4, 2)$, calcular $[T(\vec{v})]_B$.

Solução: Calculando T como combinação linear dos elementos da base B, temos:

- T(1, 0, 0) = (2, 3) = 2(1, 0) + 3(0, 1)
- T(0, 1, 0) = (-1, 1) = -1(1, 0) + 1(0, 1)
- T(0, 0, 1) = (1, -2) = 1(1, 0) – 2(0, 1)

Então $T_B^A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$.

Observe que $[\vec{v}]_A$ é o próprio $\vec{v}$, pois a base é canônica: $[\vec{v}]_A = \vec{v} = (3, -4, 2)$.

Logo, $[T(\vec{v})]_B = T_B^A\,[\vec{v}]_A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Observações:

1. No caso em que A e B são bases canônicas, representa-se T_B^A simplesmente por [T], que neste caso é chamada de ***matriz canônica*** de T. A matriz do exemplo 3 é a matriz canônica de T.

2. No caso em que A e B são bases canônicas, a matriz canônica pode ser obtida diretamente, copiando os coeficientes da transformação dada diretamente para a matriz, como ilustram os exemplos a seguir:

a) Se $T : R^2 \mapsto R^3$ tal que $T(x, y) = (3x - 2y, 4x + y, x)$

então $[T] = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

b) Se $T : R^2 \mapsto R^2$ tal que $T(x, y) = (x, -y)$ então $[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

c) Se $T : R^3 \mapsto R$ tal que $T(x, y, z) = 4x - y$ então $[T] = [\,4 \quad -1 \quad 0\,]$.

3. Por outro lado, quando é dada uma matriz de uma transformação linear T sem que haja referência às bases, essa deve ser entendida como a matriz canônica de T. Por exemplo, a matriz $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ define a transformação linear $T : R^3 \mapsto R^2$ tal que $T(x, y, z) = (2x + 3y + 4z, x - 2y)$

Exemplo 4. Dadas as bases A = {(1, 1), (1, 0)} do R^2 e B = {(1, 2, 0), (1, 0, -1), (1, -1, 3)} do R^3, determinar a transformação linear $T : R^2 \mapsto R^3$ cuja matriz é:

$$T_B^A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Solução: Observe que o significado de cada coluna dessa matriz é:

$$[T(1, 1)]_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad [T(1, 1)]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Logo, as imagens dos vetores da base A em relação à base canônica são:

$$T(1, 1) = 2(1, 2, 0) + 1(1, 0, -1) - 1(1, -1, 3) = (2, 5, -4)$$
$$T(1, 0) = 0(1, 2, 0) - 2(1, 0, -1) + 3(1, -1, 3) = (1, -3, 11)$$

Agora, dado um elemento qualquer (x, y) do R^2, ele pode ser expresso como combinação linear dos elementos de A por:

$$(x, y) = y(1, 1) + (x - y)(1, 0).$$

Portanto:
$$\begin{aligned} T(x, y) &= yT(1, 1) + (x - y)T(1, 0) \\ &= y(2, 5, -4) + (x - y)(1, -3, 11) \\ &= (x + y, -3x + 8y, 11x - 15y) \end{aligned}$$

Exercícios

1. Consideremos a transformação linear $T : R^3 \mapsto R^2$ definida por $T(x, y, z) = (2x + y - z, x + 2y)$ e as bases A = {(1, 0, 0), (2, -1, 0), (0, 1, 1)} do R^3, e B = {(-1, 1), (0, 1)} do R^2. Determine T_B^A .

2. Seja a transformação linear $T : R^2 \mapsto R^3$ definida por $T(x, y) = (2x - y, x + 3y, -2y)$ e as bases A = {(-1, 1), (2, 1)} e B = {(0, 0, 1), (0, 1, -1), (1, 1, 0)}.
a) Determine T_B^A .
b) Determine T_C^A onde *C* representa a base canônica do R^3.

3. Sabendo que a matriz de uma transformação linear $T : R^2 \mapsto R^3$

nas bases A = {(-1, 1), (1, 0)} do R^2 e B = {(1, 1, -1), (2, 1, 0), (3, 0, 1)} do R^3 é $T_B^A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, encontrar $T(x, y)$.

4. Seja $[T] = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ a matriz canônica de uma transformação linear $T : R^2 \mapsto R^3$. Determine $\vec{v}$ tal que $T(\vec{v}) = (2, 4, -2)$.

5. Seja $T : R^2 \mapsto R^3$ uma transformação linear cuja matriz é $T_B^A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$, onde A é a base canônica e B = {(1, 0, 1), (-2, 0, 1), (0, 1, 0)}. Qual a imagem do vetor (2, -3)?

6. Seja $T : R^3 \mapsto R^2$ uma transformação linear cuja matriz é $T_B^A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, onde
A = {(0, 1, 1), (1, 0, 0), (1, 0, 1)} e B = {(-1, 0), (0, -1)}.
a) Determinar a expressão de $T(x, y, z)$.
b) Determinar *ker*(T).

c) Determinar *Im*(T).
d) T é injetora?

7. Considere a transformação linear $T : R^2 \mapsto R^2$ tal que $T(x, y) = (x + 2y, x - y)$, e as bases A = {(-1, 1), (1, -0)}, B = {(2, -1), (-1, 1)} e C a base canônica. Determinar T_A^C, T_B^C e [T].

8. A matriz de uma transformação linear $T : R^2 \mapsto R^2$ relativa à base

A = {(1, 1), (3, 2)} é $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$.

a) Determinar $[T(1, 1)]_A$ e $[T(3, 2)]_A$.
b) Determinar T(1, 1) e T(3, 2).
c) Determinar $T(x, y)$.

9. Seja $T : R^2 \mapsto R^2$ definida por $[T] = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$. Determinar vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ tais que:
a) $T(\vec{u}) = \vec{u}$
b) $T(\vec{v}) = 2\vec{v}$
c) $T(\vec{w}) = (4, 4)$

10. Seja T a transformação linear dada pela matriz $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$.
a) Calcular *ker*(T) e *dim ker*(T).
b) Calcular *Im*(T) e *dim Im*(T).

11. Seja o espaço vetorial $V = M(2, 2)$ e a transformação $T : V \mapsto R^3$

definida por $T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (a + b, c - d, 2a)$

a) Mostre que T é linear.
b) Determinar T_B^A, onde A e B são bases canônicas do M(2, 2) e R^3, respectivamente.
c) Calcular $\vec{v} \in V$ tal que $T(\vec{v}) = (3, -2, 4)$.
d) Determinar *ker*(T).

12. Seja $T : R^2 \mapsto M(2, 2)$ uma transformação linear, A e B bases canônicas do R^2 e M(2, 2), respectivamente.

Sabendo que $T_B^A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, calcular:

a) T(1, 0) b) T(0, 1) c) T(2, 3)

d) T(x, y)

e) (a, b) tal que T(a, b) = $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

Capítulo VI

AUTOVALORES E AUTOVETORES

Introdução

Seja V um espaço vetorial. Dada uma transformação linear $T : V \mapsto V$, isto é, de um espaço vetorial nele mesmo, gostaríamos de saber quais vetores são levados em um múltiplo escalar de si mesmo, isto é, procuramos um vetor $\vec{v} \in V$ e um escalar $\lambda \in R$ tal que

$$T(\vec{v}) = \lambda$$

Neste caso, $T(\vec{v})$ será um vetor com a mesma direção de $\vec{v}$, isto é, $\vec{v}$ e $T(\vec{v})$ são paralelos. Como $\vec{v} = 0$ satisfaz esta propriedade para todo λ, estamos interessados em determinar vetores não nulos satisfazendo a condição acima. O escalar λ será chamado ***autovalor* ou *valor característico*** de T, e o vetor um ***autovetor* ou *vetor característico*** de T.

Autovalores e autovetores são conceitos importantes de matemática, com aplicações práticas em diversas áreas como mecânica quântica, processamento de imagens, análise de vibrações, mecânica dos sólidos, estatística, etc. Veremos a seguir exemplos de como calcular autovalores e autovetores.

Exemplo 1. Dada a transformação linear $T(x, y) = (x, -y)$. Observe que

- $T(2, 0) = (2, 0) = 1(2, 0)$. Isto é, $(2, 0)$ é autovetor de T com autovalor 1.
- $T(x, 0) = (x, 0) = 1(x, 0)$. Assim, todo vetor $(x, 0)$, $x \neq 0$, é autovetor de T com autovalor 1.

• T(0, 1) = (0, -1) = -1(0, 1). Isto é, (0, 1) é autovetor de T com autovalor -1.

• T(0, y) = (0, -y) = -1(0, y). Assim, todo vetor (0, y), $y \neq 0$, é autovetor de T com autovalor -1.

• T(-2, 1) = (-2, -1). Portanto, (-2, -1) não é autovetor de T.

Exemplo 2. Dada a transformação linear T(x, y) = (4x + 5y, 2x + y).

• T(5, 2) = (30, 12) = 6(5, 2). Logo, (5, 2) é autovetor de T com autovalor 6.

• T(2, 1) = (13, 5) ≠ λ(2, 1), para todo $\lambda \in$ R. Logo, (2, 1) não é autovetor de T.

Exemplo 3. Dada a transformação linear T(x, y) = (-y, x).
Para encontrarmos os autovetores e autovalores de T, resolvemos a equação T(x, y) = λ(x, y), ou seja, (-y, x) = λ(x, y).

Esta equação resulta no sistema $\begin{cases} -y = \lambda x \\ x = \lambda y \end{cases}$.

Uma solução λ para este sistema deve satisfazer $\lambda = \dfrac{1}{\lambda}$, isto é, $\lambda^2 = -1$, o que é impossível. Portanto, esta transformação T não possui autovalor nem autovetor.

Exemplo 4. Dada a transformação linear T(x, y) = (2x + 2y, y).
Para encontrarmos os autovetores e autovalores de T, devemos resolver a equação T(x, y) = λ(x, y), que neste caso é (2x + 2y, y) = λ(x, y). Esta equação resulta no sistema

$$\begin{cases} 2x + 2y = \lambda x \\ y = \lambda y \end{cases}$$

Consideremos os casos em que $y \neq 0$ e $y = 0$.

i. Se $y \neq 0$, então a segunda equação resulta em $\lambda = 1$. Agora, da primeira equação, temos que 2x + 2y = x, o que resulta em y = -1/2 x . Concluímos então que, para o autovalor λ = 1, os autovetores associados são do tipo (x, -1/2 x), $x \neq 0$. Conferindo estes cálculos, observe que T(x, -1/2 x) = 1 (x, -1/2x).

ii. Se y = 0, a primeira equação resulta em 2x = λx, ou seja, λ = 2. Portanto, outro autovalor é 2, e qualquer vetor não nulo (x, 0) é um autovetor correspondente. Ou seja, T(x, 0) = 2(x, 0).

Temos assim, para esta transformação T,

- autovetores , $x \neq 0$, associados ao autovalor 1, e
- autovetores $(x, 0)$, $x \neq 0$, associados ao autovalor 2.

Dada uma matriz quadrada A, de ordem n, estaremos entendendo por autovalores e autovetores de A os autovalores e autovetores da transformação linear $T: R^n \mapsto R^n$ cuja matriz associada é a matriz A, em relação à base canônica, isto é, $T(\vec{v}) = A\vec{v}$. Assim, um autovalor $\lambda \in R$ e um autovetor $\vec{v} \in R^n$ de A são soluções da equação $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$, $\vec{v} \neq 0$.

Veremos na próxima seção que os autovalores e autovetores de uma transformação linear T são exatamente aos autovalores e autovetores da matriz associada à T.

Exemplo 5. Verificar se os vetores $\vec{v}_1 = (1, -1)$ e $\vec{v}_2 = (2, 2)$ são autovetores da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Solução: Devemos determinar se existe $\lambda \in R$ tal que $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$ para cada um dos vetores dados.

- $A\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = -1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Ou seja, $A\vec{v}_1 = (-1)\vec{v}_1$.

Logo, $\vec{v}_1$ é autovetor de A, associado ao autovalor -1.

- $A\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \\ 6 \end{bmatrix} \neq \lambda \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$, para qualquer $\lambda \in R$.

Logo, $\vec{v}_2$ não é autovetor de A.

Exercícios

1. Determinar os autovalores e autovetores das seguintes transformações lineares:

a) $T : R^2 \mapsto R^2$ $\quad T(x, y) = (x + 2y, -x + 4y)$
b) $T : R^2 \mapsto R^2$ $\quad T(x, y) = (2x + 2y, x + 3y)$
c) $T : R^2 \mapsto R^2$ $\quad T(x, y) = (5x - y, x + 3y)$
d) $T : R^2 \mapsto R^2$ $\quad T(x, y) = (y, -x)$

e) $T : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ $\quad T(x, y, z) = (x + y + z, 2y + z, 2y + 3z)$
f) $T : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ $\quad T(x, y, z) = (x, -2x - y, 2x + y + 2z)$
g) $T : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ $\quad T(x, y, z) = (x + y, y, z)$

2. Verificar se os vetores $\vec{v}$ dados são autovetores das correspondentes matrizes A:

a) $\vec{v} = (-2, 1)$ $\quad A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

b) $\vec{v} = (1, 1, 2)$ $\quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

c) $\vec{v} = (-2, 1, 3)$ $\quad A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

Polinômio característico

Veremos agora uma forma mais eficaz de encontrar os **autovalores e autovetores** de uma transformação linear. Para um melhor entendimento, apresentaremos o procedimento através de um exemplo concreto e, em seguida, veremos que este se generaliza naturalmente.

Exemplo 1. Seja $T : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ uma transformação linear definida por

$T(x, y) = (4x + 5y, 2x + y).$

Então a matriz canônica de T é

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Procuramos vetores $= (x, y) \in \mathbb{R}^2$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ tais que $T(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$, isto é, $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$. Observe que se I for a matriz identidade de ordem 2, então a equação acima pode ser escrita na forma $A\vec{v} = (\lambda I)\vec{v}$, ou ainda $(A - \lambda I)\vec{v} = 0$. Escrevendo explicitamente, temos

$$\left(\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4-\lambda & 5 \\ 2 & 1-\lambda \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

O que temos agora é um sistema de duas equações e duas incógnitas cuja matriz dos coeficientes é exatamente a matriz $\begin{bmatrix} 4-\lambda & 5 \\ 2 & 1-\lambda \end{bmatrix}$

Se $\det \begin{bmatrix} 4-\lambda & 5 \\ 2 & 1-\lambda \end{bmatrix} \neq 0$, este sistema terá uma única solução, que é a solução nula, ou seja, $x = y = 0$. Como estamos interessados em encontrar soluções não nulas deste sistema, a única forma de obtê-las é impondo que

$$\det \begin{bmatrix} 4-\lambda & 5 \\ 2 & 1-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

Isto é, $(4 - \lambda)(1 - \lambda) - 10 = 0$. Ou, $\lambda^2 - 5\lambda - 6 = 0$.

As raízes desta equação são $\lambda_1 = 6$ e $\lambda_2 = -1$, que são os autovalores de T.

Conhecendo os autovalores podemos determinar os autovetores correspondentes resolvendo a equação $(A - \lambda I)\vec{v} = 0$ em cada caso, ou seja,

- $\lambda = 6$.

O sistema $(A - \lambda I)\vec{v} = 0$ fica: $\begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, isto é,

$$\begin{cases} -2x + 5y = 0 \\ 2x - 5y = 0 \end{cases}.$$

Este sistema admite soluções da forma $y = 2/5x$.
Assim, vetores do tipo $\vec{v} = (x, x)$ ou $\vec{v} = x\,(1,)$, $x \neq 0$, são autovetores associados ao autovalor $\lambda = 6$.

- $\lambda = -1$.

O sistema $(A - \lambda I) = 0$ fica: $\begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, isto é,

$$\begin{cases} 5x + 5y = 0 \\ 2x + 2y = 0 \end{cases}.$$

Este sistema admite soluções da forma $y = -x$.
Assim, vetores do tipo $\vec{v} = (x, -x)$ ou $\vec{v} = x\,(1, -1)$, $x \neq 0$, são autovetores associados ao autovalor $\lambda = -1$.

Antes de apresentarmos outros exemplos, é importante observar que o que fizemos acima com uma matriz de ordem 2 pode ser perfeitamente generalizado. Seja $T: R^n \mapsto R^n$ uma transformação linear e seja A a matriz canônica de T. Os autovalores e autovetores de A são exatamente aqueles que satisfazem a equação $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$, ou $A\vec{v} = (\lambda I)\vec{v}$, ou ainda $(A - \lambda I)\vec{v} = 0$.

Se $\det(A - \lambda I) \neq 0$, sabemos que o posto de $(A - \lambda I)$ é n, e portanto o sistema $(A - \lambda I)\vec{v} = 0$ tem uma única solução, a solução nula ($\vec{v} = 0$). Como estamos interessados em encontrar soluções não nulas deste sistema, a única forma de obtê-las é impondo que

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

A equação $\det(A - \lambda I) = 0$ é denominada ***equação característica*** de T ou da matriz A. Suas raízes são exatamente os autovalores de T ou de A. A expressão $\det(A - \lambda I)$ é um polinômio em λ denominado ***polinômio característico*** de T ou de A.

Uma vez determinado os autovalores, os autovetores associados podem ser determinados resolvendo a equação $(A - \lambda I) = 0$ para cada autovalor λ.

Exemplo 2. Determine os autovalores e autovetores da matriz

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Solução: A equação característica de A é

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} -3-\lambda & 4 \\ -1 & 2-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

Isto é, $(-3 - \lambda)(2 - \lambda) + 4 = 0$, ou $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$.

As raízes desta equação são $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -2$, que são os autovalores de A. Procuraremos agora os autovetores associados.

- $\lambda = 1$.

O sistema $(A - \lambda I) = 0$ fica: $\begin{bmatrix} -4 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, isto é,

$$\begin{cases} -4x + 4y = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases}.$$

Este sistema admite soluções da forma $y = x$.
Assim, vetores do tipo $\vec{v} = (x, x)$ ou $\vec{v} = x\,(1, 1)$, $x \neq 0$, são autovetores associados ao autovalor $\lambda = 1$.

- $\lambda = -2$.

O sistema $(A - \lambda I) = 0$ fica: $\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, isto é,

$$\begin{cases} -x + 4y = 0 \\ -x + 4y = 0 \end{cases}.$$

Este sistema admite soluções da forma $x = 4y$.
Assim, vetores do tipo $\vec{v} = (4y, y)$ ou $\vec{v} = y\,(4, 1)$, $y \neq 0$, são autovetores associados ao autovalor $\lambda = -2$.

Exemplo 3. Determine os autovalores e autovetores da matriz

$$A = \begin{bmatrix} -16 & 10 \\ -16 & 8 \end{bmatrix}.$$

Solução: A equação característica de A é

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} -16 - \lambda & 10 \\ -16 & 8 - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

Isto é, $(-16 - \lambda)(8 - \lambda) + 160 = 0$, ou $\lambda^2 + 8\lambda + 32 = 0$. Como esta equação não possui raiz real, A não possui autovalor nem autovetor.

Se, na definição de autovalor, admitíssemos autovalores complexos, as raízes complexas da equação acima seriam os autovalores de A. Porém, neste texto, consideraremos apenas autovalores reais.

Exemplo 4. Determine os autovalores e autovetores da matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Solução: A equação característica de A é

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 4 - \lambda & 2 & 0 \\ -1 & 1 - 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

Resolvendo este determinante chegamos à equação $-\lambda^3 + 7\lambda^2 - 16\lambda + 12 = 0$. As soluções inteiras, caso existam, são divisoras do termo independente 12. Testando as possibilidades, constata-se que $\lambda = 2$ é uma delas. Dividindo o polinômio característico por $(\lambda - 2)$ e fazendo as devidas simplificações, a equação acima fica equivalente à $(\lambda - 2)^2 (\lambda - 3) = 0$. Logo, $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 3$, são as raízes desta equação, isto é, são os autovalores de **A**. Procuraremos agora os autovetores associados.

• $\lambda = 2$.

O sistema $(A - \lambda I)\vec{v} = 0$ fica: $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, isto é,

$$\begin{cases} 2x + 2y = 0 \\ -x - y = 0 \\ y = 0 \end{cases}.$$

A terceira equação implica que $y = 0$, e daí, e segunda implica que $x = 0$. Como não existe restrição para z, os autovetores associados ao autovalor $\lambda = 2$ são vetores do tipo $\vec{v} = (0, 0, z)$ ou $\vec{v} = z\,(0, 0, 1)$, $z \neq 0$. Ou seja, pertencem ao subespaço $[(0, 0, 1)]$.

• $\lambda = 3$.

O sistema $(A - \lambda I) = 0$ fica: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, isto é,

$$\begin{cases} x + 2y = 0 \\ -x - 2y = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}.$$

Da primeira e segunda equações temos que $x = -2y$, e da terceira vem $z = y$. Logo, os autovetores associados ao autovalor $\lambda = 3$ são do tipo $\vec{v} = (-2y, y, y)$ ou seja pertencem ao subespaço $[(-2, 1, 1)]$.

Exemplo 5. Os autovalores de uma transformação linear $T : R^2 \mapsto R^2$ são $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = -3$, sendo $\vec{v}_1 = (1, -1)$ e $\vec{v}_2 = (-1, 0)$ os respectivos autovetores associados. Determinar $T(x, y)$.

Solução: Expressemos inicialmente (x, y) em relação à base $\{(1, -1), (-1, 0)\}$.

$$(x, y) = a\,(1, -1) + b\,(-1, 0)$$

Para determinar a e b devemos resolver a equação $\begin{cases} a - b = x \\ -a = y \end{cases}$, donde $a = -y$ e $b = -x - y$. Logo,

$$(x, y) = -y(1, -1) + (-x - y)(-1, 0)$$

Aplicando o operador T, temos

$$T(x, y) = -yT(1, -1) + (-x - y)T(-1, 0)$$

Mas, $T(1, -1) = 2(1, -1) = (2, -2)$ e $T(-1, 0) = -3(-1, 0) = (3, 0)$. Logo,

$$T(x, y) = -y(2, -2) + (-x - y)(3, 0) = (-3x - 5y, 2y).$$

Propriedades

Terminaremos este capítulo apresentando algumas **propriedades dos autovalores e autovetores**. A primeira, a seguir, afirma que múltiplos escalares de autovetores também são autovetores, e a segunda, que o conjunto dos autovetores associados a um autovalor formam um subespaço vetorial.

Teorema 1. Dada uma transformação linear $T : V \mapsto V$ e um autovetor associado a um autovalor λ, qualquer vetor $\vec{w} = \alpha$ $(\alpha \neq 0)$ também é autovetor de T associado a λ.

Prova: De fato: $T(\vec{w}) = T(\alpha\vec{v}) = \alpha T(\vec{v}) = \alpha(\lambda\vec{v}) = \lambda(\alpha\vec{v}) = \lambda$, onde a 2ª igualdade vem do fato de que T é transformação linear, e a 3ª do fato de ser autovetor associado a λ.

Teorema 2. Dada uma transformação linear $T : V \mapsto V$ e um autovalor λ, o conjunto S_λ, formado pelos autovetores associados a λ mais o vetor nulo, é um subespaço vetorial de $\boldsymbol{V}$.

Prova: Sejam $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2 \in S_\lambda$, $\alpha \in R$.

- $T(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = T(\vec{v}_1) + T(\vec{v}_2) = \lambda\vec{v}_1 + \lambda\vec{v}_2 = \lambda(\vec{v}_1 + \vec{v}_2)$, e portanto, $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 \in S_\lambda$.
- $T(\alpha\vec{v}_1) = \alpha T(\vec{v}_1) = \alpha(\lambda\vec{v}_1) = \lambda(\alpha\vec{v}_1)$, ou seja, $\alpha\vec{v}_1 \in S_\lambda$.

Pelo Teorema 2 (pág. 62), temos que S_λ é subespaço vetorial de $\boldsymbol{V}$.

Vamos terminar este capítulo introduzindo o conceito de multiplicidade de um autovalor. Chamamos de ***multiplicidade algébrica*** de um autovalor a quantidade de vezes que ele aparece como raiz do polinômio característico. No exemplo 4 (pág. 123), o autovalor $\lambda_1 = 2$ tem multiplicidade algébrica 2 (ou ainda, 2 é raiz dupla do polinômio característico).

A ***multiplicidade geométrica*** de um autovalor é a dimensão do subespaço vetorial associado a ele. No exemplo 4 (pág. 123), o autovalor $\lambda_1 = 2$ tem multiplicidade geométrica 1. Observe que se a multiplicidade algébrica de um autovalor for 1, a multiplicidade geométrica será necessa-riamente 1.

Exercícios

1. Determine os autovalores e autovetores correspondentes das transformações lineares:

a) $T : R^2 \mapsto R^2$ tal que $T(x, y) = (2y, x)$

b) $T : R^2 \mapsto R^2$ tal que $T(x, y) = (x + y, 2x + y)$

c) $T : R^2 \mapsto R^2$ tal que $T(x, y) = (y, -x)$

d) $T : R^3 \mapsto R^3$ tal que $T(x, y, z) = (x + y, x - y + 2z, 2x + y - z)$

e) $T : P_2 \mapsto P_2$ tal que $T(ax^2 + bx + c) = ax^2 + cx + b$

f) $T : M(2, 2) \mapsto M(2, 2)$ tal que $T(A) = A^T$ (isto é, T leva uma matriz na sua transposta).

g) $T : R^4 \mapsto R^4$ tal que $T(x, y, z, w) = (x, x + y, x + y + z, x + y + z + w)$

2. Determine os autovalores e autovetores correspondentes às matrizes:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 3 & -3 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ f) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

g) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ h) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

3. Seja $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

a) Determine os autovalores de A e A^{-1}.

b) Quais os autovetores correspondentes?

4. Provar as seguintes proposições:
a) Os autovalores de uma matriz triangular (ou diagonal) são os elementos da diagonal principal.

b) Uma matriz e sua transposta possuem os mesmos autovalores.

c) Se uma transformação linear admite $\lambda = 0$ como autovalor então ela não é inversível.

5. Determine a transformação linear $T: R^2 \mapsto R^2$ que tenha autovalores -2 e 3 associados aos autovetores $(3y, y)$ e $(-2y, y)$, respectivamente.

6. Os vetores $\vec{v}_1 = (1, 1)$ e $\vec{v}_2 = (2, -1)$ são autovetores de uma transformação linear $T: R^2 \mapsto R^2$ associados aos autovalores $\lambda_1 = 5$ e $\lambda_2 = -1$, respectivamente. Determinar a imagem do vetor (4, 1).

7. Se $\lambda_1 = 4$ e $\lambda_2 = 2$ são autovalores de uma transformação linear $T : R^2 \mapsto R^2$ cujos autovetores associados são $\vec{u} = (2,1)$ e $\vec{v} = (-1,3)$, respectivamente, determinar $T(3\vec{u} - \vec{v})$.

8. Quais são os autovalores e autovetores da matriz identidade?

9. Mostre que se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são autovetores associados ao autovalor λ em uma transformação linear T então $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$ é também autovetor associado a λ, onde $\alpha, \beta \in R$.

10. Seja $T : R^2 \mapsto R^2$ uma transformação linear que dobra o comprimento do vetor $\vec{u} = (2, 1)$ e triplica o comprimento de $\vec{v} = (1, 2)$, sem alterar as direções nem inverter os sentidos.
a) Calcular T(0, 3)
b) Determinar $T(x, y)$

11. Quais as matrizes de rotação em R^2 que admitem autovalores?

Capítulo VII

DIAGONALIZAÇÃO DE OPERADORES

Base de autovetores

Nosso objetivo neste capítulo será encontrar uma base do espaço vetorial na qual a matriz de uma determinada transformação linear seja a mais simples possível. A melhor situação possível é aquela em que conseguimos uma matriz diagonal associada à transformação linear.

Dada uma transformação linear $T : \boldsymbol{V} \mapsto \boldsymbol{V}$, nosso objetivo é conseguir uma base A de $\boldsymbol{V}$ na qual a matriz T_A^A seja diagonal. Uma base com esta propriedade será uma base formada por autovetores de T. Estudaremos então condições para a existência de uma tal base. A seguinte propriedade será útil para os nossos propósitos:

Teorema 1. Autovetores associados a autovalores distintos são linearmente independentes.

Prova: Provaremos este teorema para o caso de dois autovalores distintos. A prova para o caso de mais de dois autovalores distintos é análoga.

Sejam λ_1 e λ_2 autovalores distintos de uma transformação linear $T : \boldsymbol{V} \mapsto \boldsymbol{V}$. Sejam $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ autovetores associados a λ_1 e λ_2, respectivamente. Então $T(\vec{v}_1) = \lambda_1\vec{v}_1$ e $T(\vec{v}_2) = \lambda_2\vec{v}_2$. Vamos mostrar que $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ são LI.

Consideremos a igualdade:

(1) $$a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 = 0.$$

Pela linearidade de T, temos:

(2) $a_1T(\vec{v}_1) + a_2T(\vec{v}_2) = 0,$ ou $a_1\lambda_1\vec{v}_1 + a_2\lambda_2\vec{v}_2 = 0.$

Multiplicando ambos os membros da igualdade (1) por λ_1, vem:

(3) $a_1\lambda_1\vec{v}_1 + a_2\lambda_1\vec{v}_2 = 0.$

Subtraindo (3) de (2), temos: $a_2(\lambda_2 - \lambda_1)\vec{v}_2 = 0.$

Mas, $\lambda_2 - \lambda_1 \neq 0$ e $\vec{v}_2 \neq 0$. Logo $a_2 = 0$. Substituindo este valor de a_2 na equação (1), e considerando que $\vec{v}_1 \neq 0$, temos que $a_1 = 0$. Logo, o conjunto $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ é LI, como queríamos demonstrar.

Uma importante conseqüência deste teorema é a seguinte:

Corolário 1: Se V é um espaço vetorial de dimensão n e $T : V \mapsto V$ é uma transformação linear que possui n autovalores distintos, então o conjunto $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ formado pelos correspondentes autovetores é uma base de V.

Em outras palavras, se conseguirmos encontrar tantos autovalores distintos quanto for a dimensão do espaço, podemos garantir a existência de uma base de autovetores.

Exemplo 1. Seja $T : R^2 \mapsto R^2$ uma transformação linear (do exemplo 1 pág. 131) definida por $T(x, y) = (4x + 5y, 2x + y)$, cuja matriz em relação à base canônica é $\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Queremos encontrar, se possível, uma base do R^2 formada por autovetores de T. Como vimos naquele exemplo, os autovalores desta transformação são $\lambda_1 = 6$ e $\lambda_2 = -1$. Como $\lambda_1 \neq \lambda_2$, podemos garantir pelo corolário anterior que os autovetores associados formam uma base do R^2.

De fato, dois autovetores associados a λ_1 e λ_2 são $\vec{v}_1 = (5, 2)$ e $\vec{v}_2 = (1, -1)$, respectivamente. Logo, $A = \{(5, 2), (1, -1)\}$ é uma base do R^2. Calculemos agora a matriz T_A^A.

Como $T(\vec{v}_1) = 6\vec{v}_1 = 6\vec{v}_1 + 0\vec{v}_2$ e $T(\vec{v}_2) = -1\vec{v}_2 = 0\vec{v}_1 - 1\vec{v}_2$, temos que

$T_A^A = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, uma matriz diagonal.

Exemplo 2: Seja $T : R^3 \mapsto R^3$ uma transformação linear cuja matriz em relação à base canônica C é

$$T_C^C = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

O polinômio característico de T é $\det(T_C^C - \lambda I) = (3 - \lambda)^2(-1 - \lambda)$. Logo, os autovalores são $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = -1$.

Associado a $\lambda_1 = 3$ temos autovetores do tipo $(x, y, 0)$. Portanto, obtemos dois autovetores LI: $\vec{v}_1 = (1, 0, 0)$ e $\vec{v}_2 = (0, 1, 0)$.

Associado a $\lambda_2 = -1$ temos um autovetor LI, $\vec{u} = (4, -5, 4)$.

Então $A = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{u}\}$ é uma base do R^3 constituída de autovetores de

T e $T_A^A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Em relação a esta base de autovetores, a matriz de T é uma matriz diagonal.

De forma mais geral, dada uma transformação linear $T : \boldsymbol{V} \mapsto \boldsymbol{V}$, se conseguirmos uma base $A = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ formada por autovetores de T, como

$$\begin{array}{l} T(\vec{v}_1) = \lambda_1\vec{v}_1 + 0\vec{v}_2 + \ldots + 0\vec{v}_n \\ T(\vec{v}_2) = 0\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \ldots + 0\vec{v}_n \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \\ T(\vec{v}_n) = 0\vec{v}_1 + 0\vec{v}_2 + \ldots + \lambda_n\vec{v}_n \end{array}$$

A matriz T_A^A será uma matriz diagonal onde os elementos da diagonal principal são os autovalores λ_i, isto é,

$$T_A^A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Não precisamos ter necessariamente os λ_i distintos. Na verdade, um autovalor aparecerá na diagonal tantas vezes quantas forem os autovetores LI a ele associados.

Por outro lado, se B = $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$ é uma base de V tal que

$$T_B^B = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & L & 0 \\ 0 & a_2 & L & 0 \\ M & M & O & M \\ 0 & 0 & L & a_n \end{bmatrix}$$

então $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$ são necessariamente autovetores de T com autovalores $a_1, a_2, \dots, a_n$, respectivamente, pois da definição de T_B^B temos:

$$\begin{array}{l} T(\vec{u}_1) = a_1\vec{u}_1 + 0\vec{u}_2 + \dots + 0\vec{u}_n \\ T(\vec{u}_2) = 0\vec{u}_1 + a_2\vec{u}_2 + \dots + 0\vec{u}_n \\ \quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \\ T(\vec{u}_n) = 0\vec{u}_1 + 0\vec{u}_2 + \dots + a_n\vec{u}_n \end{array}$$

Concluímos então que uma transformação linear T : $V \mapsto V$ admite uma base A em relação à qual sua matriz T_A^A é diagonal se, e somente se, a base A for formada por autovetores de T. Este fato motiva a seguinte definição:

Definição 1. Uma transformação linear T : $V \mapsto V$ é ***diagonalizável*** se existe uma base de V cujos elementos são autovetores de T. Neste caso, a matriz de T em relação a esta base é uma matriz diagonal.

As transformações lineares dos exemplos 1 e 2 são, portanto, diagonalizáveis. Apresentaremos a seguir um exemplo de uma transformação linear não diagonalizável.

Exemplo 3. Seja T : $R^3 \mapsto R^3$ a transformação linear cuja matriz em relação à base canônica C é

$$T_C^C = \begin{bmatrix} 3 & -3 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

O polinômio característico de T é det $(T_C^C - \lambda I) = (3 - \lambda)^2(-1 - \lambda)$. Logo, os autovalores são $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = -1$.

Associado a $\lambda_1 = 3$ conseguimos apenas um autovetor LI, por exemplo, $\vec{v} = (1, 0, 0)$. Associado a $\lambda_2 = -1$ temos o autovetor LI, $\vec{u} = (-1, -20, 16)$.

Neste caso, temos apenas dois autovetores LI para T, e portanto, não existe uma base do ^{3} constituída apenas de autovetores. Isto significa que em nenhuma base a matriz de T é uma matriz diagonal. Logo, T não é diagonalizável.

No exemplo acima, todos os autovalores são reais, mas o operador T não é diagonalizável porque o autovalor 3 tem multiplicidade algébrica 2 e o subespaço associado a ele tem dimensão 1. Em outras palavras, para T ser diagonalizável, este autovalor deveria ter dois autovetores LI associados, mas ele tem apenas um.

Este é um motivo pelo qual uma transformação linear não é diagonalizável. A situação pode ser ainda pior, ou seja, existem casos em que os autovalores de uma transformação nem são reais. Por exemplo, se T é uma transformação cuja matriz é $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, T não possui autovalores reais, e portanto, não é diagonalizável.

Concluímos então que nem sempre uma transformação linear é diagonalizável. Veremos na próxima seção que, no caso particular em que a matriz da transformação T é simétrica, T sempre será diagonalizável.

Exercícios

1. Seja $T : R^2 \mapsto R^2$ a transformação linear definida por $T(x, y) = (7x - 4y, -4x + y)$.
a) Determinar uma base do R^2 em relação à qual a matriz de T seja diagonal.
b) Dar a matriz de T nessa base.

2. Verificar se as transformações lineares definidas pelas matrizes dadas a seguir são diagonalizáveis:

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} 9 & 1 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$

c) $A = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

e) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -4 & 3 \end{bmatrix}$ f) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

g) $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ h) $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -5 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

Diagonalização de matrizes simétricas

Vimos, no exemplo 3 (pág. 131), que nem toda transformação linear é diagonalizável. A situação muda dramaticamente para melhor se restringirmos nossa atenção a matrizes simétricas. Como veremos nesta seção, todos os autovalores de uma matriz real simétrica são reais, e essa matriz é sempre diagonalizável. Além disso, os autovetores são ortogonais, ou seja, o produto interno de quaisquer dois deles é zero.

Lembre-se de que uma matriz é simétrica quando é igual à sua transposta. Vamos começar estudando o processo de diagonalização para uma matriz simétrica 2x2.

Exemplo 1. Seja $T : R^2 \mapsto R^2$ uma transformação linear cuja matriz em relação à base canônica *C* é a matriz simétrica

$$T_C^C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

O polinômio característico de T é $\det(T_C^C - \lambda I) = \lambda^2 + \lambda - 6 = (\lambda + 3)(\lambda - 2)$. Logo, os autovalores são $\lambda_1 = -3$ e $\lambda_2 = 2$.

Associado a $\lambda_1 = -3$ temos o autovetor $\vec{u} = (1, -2)$, e
Associado a $\lambda_2 = 2$ temos o autovetor $\vec{v} = (2, 1)$.

Então $A = \{\vec{u}, \vec{v}\}$ é uma base do R^2 constituída de autovetores de T e $T_A^A = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. Em relação a esta base de autovetores, a matriz de T é uma matriz diagonal.

Alem disso, observe que o produto interno $\vec{u}.\vec{v} = 0$.

O que vimos no exemplo anterior é válido para toda matriz simétrica, como afirma o teorema a seguir.

Teorema 1. Os autovalores de uma matriz (real) simétrica são todos reais.

Prova: Faremos apenas a demonstração para o caso de uma matriz simétrica A de ordem 2. Seja a matriz simétrica

$$A = \begin{bmatrix} p & r \\ r & q \end{bmatrix}$$

A equação característica de A é

$$\det(A - \lambda \mathbf{I}) = \begin{bmatrix} p-\lambda & r \\ r & q-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

Isto é: $(p - \lambda)(q - \lambda) - r^2 = 0$, o que equivale a $\lambda^2 - (p + q)\lambda + (pq - r^2) = 0$. O discriminante desta equação do 2º grau em λ é:

$(p + q)^2 - 4(pq - r^2) = p^2 - 2pq + q^2 - 4pq + 4r^2 = (p - q)^2 + 4r^2$

Como este discriminante é uma soma de quadrados, ele é não-negativo. Logo, as raízes da equação característica, que são os autovalores de A, são reais, como queríamos demonstrar.

O teorema anterior afirma que os autovalores de uma matriz simétrica são todos reais. No entanto, ele não afirma que toda matriz simétrica é diagonalizável. Porém, este fato é sempre verdadeiro, e não o demonstraremos aqui devido à sua complexidade e para não estendermos o texto em demasia. Em seu lugar, mostraremos um resultado mais simples no teorema a seguir.

Teorema 2. Se A é uma matriz simétrica, então dois autovetores quaisquer, corres-pondentes a autovalores distintos de A, são ortogonais.

Prova: Sejam λ_1 e λ_2 dois autovalores distintos de A. Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ autovetores correspondentes a λ_1 e λ_2, respectivamente. Vamos mostrar que $\vec{u}.\vec{v} = 0$. Como A é simétrica, temos:

$$\lambda_1\vec{u}.\vec{v} = (A\vec{u}).\vec{v} = (A^T\vec{u}).\vec{v} = (\vec{u}^TA).\vec{v} = \vec{u}^T(A.\vec{v}) = \vec{u}^T\lambda_2\vec{v} = \lambda_2\vec{u}.\vec{v}$$

Então $\lambda_1\vec{u}.\vec{v} - \lambda_2\vec{u}.\vec{v} = 0$, ou ainda, $(\lambda_1 - \lambda_2)\,\vec{u}\,.\,\vec{v} = 0$. Como $\lambda_1 \neq \lambda_2$, temos que $\vec{u}.\vec{v} = 0$, como queríamos demonstrar.

Exemplo 2. Seja A = $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

O polinômio característico de A é det(A- λI) = $-\lambda^3 + 6\lambda^2 - 9\lambda + 4 = -(\lambda - 4)(\lambda - 1)^2$. Logo, os autovalores são $\lambda_1 = 4$ e $\lambda_2 = 1$.

Associado a $\lambda_1 = 4$ temos o subespaço [(1, 1, 1)], e
Associado a $\lambda_2 = 1$ temos o subespaço [(-1, 0, 1),(-1, 1,0)].

Podemos verificar facilmente que (1, 1, 1).(-1, 0, 1) = 0 e (1, 1, 1).(-1, 1, 0) = 0.

Exemplo 3. Seja T : $R^3 \mapsto R^3$ uma transformação linear cuja matriz em relação à base canônica *C* é a matriz simétrica

$$T_C^C = \begin{bmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

Determine uma base A constituída de autovetores de T.

Solução: A equação característica de A é

$$\det(A-\lambda I) = \det \begin{bmatrix} 7-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 6-1 & -2 \\ 0 & -2 & 5-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

Desenvolvendo o determinante pela 1ª linha e observando a alternância dos sinais que precedem os produtos, temos:

$$(7-\lambda)\begin{vmatrix} 6-\lambda & -2 \\ -2 & 5-\lambda \end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} -2 & 6-\lambda \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$(7 - \lambda)\ [(6 - \lambda)(5 - \lambda) - 4] + 2[(-2)(5 - \lambda)] = 0$$
$$(7 - \lambda)\ (6 - \lambda)(5 - \lambda) - 28 + 4\lambda - 20 + 4\lambda = 0$$
$$(7 - \lambda)\ (6 - \lambda)(5 - \lambda) - 48 + 8\lambda = 0$$
$$(7 - \lambda)\ (6 - \lambda)(5 - \lambda) - 8(6 - \lambda) = 0$$
$$(6 - \lambda)\ [(7 - \lambda)(5 - \lambda) - 8] = 0$$
$$(6 - \lambda)\ (\lambda^2 - 12\lambda + 27) = 0$$
$$(6 - \lambda)(\lambda - 3)(\lambda - 9) = 0$$

As raízes desta equação são $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 6$ e $\lambda_3 = 9$ e, por conseguinte, são os autovalores de T. Determinemos os autovetores associados à cada autovalor.

- $\lambda_1 = 3$.

O sistema $(A - \lambda I) = 0$ fica: $\begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, isto é,

$$\begin{cases} 4x - 2y + 0z = 0 \\ -2x + 3y - 2z = 0 \\ 0x - 2y + 2z = 0 \end{cases}.$$

O sistema admite soluções do tipo $y = 2x$ e $z = 2x$. Assim, os autovetores associados ao autovalor $\lambda_1 = 3$ são vetores do tipo $\vec{v} = (x, 2x, 2x)$, ou $\vec{v} = x(1, 2, 2)$, $x \neq 0$. Ou seja, pertencem ao subespaço [(1, 2, 2)].

- $\lambda_2 = 6$.

O sistema $(A - \lambda I) = 0$ fica: $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, isto é,

$$\begin{cases} x - 2y + 0z = 0 \\ -2x + 0y - 2z = 0 \\ 0x - 2y - z = 0 \end{cases}.$$

O sistema admite soluções do tipo $y = 1/2x$ e $z = -x$. Assim, os autovetores associados ao autovalor $\lambda_2 = 6$ são vetores do tipo $\vec{v} = (x, 1/2x, -x)$, ou $\vec{v} = x(1, 1/2, -1)$, $x \neq 0$. Ou seja, pertencem ao subespaço [(2, 1, -2)].

- $\lambda_3 = 9$.

O sistema $(A - \lambda I) = 0$ fica: $\begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, isto é,

$$\begin{cases} -2x - 2y + 0z = 0 \\ -2x - 3y - 2z = 0 \\ 0x - 2y - 4z = 0 \end{cases}.$$

O sistema admite soluções do tipo $y = -x$ e $z = 1/2x$. Assim, os autovetores associados ao autovalor $\lambda_3 = 9$ são vetores do tipo $\vec{v} = (x, -x, 1/2x)$, ou $\vec{v} = x(1, -1, 1/2)$, $x \neq 0$. Ou seja, pertencem ao subespaço [(2, -2, 1)].

Observe que quaisquer dois autovetores associados a autovalores distintos são ortogonais, ou seja, o produto interno é zero.

Exercícios

1. Para cada uma das transformações lineares definidas pelas matrizes simétricas abaixo, determinar uma base de autovetores.

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ c) $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$

d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e) $A = \begin{bmatrix} 7 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 4 \\ -2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

f) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ g) $A = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 6 \\ 0 & -2 & 0 \\ 6 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ h) $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

Referências

1. J. L. Boldrini, S. I. Rodrigues, V. L. Costa, H. G. Weltzer – Álgebra Linear, 3ª Edição. Harper & Row do Brasil, 1984.

2. K. Hoffman & R. Kunze – Álgebra Linear, São Paulo, Polígono, 1971.

3. S. Lang – Álgebra Linear, São Paulo, Edgard Blücher LTDA., 1971.

4. S. Lipschutz – Álgebra Linear. McGraw-Hill do Brasil Ltda., Rio de Janeiro, 1971.

5. A. Steinbruch e P. Winterle – Álgebra Linear. Pearson Education do Brasil. 1987.

ead

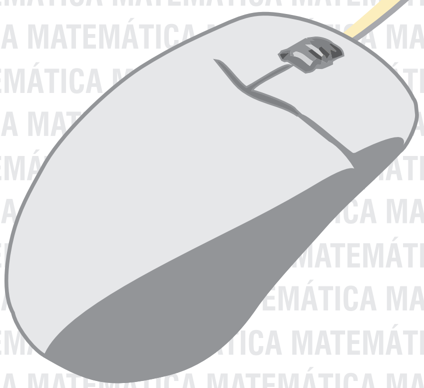
CÁUCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
Coordenação e registro: Editora UFMS
Projeto gráfico: Lennon Godoi
Editoração eletrônica: Marcos Paulo de Souza
Fotolitos: Cromoarte - Editora e Publicidade Ltda

Álgebra Linear é um ramo da matemática que surgiu do estudo detalhado de sistemas de equações lineares, sejam elas algébricas ou diferenciais. A álgebra linear utiliza alguns conceitos e estruturas fundamentais da Matemática como vetores, espaços vetoriais, transformações lineares, sistemas de equações lineares e matrizes.

A história da álgebra linear tem origem no século XVIII com os estudos dos coeficientes de sistemas de equações lineares e seus determinantes por Leibniz e Cramer.

Não obstante o fato de a Álgebra Linear ser um campo abstrato da Matemática, ela tem um grande número de aplicações dentro e fora da Matemática, como em programação linear, processamento de imagens, física matemática, estatística, etc.

São pré-requisitos para este curso os resultados básicos da matemática elementar estudados no ensino médio. Espera-se também do leitor familiaridade com alguns conceitos da Álgebra Elementar, como determinantes, matrizes e sistemas lineares.



UFMS
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul

Coordenadoria de Educação Aberta e a Distância

UAB
UNIVERSIDADE ABERTA DO BRASIL

ISBN 978-85-7613-239-4